第42课时　分式方程（2）

知识归纳

1．解分式方程的基本思路是将分式方程化为整式方程，具体做法是“去分母”，即方程两边同乘以最简公分母.

2．一般地，解分式方程时，去分母所得整式方程的解有可能使原方程中分母为0，因此应作如下检验：将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解就不是原分式方程的解(即原方程的增根).

典型例题

A. 解方程：$\dfrac{100}{x}=\dfrac{30}{x-7}$.

解：方程两边同乘以x(x－7)，约去分母，得

$100(x-7)=30x$.

解这个整式方程，得　$x=10$.

检验：把x＝10代入x(x－7)，得

$10\times(10-7)\neq 0$

所以x＝10是原分式方程的解.

变式训练

1．解方程：

(1)$\frac{4}{x-1}=1$；

(2)$\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x}$.

答案：(1)5

(2)方程两边同时乘以x(x－2)，

得x＝3(x－2)，解得x＝3.

检验：把x＝3代入x(x－2)，

得x(x－2)＝3≠0，

所以x＝3是原方程的解.

典型例题

B.解方程：$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$.

解：方程两边同乘以$(x+1)(x-1)$，

约去分母，得$x+1=2$.

解这个整式方程，得$x=1$.

检验：把$x=1$代入$(x+1)(x-1)$，得

$(1+1)\times(1-1)=0$.

所以，$x=1$不是原分式方程的解，原分式方程无解.

变式训练

2.解方程:

(1) $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2x-2}$;　　(2) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{1-x}{2-x}$.

答案：(1)无解　(2)无解

典型例题

C.解方程：$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$.

解：方程两边同乘$(x+1)(x-1)$，得

$2(x-1)+3(x+1)=6$.化简，得

$5x+1=6$.解得$x=1$.

检验：$x=1$时$(x+1)(x-1)=0$，

$x=1$不是原方程的解，原分式方程无解.

变式训练

3.解分式方程：$\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

解：两边同乘以$(x+3)(x-3)$，

得$3(x+3)-(x-3)=18$，

$3x-x=18-3-9$，$x=3$.

检验：把$x=3$代入原方程，左边分母$(x-3)=3-3=0$，$\therefore x=3$为原方程的增根.

$\therefore$原方程无解.

4．解分式方程$\frac{1}{2x}-\frac{3x+1}{x}=3$，去分母后所得的方程是(　　)

A．$1-2(3x+1)=3$　　B．$1-2(3x+1)=2x$

C．$1-2(3x+1)=6x$　　D．$1-6x+2=6x$

答案：C

夯实基础

5. 要使分式$\frac{1+x}{5+x}$的值为$\frac{1}{3}$，则 x 的值为______.

答案：1

夯实基础

6. 若分式方程$\frac{x+2}{x+3}=\frac{m}{x+3}$有增根，则增根是________，此时 m＝________.

答案：x＝－3　－1

解：方程两边同乘以(x＋3)，得x＋2＝m.

解这个方程，得x＝m－2，

因为分式方程有增根，所以增根是x＝－3.

所以－3＝m－2，解得m＝－1.

所以增根是x＝－3，此时m＝－1.

夯实基础

7．解方程：

(1) $\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{3}{x+1}$；　(2) $\dfrac{x}{2x-5}+\dfrac{5}{5-2x}=1$；

(3) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{2x}{x-1}=-1$；　(4) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-1}+1=\dfrac{2x}{x+1}$.

解：(1) $\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{3}{x+1}$，$5(x+1)=3(x-1)$，

$5x+5=3x-3$，$2x=-8$，$x=-4$.

检验：将 $x=-4$ 代入原方程，左边＝右边＝－1，

所以 $x=-4$ 是原方程的根.

（2）方程两边同乘 $2x-5$，得 $x-5=2x-5$.

解得 $x=0$.

检验：$x=0$ 时 $2x-5\neq0$，0 是原分式方程的解.

(3) $x=\dfrac{1}{3}$　(4) $x=-\dfrac{1}{2}$

拓展提升

8．解方程：

(1) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}=1$；

(2) $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x+5}{x^2-x}$；

(3) $\dfrac{1}{6x-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{1-3x}$.

答案：(1)无解 (2)无解 (3)$x=-\dfrac{2}{3}$

拓展提升

9. 关于x的方程$\frac{x-2}{x-3}=\frac{m}{x-3}$产生增根，则m的值是(　　)

A. －1　　B. 1　　C. 3　　D. 2

答案：B

解：从方程的形式来看，增根只能是3，因此只要把分式方程化为整式方程后，把增根代入就可以求出m的值，具体解法为：方程两边同时乘以x－3，得m＝x－2. 从方程的形式来看，增根只能是3，把x＝3代入上式，得m＝1.

拓展提升

10. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则分式$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值为________.

解：化简$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，得$x-y=-3xy$，

$\because \frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$，变形得，$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}$.

把$x-y=-3xy$代入上式得：

$$\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{2\times(-3xy)+3xy}{(-3xy)-2xy}=\frac{-3xy}{-5xy}=\frac{3}{5}.$$

拓展提升

11．k为何值时，方程$\frac{x}{x-3}-4=\frac{k}{x-3}$会产生增根？

解：去分母，得$x-4(x-3)=k$，$\therefore x=\frac{12-k}{3}$.

当$x=3$时，方程会产生增根，

$\therefore \frac{12-k}{3}=3$.　　$\therefore k=3$.