

第三周 线段的垂直平分线

建议用时：60 分钟 总分：100 分 得分：_____

一、选择题(每题 5 分，共 30 分)

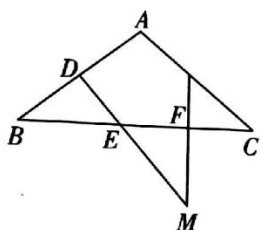
1. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AB 的垂直平分线交 BC 于 E ， EC 的垂直平分线交 DE 延长线于 M ，若 $\angle FMD = 40^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 等于(**C**)

A. 120°

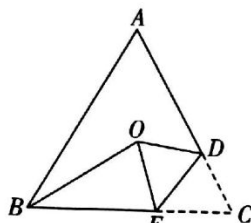
B. 110°

C. 100°

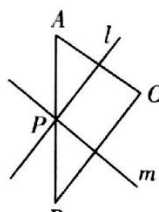
D. 90°



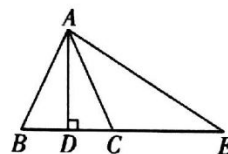
第 1 题图



第 2 题图



第 4 题图



第 5 题图

2. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠，使底角顶点 C 落在三角形三边的垂直平分线的交点 O 处，若 $BE = BO$ ，则 $\angle ABC$ 的度数为(**D**)
3. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AB 的垂直平分线交线段 AC 于 D ，若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 的周长分别是 60 cm 和 38 cm，则 $\triangle ABC$ 的腰长和底边 BC 的长分别是(**D**)
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CA ， CB 的垂直平分线交点在第三边上，那么这个三角形是(**C**)
5. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， AD 垂直平分 BC ， $AC = EC$ ，点 B ， D ， C ， E 在同一条直线上，则 $AB + DB$ 与 DE 之间的数量关系是(**C**)
6. 如图， OP 平分 $\angle AOB$ ， $PA \perp OA$ ， $PB \perp OB$ ，垂足分别为 A ， B 。下列结论中不一定成立的是(**D**)

A. 锐角三角形

B. 钝角三角形

C. 直角三角形

D. 以上结论都不对

A. $AB + DB > DE$

B. $AB + DB < DE$

C. $AB + DB = DE$

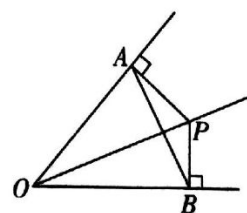
D. 无法判断

A. $PA = PB$

B. PO 平分 $\angle APB$

C. $OA = OB$

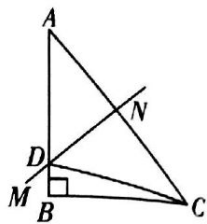
D. AB 垂直平分 OP



第 6 题图

二、填空题(每题 5 分, 共 20 分)

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, AC 的垂直平分线 MN 与 AB 交于 D 点, $\angle BCD = 10^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数是 40° .



8. 到线段 AB 两个端点距离相等的点, 在 线段 AB 的垂直平分线上.

9. 直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, AC 的垂直平分线交 AB 于 D , 若 $AD = 2 \text{ cm}$, 则 $BD =$ 2 cm .

10. 在等边 $\triangle ABC$ 所在的平面内求一点 P , 使 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PAC$ 都是等腰三角形, 具有这样性质的点 P 有 1 个.

三、解答题(共 50 分)

11. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 120^\circ$, 边 AC 的垂直平分线 DE 与 AC , AB 分别交于点 D 和点 E .

(1) 作出边 AC 的垂直平分线 DE ;

(2) 当 $AE = BC$ 时, 求 $\angle A$ 的度数.

