第3课时　等腰三角形的判定

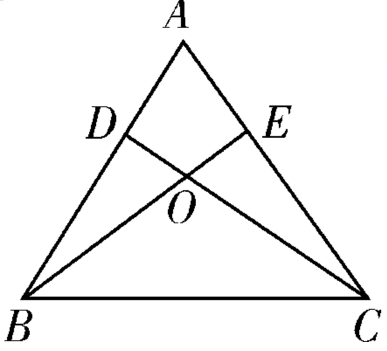
等腰三角形的判定

1．定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形．简单叙述为：等角对等边．

2．在证明时，先假设命题的结论不成立，然后推导出与定义、公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果，从而证明命题的结论一定成立．这种证明方法称为反证法．

典型例题

A. 已知：如图所示，锐角△ABC的两条高BE、CD相交于点O，且OB＝OC. 求证：△ABC是等腰三角形.



证明：∵OB＝OC，

∴∠OBC＝∠OCB.

∵CD，BE是两条高，

∴∠BDC＝∠CEB＝90°.

又∵BC＝CB，

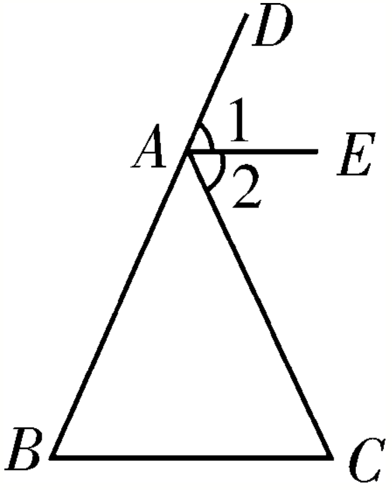
∴△BDC≌△CEB(AAS).

∴∠DBC＝∠ECB，∴AB＝AC，

∴△ABC是等腰三角形.

变式训练

1. 如图所示，已知AE∥BC，AE平分∠DAC. 求证：AB＝AC.



证明：∵AE平分∠DAC，

∴∠1＝∠2.

∵AE∥BC，

∴∠1＝∠B，∠2＝∠C.

∴∠B＝∠C.

∴AB＝AC.

典型例题

B.用反证法证明命题：如果AB⊥CD，AB⊥EF，那么CD∥EF，证明的第一个步骤是（　　）

A．假设CD∥EF

B．假设AB∥EF

C．假设CD和EF不平行

D．假设AB和EF不平行

答案：C

变式训练

2. 用反证法证明命题："如果AB∥CD，AB∥EF，那么CD∥EF."证明的第一个步骤应是(　　)

A. 假定CD∥EF

B. 假定CD不平行于EF

C. 假定AB∥EF

D. 假定AB不平行于EF.

答案：B

典型例题

C. 用反证法证明：四边形的四个内角不能都是锐角. 已知：四边形ABCD.求证：∠A，∠B，∠C，∠D不能都是锐角.

证明：假设四边形有四个内角都是锐角.

∵∠A，∠B，∠C，∠D是锐角.

∴∠A＋∠B＋∠C＋∠D<360°.这与“四边形的内角和是360°”相矛盾，

∴假设不成立，

∴四边形的四个内角不能都是锐角.

变式训练

3. 填空：在△ABC中，若∠C是直角，那么∠B一定是锐角.

证明：假设结论不成立的，则∠B是_____或______.

①当∠B是_______时，则_______，这与_______矛盾；

②当∠B是_______时，则_______，这与_______矛盾.

综上所述，假设不成立. ∴∠B一定是锐角.

答案：直角，钝角. ①直角　∠A＋∠B＋∠C＞180°　三角形内角和180°　②钝角　∠A＋∠B＋∠C＞180°　三角形内角和180°

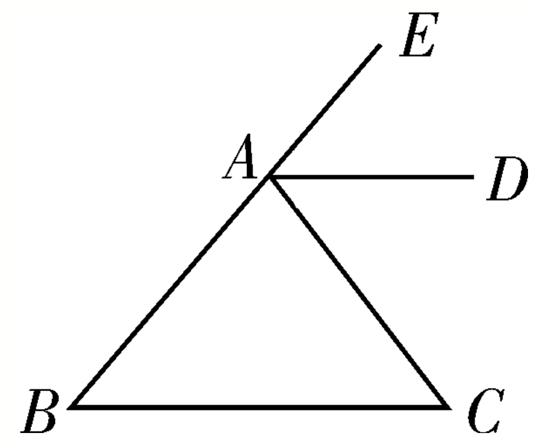
夯实基础

4. 用反证法证明“若 $|a|<2$，则 $a^2<4$”时，应第一步假设______________________.

答案：$a^2\geq4$

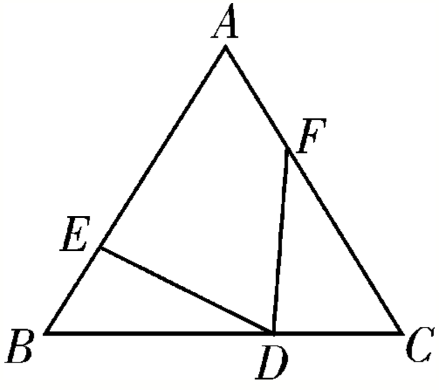
夯实基础

5. 如图所示，已知AD是△ABC的外角平分线，且AD∥BC，则△ABC是__________三角形.



