# 2023年中考数学复习探究性试题汇编之三角形

## 一．解答题（共15小题）

1．（2023•鄱阳县一模）课本再现

如图1，在等边△$ABC$中，$E$为边$AC$上一点，$D$为$BC$上一点，且$AE=CD$，连接$AD$与$BE$相交于点$F$．

（1）$AD$与$BE$的数量关系是 _____，$AD$与$BE$构成的锐角夹角∠$BFD$的度数是 _____；

深入探究

（2）将图1中的$AD$延长至点$G$，使$FG=BF$，连接$BG$，$CG$，如图2所示．求证：$GA$平分∠$BGC$．（第一问的结论，本问可直接使用）

迁移应用

（3）如图3，在等腰△$ABC$中，$AB=AC$，$D$，$E$分别是边$BC$，$AC$上的点，$AD$与$BE$相交于点$F$．若∠$BAC$=∠$BFD$，且$BF=3AF$，求$\frac{BD}{CD}$值．

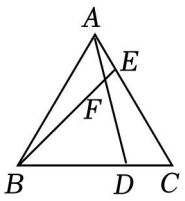


图1

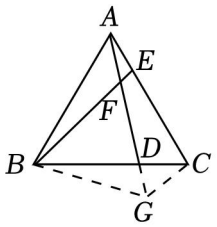


图2

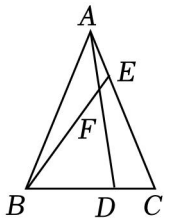


图3

2．（2022秋•香坊区期末）已知：四边形$ABCD$，连接$AC$，$AD=CD$，∠$DAC$=∠$ABC$，∠$DCA$=∠$BAC$，$AD$∥$BC$．

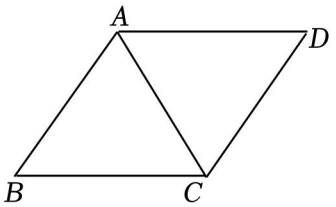


图1

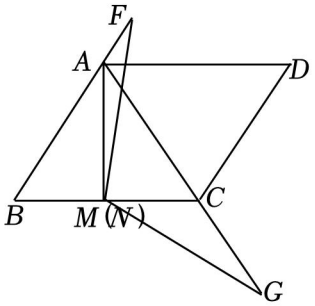


图2

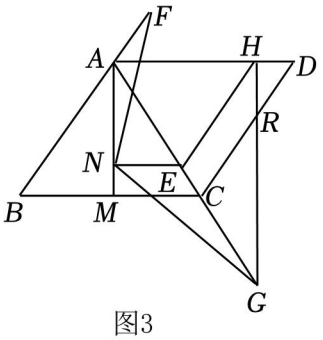


图3

（1）如图1，求证：△$ABC$是等边三角形；

（2）过点$A$作$AM$⊥$BC$于点$M$，点$N$为$AM$上一点（不与点$A$重合），∠$FNG$=120°，∠$FNG$的边$NF$交$BA$的延长线于点$F$，另一边$NG$交$AC$的延长线于点$G$，如图2，点

$N$ 与点 $M$ 重合时，求证：$NF=NG$；

（3）如图 3，在（2）的条件下，点 $N$ 不与点 $M$ 重合，过点 $N$ 作 $NE\perp AM$，交 $AC$ 于点 $E$，$EN$：$CM=3$：4，$AF=3$，$CG=4$，点 $H$ 为 $AD$ 上一点，连接 $EH$、$GH$，$GH$ 交 $CD$ 于点 $R$，$EH=EG$，求 $DR$ 的长．

3．（2022 秋•沙坪坝区校级期末）如图，在△$ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$．在△$BDE$ 中，$DB=DE$，$\angle BDE=90°$．连接 $AD$、$EC$．

（1）如图 1，当点 $D$、$E$、$C$ 在一条直线上时，若$\angle DBE=3\angle EBC$，且 $BD=2$，求 $AC$ 的长；

（2）如图 2，点 $F$ 为 $EC$ 的中点，连接 $DF$．猜想 $AD$ 与 $DF$ 的数量关系，并证明你的猜想；

（3）如图 3，当点 $D$、$E$、$C$ 在一条直线上时，取 $AD$ 的中点 $P$，连接 $BP$．当 $BP$ 取最小值时，请直接写出$\frac{BP}{AC}$的值．