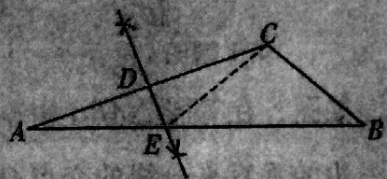
解: (1) 如图所示, DE 即为所求作的边 AC 的垂直平分线;

(2) 如图, 连接 CE , $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,

$\therefore AE = CE$, $\therefore \angle A = \angle ACE$. $\because AE = BC$, $\therefore CE = BC$,

$\therefore \angle B = \angle CEB$. 设 $\angle A = x$, 则 $\angle CEB = \angle A + \angle ACE =$

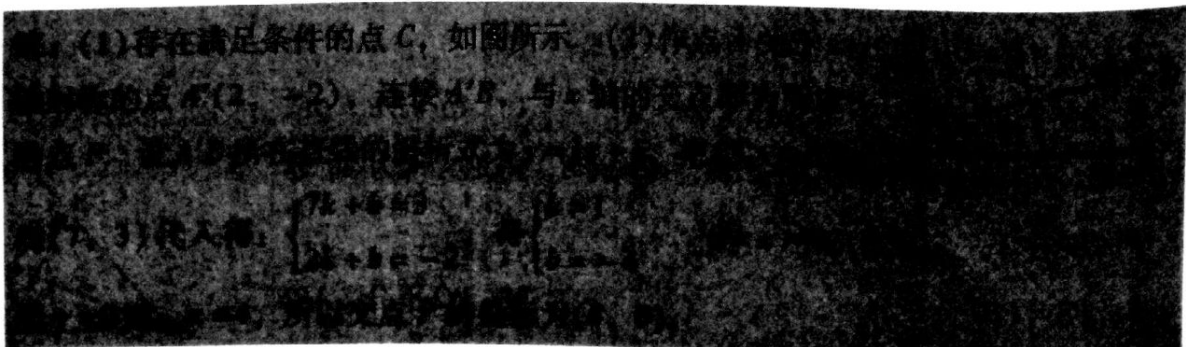
$x + x = 2x$. 在 $\triangle BCE$ 中, $\angle BCE = 180^\circ - 2 \times 2x = 180^\circ - 4x$, $\therefore \angle ACB = \angle ACE + \angle BCE = x + 180^\circ - 4x = 120^\circ$, 解得 $x = 20^\circ$, 即 $\angle A = 20^\circ$.



12. (12 分) A , B 两所学校在一条东西走向公路的同旁, 以公路所在直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系, 且点 A 的坐标是 $(2, 2)$, 点 B 的坐标是 $(7, 3)$.

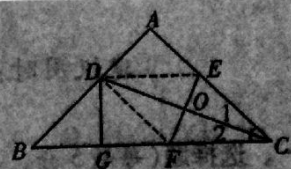
(1) 一辆汽车由西向东行驶, 在行驶过程中是否存在一点 C , 使 C 点到 A , B 两校的距离相等, 如果有? 请用尺规作图找出该点, 保留作图痕迹, 不求该点坐标;

(2) 若在公路边建一游乐场 P , 使游乐场到两校距离之和最小, 通过作图在图中找出建游乐场 P 的位置, 并求出它的坐标.



13. (13 分) $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, D, E, F 分别在 AB, AC, BC 上, 且 $AD = AE$, CD 为 EF 的中垂线, 求证: $BF = 2AD$.

证明: 连 DE, DF , 作 $DG \perp BC$ 于 G . $\because DC$ 为 EF 的中垂线, $\therefore DE = DF, CE = CF$. $DC \perp EF$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$. 又 $\because \angle A = 90^\circ$, $\therefore DA \perp AC$, $DG \perp BC$, $\therefore DA = DG$. 又 $\because DE = DF$, $\therefore \text{Rt} \triangle ADE \cong \text{Rt} \triangle GDF$ (HL), $\therefore GF = AE$. 又 $\because AE = AD$, $\therefore AD = DG = GF$. $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, $\therefore \angle B = 45^\circ$. 在 $\triangle BDG$ 中 $\angle B = 45^\circ$, $\therefore \angle DGB = 90^\circ$, $\therefore \angle BDG = 45^\circ$. $\therefore DG = BG$, $\therefore DG = BG = GF$, $\therefore DG = \frac{1}{2}BF$, $AD = \frac{1}{2}BF$, 即 $BF = 2AD$.



14. (13 分) 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 130^\circ$, 边 AB, AC 的垂直平分线交 BC 于点 P, Q .

(1) 求 $\angle PAQ$ 的度数;

(2) 如图 2, $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 且 $90^\circ < \angle BAC < 180^\circ$, 边 AB, AC 的垂直平分线交 BC 于点 P, Q .

