

第四章 因式分解

1 因式分解

1. C. 2. C. 3. C. 4. B. 5. A. 6. D. 7. B.

8. 解: $3^{2011} - 3^{2010} - 3^{2009} = 3^{2009}(3^2 - 3 - 1) = 3^{2009} \times 5 = 3^{2008} \times 3 \times 5 = 3^{2008} \times 15$, 所以 $3^{2011} - 3^{2010} - 3^{2009}$ 能被 15 整除. 9. 略.

10. 分析: 首先要读懂题意, 根据图形的组合特点, 由面积间的相等关系, 可写出多项式, 再进一步分解. 此题具有一定的开放性, 答案不唯一. 解: 符合条件的等式很多, 如 $a^2 + 2ab = a(a + 2b)$; $a(a + b) + ab = a(a + 2b)$; $a(a + 2b) - a(a + b) = ab$; $a(a + 2b) - ab = a(a + b)$; $a(a + 2b) - a^2 = 2ab$; $a(a + 2b) - 2ab = a^2$ 等.

2 提公因式法

第 1 课时

1. C. 2. B. 3. $y(x-1)$. 4. 1.

5. 解: (1) 原式 $= 2ab(c + 3cd + 4)$. (2) 原式 $= 2a^2b(2c + 4a - 5b)$. (3) 原式 $= 2ax^3(3a^2xy - 4a + 6x^2)$. (4) 原式 $= -9mn(3mn - 2m + 4)$.

6. $-9mn(m - 3n + 2)$. 7. (1) 2×3^{2013} . (2) -2^{100} .

8. (1) $-4x(6x + 3y - 7)$. (2) $9a^2x^2(a^2 - 2ax - 4x^2)$.

9. $680 \times 3.5\% + 720 \times 3.5\% + 600 \times 3.5\% = 3.5\% \times (680 + 720 + 600) = 70$ (元), 即到期后小明共得利息 70 元.

10. 100.

11. 解: $n^2 - n = n(n-1)$. 对于任意整数 n , n 和 $n-1$ 是两个连续整数, 因此必有一个为偶数, 所以对于任意整数 n , $n^2 - n$ 必是偶数.

第 2 课时

1. $2(2x - y)$. 2. C. 3. $(a + b + c)(x - y)$. 4. $(b + c)(2a - 3)$.

5. 原式 $= 2(m - n)^2 + m(m - n) = (m - n)(2m - 2n + m) = (m - n)(3m - 2n)$.

6. $-a(a - b)^2(b - 1)$.

7. 原式 $= m(m - n)(p - q) + n(m - n)(p - q) = (m - n)(p - q)(m + n)$.

8. 原式 $= (b - a)^2 - a(b - a) + b(b - a) = (b - a)[(b - a) - a + b] = (b - a)(b - a - a + b) = (b - a) \cdot (2b - 2a) = 2(b - a)(b - a) = 2(a - b)^2$.

9. (1) 原式 $= (a + b)[(x + y) - (x - y)] = (a + b)(x + y - x + y) = 2y(a + b)$.

(2) 原式 $= 3(a - b)^3 + (a - b)^2 = (a - b)^2[3(a - b) + 1] = (a - b)^2(3a - 3b + 1)$.

10. 解: (1) 原式 $= n^2 - n = n(n-1)$, 把 $n=0, 1, 2, 3, 4$ 分别代入上式, 得: $0 \times (0-1)=0, 1 \times (1-1)=0, 2 \times (2-1)=2, 3 \times (3-1)=6, 4 \times (4-1)=12$. (2) 不能. (3) $n^2 - n = n(n-1)$, 因为 n 与 $n-1$ ($n \neq 0$) 是相邻的两个自然数, 其中必有一个为偶数, 所以 $n(n-1)$ 必为偶数, 即 $n^2 - n$ 是偶数而不是奇数.

11. (1) 提公因式法. 2. (2) $2013, (1+x)^{2014}$. (3) $(1+x)^{n+1}$.

12. 解: 原式 $= 2^9(2-1) - 2^8 - 2^7 - \dots - 2^2 - 2 = 2^9 - 2^8 - 2^7 - \dots - 2^2 - 2 = 2^8(2-1) - 2^7 - \dots - 2^2 - 2 = 2^8 - 2^7 - \dots - 2^2 - 2 = \dots = 2^3 - 2^2 - 2 = 2^2(2-1) - 2 = 2^2 - 2 = 2$.

