

### 第十三周 分式方程的加减乘除法

建议用时：60 分钟 总分：100 分 得分：\_\_\_\_\_

#### 一、选择题(每题 5 分, 共 30 分)

- 使代数式  $\frac{x+3}{x-3} \div \frac{x+2}{x-4}$  有意义的  $x$  的值是( **D** )
  - A.  $x \neq 3$  且  $x \neq -2$
  - B.  $x \neq 3$  且  $x \neq 4$
  - C.  $x \neq 3$  且  $x \neq -3$
  - D.  $x \neq -2$  且  $x \neq 3$  且  $x \neq 4$
- 桶中装有液状纯农药  $a$  升, 刚好一满桶, 第一次倒出 8 升后用水加满, 第二次又倒出混合药 4 升, 则这 4 升混合药液中的含药量为( **B** ) 升
  - A.  $\frac{32}{a}$
  - B.  $\frac{4(a-8)}{a}$
  - C.  $\frac{4}{a-8}$
  - D.  $\frac{4(a-8)}{a^2}$
- 下列计算正确的是( **D** )
  - A.  $\frac{2}{m} + \frac{1}{-m} = \frac{3}{m}$
  - B.  $\frac{2}{y+2} - \frac{1+y}{2+y} = \frac{1+y}{y+2}$
  - C.  $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a} = 1$
  - D.  $\frac{a}{(a-b)^2} - \frac{b}{(b-a)^2} = \frac{1}{a-b}$
- 如果分式  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ , 那么  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  的值( **B** )
  - A. 1
  - B. -1
  - C. 2
  - D. -2
- 已知:  $n > 1$ ,  $M = \frac{n}{n-1}$ ,  $N = \frac{n-1}{n}$ ,  $P = \frac{n}{n+1}$ , 则  $M, N, P$  的大小关系为( **B** )
  - A.  $M > N > P$
  - B.  $M > P > N$
  - C.  $P > N > M$
  - D.  $P > M > N$
- 化简  $(x - \frac{2x-1}{x}) \div (1 - \frac{1}{x})$  的结果是( **D** )
  - A.  $\frac{1}{x}$
  - B.  $\frac{x}{x-1}$
  - C.  $\frac{x-1}{x}$
  - D.  $x-1$

#### 二、填空题(每题 5 分, 共 15 分)

- 若  $\frac{(a-3)x}{(3-a)(1-x)} = \frac{x}{x-1}$  成立, 则  $a$  的取值范围是  **$a \neq 3$** .
- 一项工程, 甲单独做  $x$  小时完成, 乙单独做  $y$  小时完成, 则两人一起完成这项工程需要  小时.

- 若记  $y = f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , 其中  $f(1)$  表示当  $x=1$  时  $y$  的值, 即  $f(1) = \frac{1^2}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ ;  $f(\frac{1}{2})$  表

示当  $x = \frac{1}{2}$  时  $y$  的值, 即  $f(\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5}$ ; ..... 则  $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f$

$f(\frac{1}{x}) = \frac{(\frac{1}{x})^2}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{x^2+1}$   
 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$   
 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$

$f(1) = \frac{1}{2}$   
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$

$$\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f(2017) + f\left(\frac{1}{2017}\right) = \underline{1008}$$

## 三、解答题(共55分)

10. (10分)任何一个单位分数 $\frac{1}{n}$ 都可以写成两个单位分数的和: $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ( $n, p, q$ 都是正整数),显然,这里的 $p, q$ 都大于 $n$ .如果设 $p = n + a, q = n + b$ ,那么有 $\frac{1}{n} =$

$$\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b}$$

(1)探索上式中的正整数 $a, b$ 与正整数 $n$ 之间存在什么样的关系(写出推理过程);

(2)写出 $\frac{1}{6}$ 等于两个单位分数之和的所有可能情况.

解: (1)  $\because \frac{1}{n} = \frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b}, \therefore (n+a)(n+b) = n(n+a) + n(n+b), \therefore n^2 + nb + an + ab = n^2 + na + n^2 + nb, \therefore ab = n^2$ ; (2) 由(1)知  $ab = n^2, n = 6, \therefore ab = 36, \therefore a = 1, 2, 3, 4, 6; \therefore$  相对应的  $b = 36, 18, 12, 9, 6, \therefore \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ .

11. (10分)某项工程,甲单独做所需天数是乙、丙两队合作所需的天数的 $a$ 倍;乙独做所需的天数等于甲、丙两队合作所需的天数的 $b$ 倍;丙独做所用的天数等于甲、乙两队合作所需天数的 $c$ 倍.求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$ 的值.

解: 设甲、乙、丙三队独做所需的天数分别为 $x, y, z$ 天. 则  $x = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{ayz}{y+z}$ ,

得  $a+1 = \frac{xy+yz+xz}{yz}, \frac{1}{a+1} = \frac{yz}{xy+yz+xz}$ . 同理  $\frac{1}{b+1} = \frac{xz}{xy+xz+yz}, \frac{1}{c+1} = \frac{xy}{xy+yz+xz}$ .

故原式 = 1

12. (11分)已知:  $3a - 2b = 0$ , 求代数式的值:  $\left(1 + \frac{b}{a} - \frac{a}{a-b}\right) \div \left(1 - \frac{b}{a} - \frac{a}{a+b}\right)$ .

解: 原式 =  $\frac{a(a-b) + b(a-b) - a^2}{a(a-b)} \div \frac{a(a+b) - b(a+b) - a^2}{a(a+b)} = \frac{-b^2}{a(a-b)} \div \frac{-b^2}{a(a+b)}$

$= \frac{a+b}{a-b}$  当  $3a - 2b = 0$  时,  $b = \frac{3}{2}a, \therefore$  原式 =  $\frac{a + \frac{3}{2}a}{a - \frac{3}{2}a} = -5$

13. (12分) 观察下列各式:

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \dots$$

(1) 填空:  $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

(2) 计算:  $\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{2015 \times 2016}$

解: (1)  $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ . (2) 原式 =  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2016} = \frac{671}{2016}$

14. (12分) 阅读下列材料:

$$\because \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{17 \times 19} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{19}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{18}{19} = \frac{9}{19} \end{aligned}$$

上面求和的方法是通过逆用分数减法法则, 将和式中各分数转化为两个实数之差, 使得除首末两项外的中间各项可以相互抵消, 从而达到求和的目的. 通过阅读, 你一定学会了一种解决问题的方法, 请你用学到的方法计算:

$$\frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \dots + \frac{1}{(x+15)(x+18)}$$

解:  $\because \frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right), \quad \frac{1}{(x+3)(x+6)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}\right) \dots$   
 $\frac{1}{(x+15)(x+18)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+15} - \frac{1}{x+18}\right) \therefore$  原式 =  $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}\right)$   
 $+ \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+15} - \frac{1}{x+18}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} + \dots + \frac{1}{x+15} - \frac{1}{x+18} = \frac{1}{3}$   
 $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+18}\right) = \frac{x+18-x}{3x(x+18)} = \frac{6}{x(x+18)} = \frac{6}{x^2+18x}$