- ①若 $\angle BAC = 130^\circ$, 则 $\angle PAQ =$ _____;
 ②若 $\angle BAC = \alpha$, 则 $\angle PAQ$ 用含有 α 的代数式表示为 _____;
 ③当 $\angle BAC =$ _____ $^\circ$ 时, 能使得 $PA \perp AQ$;
 ④若 $BC = 30$ cm, 则 $\triangle PAQ$ 的周长为 _____ cm.

解析: (1) $\because$ 边 AB, AC 的垂直平分线交 BC 于点 P, Q , $\therefore \angle BAP = \angle B, \angle CAQ = \angle C$. $\because \angle BAC = 130^\circ, AB = AC$, $\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$, 即 $\angle BAP + \angle CAQ = 50^\circ$. $\therefore \angle PAQ = \angle BAC - (\angle BAP + \angle CAQ) = 130^\circ - 50^\circ = 80^\circ$; (2) ① $\because$ 边 AB, AC 的垂直平分线交 BC 于点 P, Q , $\therefore \angle BAP = \angle B, \angle CAQ = \angle C$. $\therefore \angle BAP + \angle CAQ = \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC$. $\therefore \angle PAQ = \angle BAC - (\angle BAP + \angle CAQ) = \angle BAC - (180^\circ - \angle BAC) = 2\angle BAC - 180^\circ$.

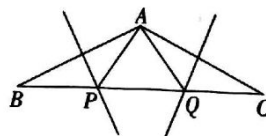


图 1

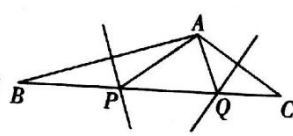


图 2

第四周 角平分线

建议用时：60 分钟 总分：100 分 得分：_____

一、选择题(每题 5 分, 共 30 分)

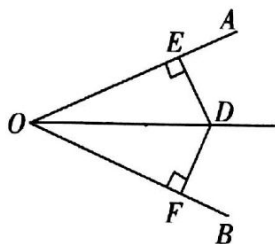
1. 如图, D 是 $\angle AOB$ 平分线上的一点, $DE \perp OA$, $DF \perp OB$, 垂足分别是 E , F . 下列结论不一定成立的是(**D**)

A. $DE = DF$

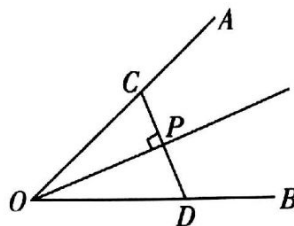
B. $OE = OF$

C. $\angle ODE = \angle ODF$

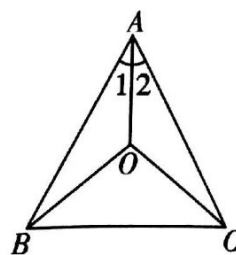
D. $OD = DE + DF$



第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图

2. 如图, P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点, $CD \perp OP$ 于 P , 并分别交 OA , OB 于 C , D , 则点 P 到 $\angle AOB$ 两边距离之和(**A**)

A. 小于 CD

B. 大于 CD

C. 等于 CD

D. 不能确定

3. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的角平分线相交于 O , 下面结论中正确的是(**B**)

A. $\angle 1 > \angle 2$

B. $\angle 1 = \angle 2$

C. $\angle 1 < \angle 2$

D. 不能确定

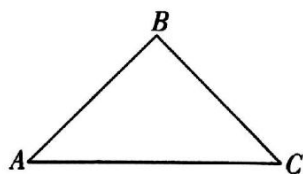
4. 如图, 三条公路把 A , B , C 三个村庄连成一个三角形区域, 某地区决定在这个三角形区域内修建一个集贸市场, 要使集贸市场到三条公路的距离相等, 则这个集贸市场应建在(**C**)

A. 在 AC , BC 两边高线的交点处

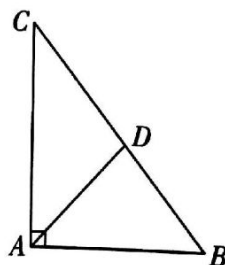
B. 在 AC , BC 两边中线的交点处

C. 在 $\angle A$, $\angle B$ 两内角平分线的交点处

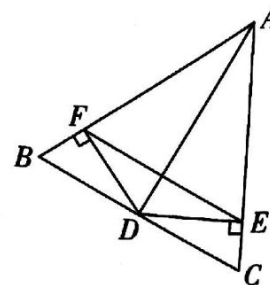
D. 在 AC , BC 两边垂直平分线的交点处



第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D , 则 BD 的长为(**A**)