3 公式法

第 1 课时

1. B. 2. C. 3. $(2x+1)(2x-1)$. 4. $2(x+2)(x-2)$.

5. (1) $(a+0.1)(a-0.1)$. (2) $(7+x)(7-x)$. (3) $(0.1m+25n)(0.1m-25n)$.

6. 解: 原式 $= \left(\frac{4}{9}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x^3\right)^2 = \left(\frac{4}{9}y + \frac{3}{2}x^3\right)\left(\frac{4}{9}y - \frac{3}{2}x^3\right)$.

7. $\frac{121}{241}$. 8. 解: 原式 $= 16 - x^4 = (4+x^2)(4-x^2) = (4+x^2)(2+x)(2-x)$.

9. 解: $(2n+1)^2 - 1 = [(2n+1)+1][(2n+1)-1] = 2(n+1) \cdot 2n = 4n(n+1)$. 因为 n 是整数, 所以 n 与 $n+1$ 是两个连续整数, 而两个连续整数中必有一个偶数, 即 $n(n+1)$ 能被 2 整除, 所以 $4n(n+1)$ 能被 8 整除. 故 $(2n+1)^2 - 1$ 能被 8 整除.

10. 解: 剩余部分的面积为: $\pi R^2 - 4\pi r^2 = \pi(R^2 - 4r^2) = \pi(R+2r)(R-2r) = \pi(85+2 \times 7.5)(85-2 \times 7.5) = \pi \times 100 \times 70 = 7000\pi (\text{cm}^2)$.

11. (1) 3. (2) 7. (3) 11. (4) 11. $\dots$ 通过观察归纳, 得到规律: 两个连续奇数的平方差能被 8 整除 (或者说是 8 的倍数). 如果我们分别用 $2n+1$ 和 $2n-1$ 表示两个相邻的奇数, 则利用平方差公式, 有 $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = [(2n+1)+(2n-1)][(2n+1)-(2n-1)] = 4n \times 2 = 8n$.

12. 解: (1) $28 = 4 \times 7 = 8^2 - 6^2$, $2012 = 4 \times 503 = 504^2 - 502^2$, 所以是神秘数. (2) $(2k+2)^2 - (2k)^2 = 4(2k+1)$, 因此由 $2k+2$ 和 $2k$ 构造的神秘数是 4 的倍数. (3) 由 (2) 知神秘数可表示为 4 的倍数, 但一定不是 8 的倍数, 因为两个连续奇数 $2k+1$ 和 $2k-1$ 的平方差 $(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k$, 所以两个连续奇数的平方差不是神秘数.

13. 解: 原式 $= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{100}\right)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} \times \frac{101}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{101}{100} = \frac{101}{200}$.

第 2 课时

1. D. 2. D. 3. 1. 4. $x(x-y)^2$. 5. $-2, 2$. 6. 原式 $= -(x^2 + 2xy + y^2) = -(x+y)^2$.

7. 解: (1) 原式 $= (2a)^2 - 2 \times 2a \cdot b + b^2 = (2a-b)^2$.

(2) 原式 $= (ab)^2 + 2 \cdot ab \cdot 4c + (4c)^2 = (ab+4c)^2$. (3) $(x+y+3)^2$.

8. 解: 原式 $= [3 + (a+b)]^2 = (a+b+3)^2$.

9. 解: 原式 $= (4x^2)^2 - 2 \times 4x^2 \cdot 9 + 9^2 = (4x^2-9)^2 = (2x+3)^2(2x-3)^2$.

10. 解: $\because x-y=1, xy=2, \therefore x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 - 2xy + y^2) = xy(x-y)^2 = 2 \times 1^2 = 2$.

11. A.

12. 分析: $4x^3 - xy^2 = x(4x^2 - y^2) = x(2x+y)(2x-y)$, 当 $x=10, y=10$ 时, $2x+y=30, 2x-y=10$, 可得到密码为 103010 或 101030 或 301010.

