

第十一周 因式分解——公式法

建议用时：60分钟 总分：100分 得分：_____

一、选择题(每题5分,共30分)

1. 多项式分解因式的结果是 $(b^3+2)(2-b^3)$, 那么这个多项式是(**B**)
A. b^6-4 B. $4-b^6$ C. b^6+4 D. $4-b^9$
2. 若 n 为任意整数, $(n+11)^2-n^2$ 的值总可以被 k 整除, 则 k 等于(**A**)
A. 11 B. 22 C. 11或22 D. 11的倍数
3. 把 a^2+2a-b^2-2b 分解因式的结果是(**B**)
A. $(a-b)(a+2)(b+2)$ B. $(a-b)(a+b+2)$
C. $(a-b)(a+b)+2$ D. $(a^2-2b)(b^2-2a)$
4. 若 a, b, c 是三角形三边的长, 则代数式 $a^2+b^2-c^2-2ab$ 的值(**B**)
A. 大于零 B. 小于零
C. 大于或等于零 D. 小于或等于零
5. 不论 x, y 为任何实数, $x^2+y^2-4x-2y+8$ 的值总是(**A**)
A. 正数 B. 负数 C. 非负数 D. 非正数
6. 不论 a, b 为何有理数, $a^2+b^2-2a-4b+c$ 的值总是非负数, 则 c 的最小值是(**B**)
A. 4 B. 5 C. 6 D. 无法确定

二、填空题(每题5分,共15分)

7. 分解因式: $169(a-b)^2-196(a+b)^2 = \underline{-(27a+b)(a+27b)}$.
8. 已知 $a^2+4a+4+|b-3|=0$, 则 $a+b = \underline{1}$.
9. 因式分解: $(x^2+3x-3)(x^2+3x+1)-5 = \underline{(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)}$.

三、解答题(共55分)

10. (10分) 已知 x, y 为正整数, 且 $x^2=y^2+37$, 求 x, y 的值.

解: 要将 $x^2=y^2+37$ 进行变形, 然后运用因式分解中的平方差公式来解决. 由 $x^2=y^2+37$, 得 $x^2-y^2=37$, 所以 $(x+y)(x-y)=37$. 又因为 x, y 为正整数, 所以 $(x+y)(x-y)=37 \times 1$ 且 $x+y > x-y$, 所以当且仅当 $x+y=37, x-y=1$ 时才行. 所以

$$\text{由} \begin{cases} x+y=37, \\ x-y=1. \end{cases} \text{解得 } x=19, y=18.$$

11. (10分) 求证: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是一个完全平方式.

证明: $\because (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 = (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25 = (x^2+5x+5)^2$.

12. (11分) (1) 已知 $2x^3+4x-b$ 的一个因式为 $x-1$, 求 b 值.

(2) 已知: $x+y-2$ 是二元二次式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式, 求 a, b 的值.

解: (1) $\because 2x^3+4x-b$ 的一个因式为 $x-1$, \therefore 当 $x-1=0$ 时, $2x^3+4x-b=0$. 即 $x=1$ 是方程 $2x^3+4x-b=0$ 的一个根, $\therefore 2 \times 1 + 4 \times 1 - b = 0$, $\therefore b=6$.

(2) $\because x+y-2$ 是此多项式的一个因式, \therefore 设 $x^2+axy+by^2-5x+y+6 = k(x+y-2)(k \neq 0)$. 令 $x=$

$1, y=1$ 得, $a+b+3=0$. 令 $x=0, y=2$ 得, $4b+8=0$. 解方程组 $\begin{cases} a+b+3=0, \\ 4b+8=0, \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} a = -1, \\ b = -2. \end{cases}$$

13. (12分) 计算: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)$.

解: 原式 $= \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1-\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right)\left(1-\frac{1}{2016}\right)$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2016}{2015} \times \frac{2014}{2015} \times \frac{2017}{2016} \times \frac{2015}{2016} =$
 $\frac{2017}{2 \times 2016} = \frac{2017}{4032}$

14. (12分) 观察下列分解因式的过程:

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 2ax - 3a^2 \\
 &= x^2 + 2ax + a^2 - 4a^2 \text{ (先加上 } a^2, \text{ 再减去 } a^2) \\
 &= (x + a)^2 - 4a^2 \text{ (运用完全平方公式)} \\
 &= (x + a + 2a)(x + a - 2a) \\
 &= (x + 3a)(x - a)
 \end{aligned}$$

像上面这样通过加减项配出完全平方, 把二次三项式分解因式的方法, 叫作配方法. 请你用配方法分解因式: $x^2 - 4xy + 3y^2$.

解: $x^2 - 4xy + 3y^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 + 3y^2 - 4y^2 = (x - 2y)^2 - y^2 = (x - 2y + y)(x - 2y - y) = (x - y)(x - 3y)$

第十周 因式分解——提公因式法

建议用时：60 分钟 总分：100 分 得分：_____

一、选择题(每题 5 分, 共 30 分)

1. 下列各式的因式分解中正确的是(**D**)

A. $-m^2 + mn - m = -m(m + n - 1)$

C. $3a^2x - 6bx + 3x = 3x(a^2 - 2b)$

B. $9abc - 6a^2b^2 = 3abc(3 - 2ab)$

D. $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2b = \frac{1}{2}ab(a + b)$
2. 观察下列各式：① $2a + b$ 和 $a + b$ ，② $5m(a - b)$ 和 $-a + b$ ，③ $3(a + b)$ 和 $-a - b$ ，④ $x^2 - y^2$ 和 $x^2 + y^2$ 。其中有公因式的是(**B**)