A. $\frac{15}{7}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{20}{7}$

D. $\frac{21}{5}$

6. 如图, 三角形 ABC 中, $\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$, $DF \perp AB$, 垂足分别为 E, F , 下面四个结论: ① $\angle AFE = \angle AEF$; ② AD 垂直平分 EF ; ③ $\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle CED}} = \frac{BF}{CE}$; ④ EF 一定平行 BC . 其中正确的是(**A**)

A. ①②③

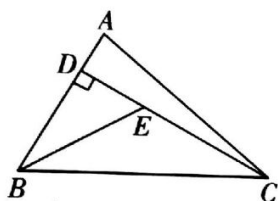
B. ②③④

C. ①③④

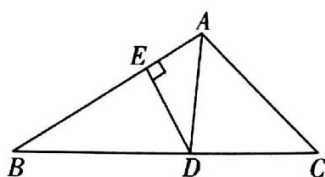
D. ①②③④

二、填空题(每题 5 分, 共 20 分)

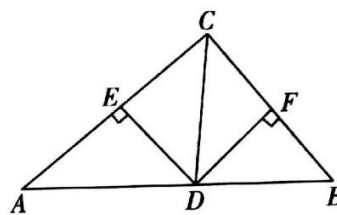
7. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的高, BE 平分 $\angle ABC$, 交 CD 于点 E , $BC = 5$, $DE = 2$, 则 $\triangle BCE$ 的面积等于 **5**.



第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图

8. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $S_{\triangle ABC} = 7$, $DE = 2$, $AB = 4$, 则 AC 长是 **3**.
9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , $DE \perp AC$ 交于点 E , $DF \perp BC$ 于点 F , 且 $BC = 4$, $DE = 2$, 则 $\triangle BCD$ 的面积是 **4**.
10. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, $AC = 6$, $BC = 8$, $CD =$ **3**.

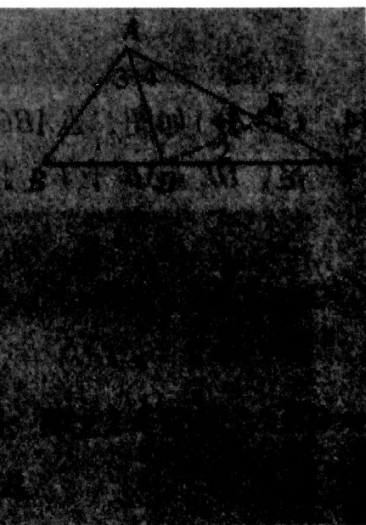
三、解答题(共 55 分)

11. (12 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC : \angle ABC : \angle ACB = 4 : 2 : 1$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线. 求证: $AD = AC - AB$.

解: 在 AC 上截取 $AE = AB$, 连 DE . 如图, 设 $\angle C = x$,
 $\because \angle BAC : \angle ABC : \angle ACB = 4 : 2 : 1, \therefore \angle BAC = 4x, \angle B = 2x,$
 $\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\therefore \angle 3 = \angle 4 = 2x, \therefore$ 在 $\triangle ABD$

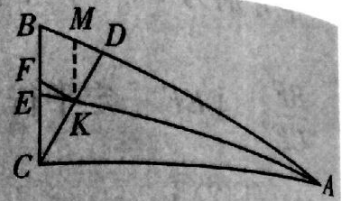
和 $\triangle AED$ 中, $\begin{cases} AB = AE \\ \angle 3 = \angle 4 \\ AD = AD \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle AED (SAS)$

$\therefore DA = DE, \therefore \angle 1 = \angle 2 + \angle C, \angle C = x, \therefore \angle 2 = 2x - x = x$
 $\therefore \angle 2 = \angle C, \therefore DA = EC, \therefore AC = AE + EC = AB + AD, \text{ 即 } AD = AC - AB$



12. (12分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , AE 平分 $\angle BAC$, 交 CD 于 K , 交 BC 于 E , F 是 BE 上一点, 且 $BF = CE$. 求证: $FK \parallel AB$.