第五章 分式与分式方程

第一章 三角形的证明

1 等腰三角形

第1课时

1. B. 2. D. 3. A. 4. 110° . 5. 不是, $AC=DF$ (答案不唯一).

又 $\because AD=CB, \angle D=\angle B, \therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE. \therefore AF=CE. \therefore AF+EF=CE+EF$, 即 $AE=CF$.

7. C. 8. 15° .

9. (1) 证明: 在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABE$ 中, $\because \angle A=\angle A, \angle ADC=\angle AEB=90^\circ, AC=AB$,
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE. \therefore AD=AE$.

(2) 解: 互相垂直. 理由如下: 在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 与 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, $\because OD=OE$ (证明同第(1)问), $AD=AE$,
 $\therefore \text{Rt}\triangle ADO \cong \text{Rt}\triangle AEO. \therefore \angle DAO=\angle EAO$, 即 OA 是 $\angle BAC$ 的平分线. 又 $\because AB=AC, \therefore OA \perp BC$.

10. (2,4) 或 (3,4) 或 (8,4).

第2课时

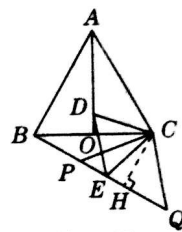
1. 4. 2. A. 3. C. 4. 略.

5. 解: 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中, 因为 $AC=BC, \angle ACD=\angle BCE, CD=CE$, 所以 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,
所以 $\angle ADC=\angle BEC$. 因为 $\angle DOE=\angle OBD+\angle ADC=\angle OBD+\angle BEC=\angle DCE=60^\circ$, 所以
 $\angle BOD=120^\circ$.

6. 解: $AE=BF=CD, AF=BD=CE$. 证明: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等边三角形, $\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60^\circ, \angle EDF=\angle DEF=\angle EFD=60^\circ, DE=EF=FD$. 又 $\because \angle CED+\angle AEF=120^\circ, \angle CDE+\angle CED=120^\circ, \therefore \angle AEF=\angle CDE$. 同理, 得 $\angle CDE=\angle BFD$.
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle BFD \cong \triangle CDE$ (AAS), $\therefore AE=BF=CD, AF=BD=CE$.

7. (1) 证明: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等边三角形, $\therefore AC=BC, CD=CE$, 且
 $\angle ACB=\angle DCE=60^\circ. \therefore \angle ACD+\angle DCB=\angle DCB+\angle BCE=60^\circ, \therefore \angle ACD=\angle BCE. \therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$.

(2) 解: 如图, 作 $CH \perp BQ$, 交 BQ 于点 H , 则 $PQ=2HQ$. 在 $\text{Rt}\triangle BHC$ 中, 由已知
和(1)得 $\angle CBH=\angle CAO=30^\circ, \therefore CH=4$. 在 $\text{Rt}\triangle CHQ$ 中, $HQ=\sqrt{CQ^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,
 $\therefore PQ=2HQ=6$.



(第7题)

第3课时

1. A. 2. B. 3. 30 海里. 4. C. 5. 在一个三角形中, 三个内角都小于 60° 6. 略.

7. 证明: $\because OB=OC, \therefore \angle OBC=\angle OCB. \because BD, CE$ 是两条高, $\therefore \angle BDC=\angle CEB=90^\circ$.

又 $\because BC=CB, \therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB$ (AAS). $\therefore \angle DCB=\angle ECB. \therefore AB=AC. \therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

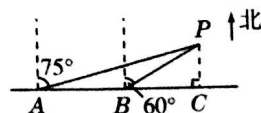
8. D. 9. 略. 10. 略.

11. 解: (1) = (2) = 解答过程: 在等边 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle ABC=\angle ACB=60^\circ, \therefore \angle ABD=120^\circ. \because ED=EC, \therefore \angle EDB=\angle ECB$. 又 $\because \angle ABC=\angle EDB+\angle BED, \angle ACB=\angle ECB+\angle ACE$,
 $\therefore \angle BED=\angle ACE. \because FE \parallel BC, \therefore \angle AEF=\angle ABC=60^\circ, \angle AFE=\angle ACB=60^\circ, \therefore \triangle AEF$ 是等边三角形, $\therefore \angle EFC=180^\circ-\angle AFE=120^\circ$. 又 $\because \angle ABD=120^\circ, EC=ED, \therefore \triangle EFC \cong \triangle DBE$,
 $\therefore EF=DB$. 而由 $\triangle AEF$ 是等边三角形可得 $EF=AE, \therefore AE=DB$.