答案：等腰

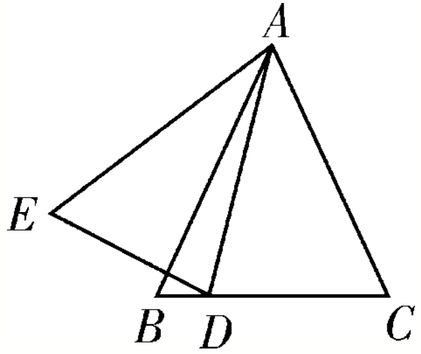
6. 如图所示，在△ABC中，AB＝AC，BE＝CD，BD＝CF，若∠B＝50°，则∠EDF的度数为________.



答案：50°

夯实基础

7. 已知：如图所示，在△ABC中，D为BC上的一点，AD平分∠EDC，且∠E＝∠B，DE＝DC，求证：AB＝AC.



证明：∵AD平分∠EDC，

∴∠ADE＝∠ADC，

∵DE＝DC，AD＝AD，

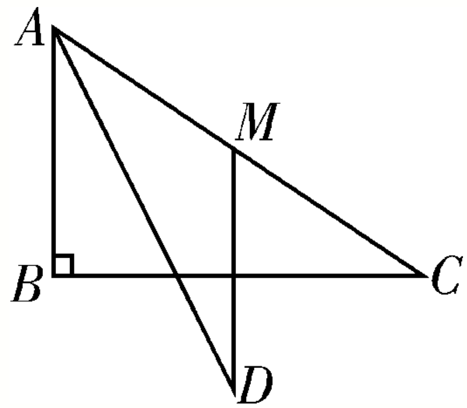
∴△AED≌△ADC. ∴∠C＝∠E.

∵∠E＝∠B，

∴∠C＝∠B，

∴AB＝AC

8.如图所示，在△ABC中，∠B＝90°，M是AC上任意一点(M与A不重合)MD⊥BC，交∠BAC的平分线于点D，求证：MD＝MA.



证明略

夯实基础

9. 用反证法证明同一三角形中至少有两个锐角，证明时应假设__________.

答案：同一三角形中最多有一个锐角

夯实基础

10．下面命题不正确的是(　　).

A．两个内角分别是50°和65°的三角形是等腰三角形

B．两个外角相等的三角形是等腰三角形

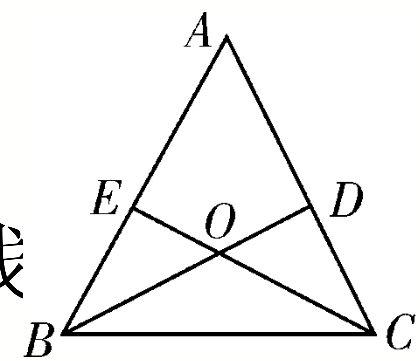
C．一个外角的平分线平行于一边的三角形是等腰三角形

D．两个内角不相等的三角形不是等腰三角形

答案：D

夯实基础

11．已知：如图所示，锐角△ABC的两条高BD，CE相交于点O，且OB＝OC，



(1)求证：△ABC是等腰三角形；

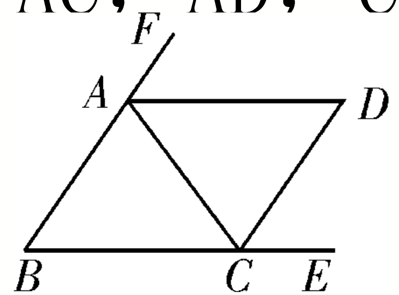
(2)判断点O是否在∠BAC的角平分线上，并说明理由．

答案：(1)∵OB＝OC，∴∠OBC＝∠OCB．∵锐角△ABC的两条高BD，CE相交于点O，∴∠BEC＝∠BDC＝90°，∵∠BEC＋∠BCE＋∠ABC＝∠BDC＋∠DBC＋∠ACB＝180°，∴∠ABC＝∠ACB，∴AB＝AC，∴△ABC是等腰三角形．

(2)连接AO并延长交BC于F，∵AB＝AC，OB＝OC，∴AF是BC的垂直平分线，∴∠BAF＝∠CAF，∴点O在∠BAC的角平分线上．

夯实基础

12．如图所示，△ABC中，AB＝AC，AD，CD分别是△ABC两个外角的平分线.



(1)求证：AC＝AD；

(2)若∠B＝60°，求证：四边形ABCD是菱形.

证明：(1)∵AB＝AC，∴∠B＝∠BCA.∵∠FAC是△ABC的外角，∴∠FAC＝∠B＋∠BCA.∵AD平分∠FAC，∴∠FAD＝∠B，∴AD∥BC.∴∠D＝∠DCE.∵CD平分∠ACE，∴∠ACD＝∠DCE.∴∠D＝∠ACD，∴AC＝AD.　(2)∵∠B＝60°，AB＝AC，∴△ABC为等边三角形，∴AB＝BC.∴∠ACB＝60°.∠FAC＝∠ACE＝120°，∴∠BAD＝∠BCD＝120°，∴∠B＝∠D＝60°，∴四边形ABCD是平行四边形.∵AB＝BC，∴平行四边形ABCD是菱形.