证明: 过点 K 作 $MK \parallel BC$ 交 AB 于 M , $\because AE$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAE = \angle CAE$, 又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\therefore \angle BAE + \angle DKA = \angle CAE + \angle CEA = 90^\circ$, $\therefore \angle DKA = \angle CEA$, 又 $\because \angle DKA = \angle CKE$, $\therefore \angle CEA = \angle CKE$, $\therefore CE = CK$, 又 $CE = BF$, $\therefore CK = BF$, 而 $MK \parallel BC$, $\therefore \angle B = \angle AMK$, $\therefore \angle BCD + \angle B = \angle DCA + \angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \angle AMK = \angle DCA$, 在 $\triangle AMK$ 和 $\triangle ACK$ 中, $\therefore \angle AMK = \angle ACK$, $AK = AK$, $\angle MAK = \angle CAK$, $\therefore \triangle AMK \cong \triangle ACK$, $\therefore CK = MK$, $\therefore MK = BF$, 又 $\because MK \parallel BF$, $\therefore$ 四边形 $BFKM$ 是平行四边形, $\therefore FK \parallel AB$.



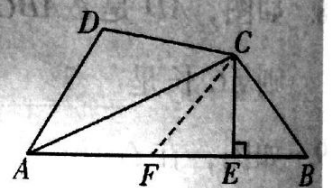
13. (13分) 已知 AC 平分 $\angle DAB$, $CE \perp AB$ 于 E , $AB = AD + 2BE$, 请证明:

(1) $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$;

(2) $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$;

(3) $S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADC}$.

解: (1) 在 AE 取点 F , 使 $EF = BE$. $\because AB = AD + 2BE = AF + EF + BE$, $EF = BE$, $\therefore AB = AD + 2BE = AF + 2BE$, $\therefore AD = AF$, $\therefore AB + AD = AF + EF + BE + AD = 2AF + 2EF = 2(AF + EF) = 2AE$, $\therefore AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$. (2) 在 AB 上取点 F , 使



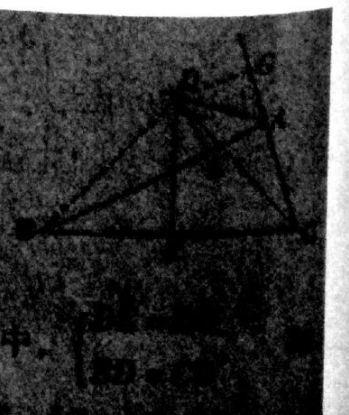
$BE = EF$, 连接 CF . 在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACF$ 中, $\because AD = AF$, $\angle DAC = \angle FAC$, $AC = AC$, $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ACF$, $\therefore \angle ADC = \angle AFC$. $\because CE$ 垂直平分 BF , $\therefore CF = CB$, $\therefore \angle CFB = \angle B$. 又 $\because \angle AFC + \angle CFB = 180^\circ$, $\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ$, $\therefore \angle DAB + \angle DCB = 360 - (\angle ADC + \angle B) = 180^\circ$. (3) 易证 $\triangle CEF \cong \triangle CEB$, $\therefore S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle FCE} = S_{\triangle ACF}$, 又 $\because \triangle ACD \cong \triangle ACF$, $\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ADC}$, $\therefore S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADC}$.

14. (13分) 如图, $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线 DF 交 $\triangle BAC$ 的外角平分线 AD 于 D , F 为垂足, $DE \perp AB$ 于 E , 且 $AB > AC$, 求证: $BE - AC = AE$.

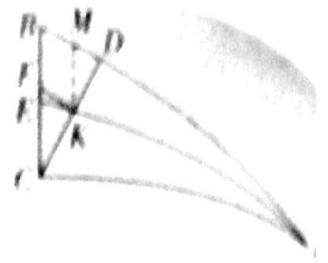
解: 作 $DG \perp AC$, 连接 BD , CD , $\because AD$ 是外角 $\angle BAC$ 的平分线, $DE \perp AB$, $\therefore \angle DAE = \angle DAG$, 则在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} \angle DEA = \angle DGA \\ \angle DAE = \angle DAG \\ AD = AD \end{cases} \therefore \triangle ADE \cong \triangle ADG (\text{AAS}), \therefore AE = AG, DE = DG$$

