

第五周 不等式

建议用时：60 分钟 总分：100 分 得分：_____

一、选择题(每题 5 分, 共 30 分)

- 如果 $a+b < 0$, 且 $b > 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系为(**D**)
 - A. $a < b < -a < -b$
 - B. $-b < a < -a < b$
 - C. $a < -b < -a < b$
 - D. $a < -b < b < -a$
- 由不等式 $ax > b$ 可以推出 $x < \frac{b}{a}$, 那么 a 的取值范围是(**B**)
 - A. $a \leq 0$
 - B. $a < 0$
 - C. $a \geq 0$
 - D. $a > 0$
- 已知 a, b, c, d 都是正实数, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. 给出下列四个不等式: ① $\frac{a}{a+b} < \frac{c}{c+d}$; ② $\frac{c}{c+d} < \frac{a}{a+b}$; ③ $\frac{d}{c+d} < \frac{b}{a+b}$; ④ $\frac{b}{a+b} < \frac{d}{c+d}$; 其中不等式正确的是(**A**)
 - A. ①③
 - B. ①④
 - C. ②④
 - D. ②③
- 已知有理数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示, 则下列式子正确的是(**A**)

$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}}$
 $\begin{matrix} c & b & 0 & a \end{matrix}$

 - A. $cb > ab$
 - B. $ac > ab$
 - C. $cb < ab$
 - D. $c+b > a+b$
- 下列说法中, 错误的是(**C**)
 - A. 不等式 $x < 5$ 的整数解有无数多个
 - B. 不等式 $x > -5$ 的负数解有无限个
 - C. 不等式 $-2x < 8$ 的解集是 $x < -4$
 - D. -40 是不等式 $2x < -8$ 的一个解
- 无论 x 取什么数, 下列不等式总成立的是(**D**)
 - A. $x+5 > 0$
 - B. $x+5 < 0$
 - C. $-(x-5)^2 < 0$
 - D. $(x-5)^2 \geq 0$

二、填空题(每题 5 分, 共 15 分)

- 若 $0 < a < 1$, 用“ $<$ ”连接 $a, 1, \frac{1}{a}$, 结果为 $a < 1 < \frac{1}{a}$.
- 当 x 时, 代数式 $2x - 3$ 的值是正数.
- 不等式 $-2x < 8$ 的负整数解的和是 -6 .

DBAACD /

三、解答题(共 55 分)

10. (10 分)比较下面每小题中两个算式结果的大小(在横线上选填“>”“<”或“=”).

$$(1) 3^2 + 4^2 \quad \underline{>} \quad 2 \times 3 \times 4;$$

$$(2) 2^2 + 2^2 \quad \underline{=} \quad 2 \times 2 \times 2;$$

$$(3) 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \underline{>} \quad 2 \times 1 \times \frac{3}{4};$$

$$(4) (-2)^2 + 5^2 \quad \underline{>} \quad 2 \times (-2) \times 5;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \underline{>} \quad 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}.$$

通过观察上面的算式,请你用字母来表示上面算式中反映的一般规律.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ (当 } a = b \text{ 时取等号)}$$

11. (10 分)有两个分数 $A = \frac{333}{4\,444}$, $B = \frac{4\,444}{55\,555}$, 问: A 与 B 哪个大?

$$\text{解: } \because \frac{1}{B} = \frac{5}{4} \times \frac{11\,111}{1\,111} = \frac{5}{4} \times \left(10 + \frac{1}{1\,111}\right) = 12.5 + \frac{1.25}{1\,111} < 13. \quad \frac{1}{A} = \frac{4}{3} \times \frac{1\,111}{111} = \frac{4}{3} \times \left(10 + \frac{1}{111}\right) = 13.33 + \frac{1.33}{111} > 13. \quad \therefore \frac{1}{A} > \frac{1}{B} > 0, \quad \therefore A < B.$$

12. (10 分) $|2a - 24| + (3a - b - k)^2 = 0$, 那么 k 取什么值时, b 为负数.

$$\text{解: 由题意得: } 2a - 24 = 0, \text{ 即 } a = 12, \quad 3a - b - k = 0, \quad b = 3a - k = 36 - k < 0, \quad k > 36. \quad k \text{ 大于 } 36 \text{ 时 } b \text{ 为负数.}$$

13. (11 分)已知 $0 < x < 1$, 试判断 x^{2014} , x^{2015} , x^{2016} 的大小关系.

$$\text{解: } \because 0 < x < 1, \therefore x^{2014} > 0, \text{ 由不等式的性质 2, 得 } x^{2014} \cdot x < 1 \cdot x^{2014}, \text{ 即 } x^{2015} < x^{2014}, \text{ 同样由不等式的性质 2, 得 } x^{2015} \cdot x < 1 \cdot x^{2015}, \text{ 即 } x^{2016} < x^{2015}, \text{ 所以 } x^{2016} < x^{2015} < x^{2014}.$$

14. (12分) 你能比较 $2\,015^{2\,016}$ 与 $2\,016^{2\,015}$ 的大小吗?

为了解决这个问题, 我们可先探索形如: $n^{(n+1)}$ 和 $(n+1)^n$ 的大小关系 ($n \geq 1$, 自然数).

为探索其规律可从 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 这些简单的情形入手, 从中观察、比较、猜想、归纳并得出结论.

(1) 利用计算器比较下列各组中两个数的大小: (选填“ $<$ ”或“ $>$ ”)

① 1^2 $<$ 2^1 ; ② 2^3 $<$ 3^2 ;

③ 3^4 $>$ 4^3 ; ④ 4^5 $>$ 5^4 ;

⑤ 5^6 $>$ 6^5 .

(2) 试归纳出 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$ 的大小关系是: _____;

(3) 运用归纳出的结论, 试比较 $2\,015^{2\,016}$ 与 $2\,016^{2\,015}$ 的大小.

(2) 经过观察、比较、猜想可归纳出, 当 $n=1, 2$ 时, $n^{n+1} < (n+1)^n$; 当 $n \geq 3$ 时, $n^{n+1} > (n+1)^n$. (3) 根据规律, 当 $n \geq 3$ 时, $n^{n+1} > (n+1)^n$, 得 $2\,015^{2\,016} > 2\,016^{2\,015}$.