第4课时

1. 8. 2. D. 3. B. 4. $\frac{49}{2}$.

5. 解: 如图, 是由题意画出的示意图, 则 $AB=7$ 海里, 过点 P 作 $PC \perp AB$, 垂足为 C . 根据题意知, $\angle PAB=15^\circ, \angle PBC=30^\circ, \therefore \angle APB=\angle PBC-\angle PAB=30^\circ-15^\circ=15^\circ, \therefore \angle PAB=\angle APB, \therefore PB=AB=7$ 海里. 在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中,
 $\because \angle PBC=30^\circ, \therefore PC=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2} \times 7=3.5$ (海里) < 3.8 海里, $\therefore$ 该轮船一直



(第5题)

向东航行有触礁的危险.

6. 略. 7. A. 8. $\sqrt{3}$.

9. 证明: (1) $\because \triangle ACM, \triangle CBN$ 都为等边三角形, $\therefore AC=MC, NC=BC, \angle ACM=\angle BCN=60^\circ$,

$\therefore \angle ECF = 60^\circ, \therefore \angle ACN = \angle BCM = 120^\circ, \therefore \triangle ACN \cong \triangle MCB, \therefore AN = BM.$
 (2) 由 $\triangle ACN \cong \triangle MCB$, 得 $\angle 1 = \angle 2$. 又 $CN = CB, \angle ECN = \angle FCB = 60^\circ, \therefore \triangle BCF \cong \triangle NCE.$
 $\therefore CF = CE. \therefore \triangle CEF$ 为等边三角形.

10. 分析: (1) 底边长为 4, 面积为 8 的等腰三角形底边上的高是 4. (2) 面积为 10 的等腰直角三角形的直角边长为 $2\sqrt{5}$; (3) 一边长为 $2\sqrt{2}$, 面积为 6 的等腰三角形, 可以把 $2\sqrt{2}$ 作为底边长.

解: 如图 1, 2, 3 所示:

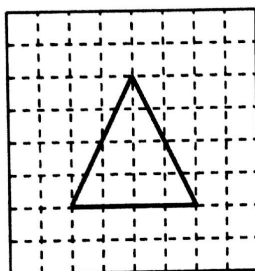


图 1

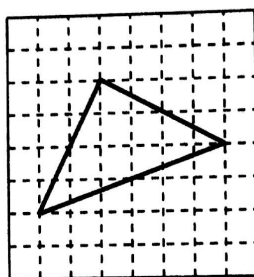


图 2

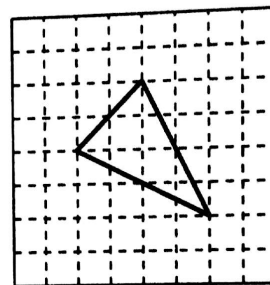


图 3

(第 10 题)

11. 解: (1) 发现: $AF = BD$.

证明: 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC, \angle ACB = 60^\circ$, 在等边 $\triangle DCF$ 中, $DC = FC, \angle DCF = 60^\circ$,

$\therefore \angle ACB - \angle ACD = \angle DCF - \angle ACD$, 即 $\angle BCD = \angle ACF, \therefore \triangle BCD \cong \triangle ACF (SAS), \therefore AF = BD$.

(2) 仍然成立.

(3) I. 探究: $AF + BF' = AB$. 证明: 由 (1) 同理可证 $\triangle BCF' \cong \triangle ACD, \triangle ACF \cong \triangle BCD, \therefore BF' = AD, AF = BD, \therefore AF + BF' = AD + BD = AB$.

II. 不成立, 有 $AF - BF' = AB$. 证明: 同理可证 $\triangle BCF' \cong \triangle ACD, \triangle ACF \cong \triangle BCD, \therefore BF' = AD, AF = BD$. 又 $AD + AB = BD, \therefore AF = BF' + AB$, 即 $AF - BF' = AB$.

2 直角三角形