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 和 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中, $\begin{cases} DE = DG \\ BD = CD \end{cases}$



证明：过点A作MA⊥BC交AB于M，∵AE平分∠BAC，
 $\therefore \angle BAE = \angle CAE$ ，又 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $\therefore \angle BAE + \angle DKA = \angle CAE + \angle CKA = 90^\circ$ ， $\therefore \angle DKA = \angle CKA$ ，又 $\angle DKA = \angle CKA$ ， $\therefore \angle CEA = \angle CAE$ ， $\therefore CE = CK$ ，又 $CE = BF$ ， $\therefore CK = BF$ ，而 $MA \parallel BC$ ， $\therefore \angle B = \angle AMK$ ， $\therefore \angle BCD + \angle B = \angle DCA + \angle BCD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AMK = \angle DCA$ ，在 $\triangle AMK$ 和 $\triangle ACK$ 中， $\therefore \angle AMK = \angle ACK$ ， $AK = AK$ ， $\angle MAK = \angle CAK$ ， $\therefore \triangle AMK \cong \triangle ACK$ ， $\therefore CK = MK$ ， $\therefore MK = BF$ ，又 $MK \parallel BF$ ， $\therefore$ 四边形BFKM是平行四边形， $\therefore FK \parallel AB$ 。



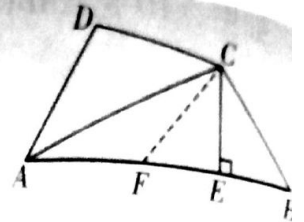
(13分) 已知AC平分 $\angle DAB$ ， $CE \perp AB$ 于E， $AB = AD + 2BE$ ，请证明：

(1) $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$;

(2) $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$;

(3) $S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADC}$ 。

解：(1) 在AE取点F，使 $EF = BE$ ， $\therefore AB = AD + 2BE = AF + EF + BE$ ， $EF = BE$ ， $\therefore AB = AD + 2BE = AF + 2BE$ ， $\therefore AD = AF$ ， $\therefore AB + AD = AF + EF + BE + AD = 2AF + 2EF = 2(AF + EF) = 2AE$ ， $\therefore AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$ 。(2) 在AB上取点F，使

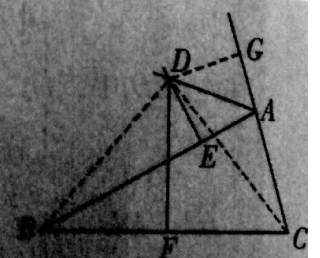


$BE = EF$ ，连接CF。在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACF$ 中， $\therefore AD = AF$ ， $\angle DAC = \angle FAC$ ， $AC = AC$ ， $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ACF$ ， $\therefore \angle ADC = \angle AFC$ 。又 CE 垂直平分 BF ， $\therefore CF = CB$ ， $\therefore \angle CFB = \angle B$ 。又 $\angle AFC + \angle CFB = 180^\circ$ ， $\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ$ ， $\therefore \angle DAB + \angle DCB = 360 - (\angle ADC + \angle B) = 180^\circ$ 。(3) 易证 $\triangle CEF \cong \triangle CEB$ ， $\therefore S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle FCE} = S_{\triangle ACF}$ ，又 $\triangle ACD \cong \triangle ACF$ ， $\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ADC}$ ， $\therefore S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADC}$ 。

(13分) 如图， $\triangle ABC$ 的边BC的中垂线DF交 $\triangle BAC$ 的外角平分线AD于D，F为垂足， $DE \perp AB$ 于E，且 $AB > AC$ ，求证： $BE - AC = AE$ 。

解：作 $DG \perp AC$ ，连接BD，CD， $\therefore AD$ 是外角 $\angle BAG$ 的平分线， $DE \perp AB$ ， $\therefore \angle DAE = \angle DAG$ ，则在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ADG$ 中，

$$\begin{cases} \angle DEA = \angle DGA \\ \angle EAD = \angle GAD, \therefore \triangle ADE \cong \triangle ADG (AAS), \therefore AE = AG, \therefore \\ AD = AD \end{cases}$$



DF是BC的中垂线， $\therefore BD = CD$ ， $\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDG$ ， $\therefore BE = CG$ ， $\therefore BE - AC = AE$ 。