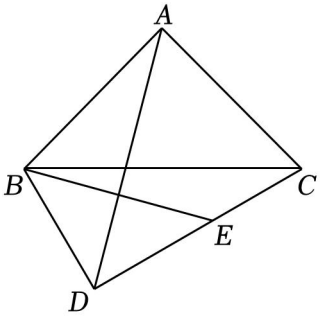


图1

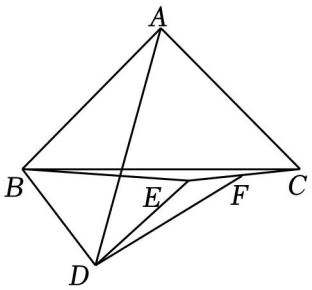


图2

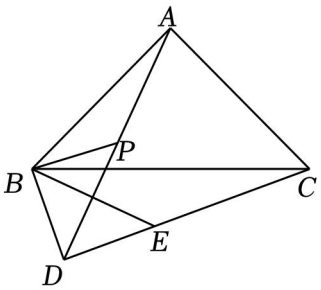


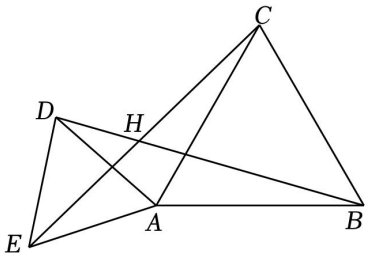
图3

4．（2022 秋•天桥区期末）有共同顶点的△$ABC$ 与△$ADE$ 中，$CA=CB$，$EA=ED$，且$\angle ACB=\angle AED=\alpha$，连接 $BD$，$CE$，线段 $BD$，$CE$ 相交于点 $H$．

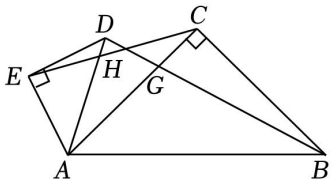
（1）如图①，当$\alpha=60°$时，$\frac{BD}{CE}$的值是 _____，$\angle BHC$ 的度数是 _____；

（2）如图②，当$\alpha=90°$时，求$\frac{BD}{CE}$的值和$\angle BHC$ 的度数，并说明理由；

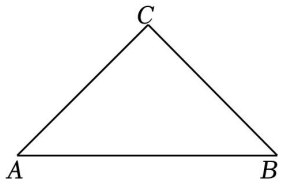
（3）如果$\alpha=90°$，$\frac{AC}{AE}=2$，当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点重合时，请直接写出$\frac{BD}{DE}$的值．



图①



图②



备用图

5．（2022 秋•江岸区期末）已知△*ABC* 是等边三角形．

（1）如图 1，点 *D* 是 *AB* 边的中点，点 *P* 为射线 *AC* 上一动点，当△*CDP* 是轴对称图形时，∠*APD* 的度数为 _____；

（2）如图 2，*AE*∥*BC*，点 *D* 在 *AB* 边上，点 *F* 在射线 *AE* 上，且 *DC*＝*DF*，作 *FG*⊥*AC* 于 *G*，当点 *D* 在 *AB* 边上移动时，请同学们探究线段 *AD*，*AC*，*CG* 之间有什么数量关系，并对结论加以证明；

（3）如图 3，点 *R* 在 *BC* 延长线上，连接 *AR*，*S* 为 *AR* 上一点，*AS*＝*BC*，连接 *BS* 交 *AC* 于 *T*，若 *AT*＝2*n*，*SR*＝*n*，直接写出线段$\frac{CT}{AR}$的值为 _____．

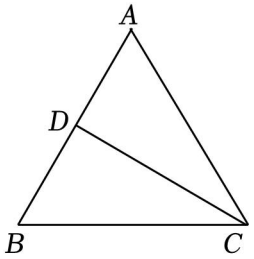


图1

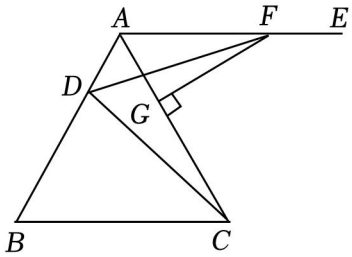


图2

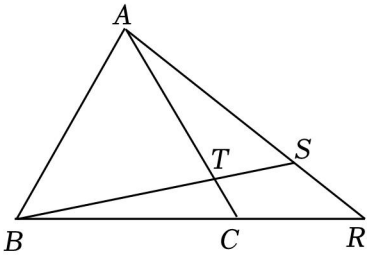


图3

6．（2022 秋•秦淮区期中）【习题再现】

| |
|---|
| （教材 *P*74 第 10 题）如图①，*I* 是△*ABC* 的内心，*AI* 的延长线交△*ABC* 的外接圆于点 *D*．*BD* 和 *ID* 相等吗？为什么？ |