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④
3. 把多项式 $m^2(a - 2) + m(2 - a)$ 分解因式等于(**C**)

A. $(a - 2)(m^2 + m)$

C. $m(a - 2)(m - 1)$

B. $(a - 2)(m^2 - m)$

D. $m(a - 2)(m + 1)$
4. 观察下列各组整式，其中没有公因式的是(**A**)

A. $2a + b$ 和 $a + b$

C. $3(a + b)$ 和 $-a - b$

B. $5m(a - b)$ 和 $-a + b$

D. $2x - 2y$ 和 2
5. 对于任何整数 n ，多项式 $(n + 7)^2 - (n - 3)^2$ 的值都能(**C**)

A. 被 $2n + 4$ 整除

C. 被 20 整除

B. 被 $n + 2$ 整除

D. 被 10 整除和被 $2n + 4$ 整除
6. 下列各个分解因式中正确的是(**D**)

A. $10ab^2c + 6ac^2 + 2ac = 2ac(5b^2 + 3c)$

B. $(a - b)^3 - (b - a)^2 = (a - b)^2(a - b + 1)$

C. $x(b + c - a) - y(a - b - c) - a + b - c = (b + c - a)(x + y - 1)$

D. $(a - 2b)(3a + b) - (2b - a)^2 = (a - 2b)(2a + 3b)$

二、填空题(每题 5 分, 共 15 分)

7. 不论 x 为何值， $x^2 - kx - 15 = (x + 5)(x - 3)$ 该等式均成立，则 k 值为 -2 。
8. 已知 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，则代数式 $6 - 2x^2 + 4x$ 的值是 0 。
9. 观察下列各式： $1^2 + 1 = 1 \times 2$ ； $2^2 + 2 = 2 \times 3$ ； $3^2 + 3 = 3 \times 4$ ；……，请你将猜想到的规

律用自然数 $n(n \geq 1)$ 的式子表示出来 $n^2 + n = n(n + 1)$.

三、解答题(共 55 分)

10. (10 分) 分解因式: $x^2 - 120x + 3\ 456$.

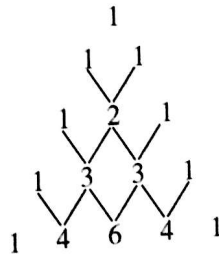
分析: 由于常数项数值较大, 则常采用将 $x^2 - 120x$ 变形为差的平方的形式进行分解, 这样简便易行.

$$\begin{aligned} \text{解: } x^2 - 120x + 3\ 456 &= x^2 - 2 \times 60x + 60^2 - 60^2 + 3\ 456 \\ &= (x - 60)^2 - 144 \\ &= (x - 60)^2 - 12^2 \\ &= (x - 60 + 12)(x - 60 - 12) \\ &= (x - 48)(x - 72). \end{aligned}$$

通过阅读上述题目, 请你按照上面的方法分解因式: $x^2 + 100x + 2\ 275$.

$$\text{解: } x^2 + 100x + 2\ 275 = x^2 + 2 \times 50x + 2\ 500 - 2\ 500 + 2\ 275 = (x + 50)^2 - 225 = (x + 50)^2 - 15^2 = (x + 50 + 15)(x + 50 - 15) = (x + 65)(x + 35).$$

11. (10 分) 图为杨辉三角系数表部分, 它的作用是可以按规律写出形如 $(a + b)^n$ (其中 n 为正整数) 展开式的系数, 请你仔细观察下表中的规律, 填出 $(a + b)^4$ 展开式中所缺的系数.



$$(a + b) = a + b,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + \underline{4} a^3b + \underline{6} a^2b^2 + \underline{4} ab^3 + b^4.$$

解析: 弄清杨辉三角系数中的每一层均是 $a + b$ 的几次方的系数. 第一层为 $(a + b)^0$ 的系数; 第二层为 $(a + b)^1$ 的各项系数, 依次类推, 第五层是 $(a + b)^4$ 的各项系数.

12. (11分) 观察下列各式:

$$15^2 = 1 \times (1+1) \times 100 + 5^2;$$

$$25^2 = 2 \times (2+1) \times 100 + 5^2;$$

$$35^2 = 3 \times (3+1) \times 100 + 5^2;$$

.....

依此规律, 第 n 个等式 (n 为正整数) 为 $(10n+5)^2 = 100n(n+1) + 25$.

13. (12分) 不解方程组 $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-3y=1 \end{cases}$, 求 $7y(x-3y)^2 - 2(3y-x)^3$ 的值.

解: 原式 $= 7y(3y-x)^2 - 2(3y-x)^3 = (3y-x)^2 [7y - 2(3y-x)] = (3y-x)^2 (y+2x)$
 $= (-1)^2 \times 6 = 6$

14. (12分) 观察李强同学把多项式 $(x^2+6x+10)(x^2+6x+8)+1$ 分解因式的过程:

解: 设 $x^2+6x=y$, 则

$$\text{原式} = (y+10)(y+8)+1$$

$$= y^2 + 18y + 81$$

$$= (y+9)^2 = (x^2+6x+9)^2$$

(1) 这位同学的因式分解是否彻底? 若不彻底, 请你直接写出因式分解的最后结果;

(2) 仿照上题解法, 分解因式: $(x^2+4x+1)(x^2+4x-3)+4$.

解: (1) 这位同学的因式分解不彻底, 原式 $= (x^2+6x+9)^2 = (x+3)^4$; (2) 设 $x^2+4x=y$, 则原式 $= (y+1)(y-3)+4 = y^2-2y+1 = (y-1)^2 = (x^2+4x-1)^2$.