（1）完成原习题；

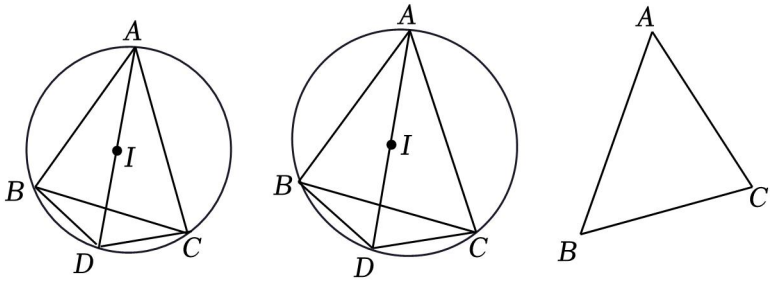
【逆向思考】

（2）如图②，*I* 为△*ABC* 内一点，*AI* 的延长线交△*ABC* 的外接圆于点 *D*．若 *DB*＝*DI*＝*DC*，求证：*I* 为△*ABC* 的内心．

【迁移运用】

（3）如图③，利用无刻度直尺和圆规，作出△*ABC* 的内心 *I*．（保留作图痕迹，写出必

要的文字说明.）




①　　②　　③

7.（2022秋•古冶区期中）如图：在∠$EAF$的平分线上取点$B$作$BC\perp AF$于点$C$，在直线$AC$上取一动点$P$．在直线$AE$上取点$Q$使得$BQ=BP$．

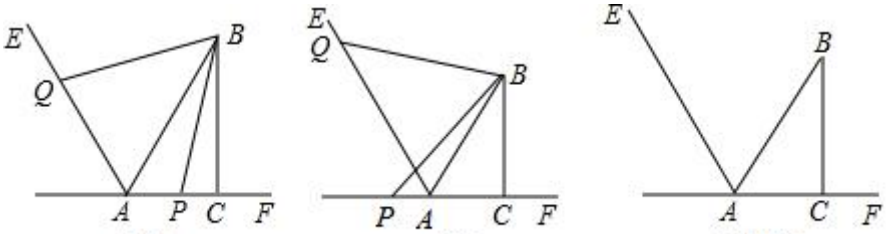



图1　　图2　　备用图

（1）如图1，当点$P$在点线段$AC$上时，∠$BQA$+∠$BPA$=_____°；

（2）如图2，当点$P$在$CA$延长线上时，探究$AQ$、$AP$、$AC$三条线段之间的数量关系，说明理由；

（3）在满足（1）的结论条件下，当点$P$运动到在射线$AC$上时，直接写出$AQ$、$AP$、$PC$三条线段之间的数量关系为：_____．

8.（2022•建湖县一模）在平面直角坐标系中，二次函数$y=x^2+bx+c$的图象过点$C$（0，﹣4）和点$D$（2，﹣6），与$x$轴交于点$A$、$B$（点$A$在点$B$的左边），且点$D$与点$G$关于坐标原点对称．

（1）求该二次函数解析式，并判断点$G$是否在此函数的图象上，并说明理由；

（2）若点$P$为此抛物线上一点，它关于$x$轴，$y$轴的对称点分别为$M$，$N$，问是否存在这样的$P$点使得$M$，$N$恰好都在直线$DG$上？如存在，求出点$P$的坐标，如不存在，请说明理由；

（3）若第四象限有一动点$E$，满足$BE=OB$，过$E$作$EF\perp x$轴于点$F$，设$F$坐标为（$t$，0），$0<t<4$，△$BEF$的内心为$I$，连接$CI$，直接写出$CI$的最小值．

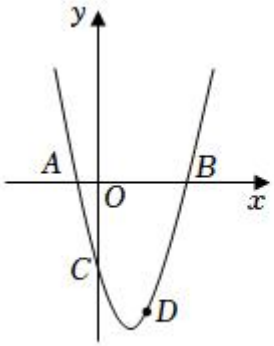


图1

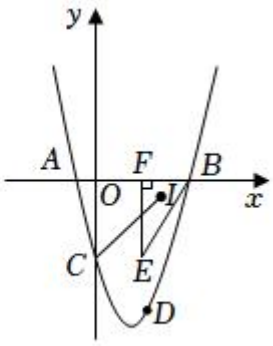


图2

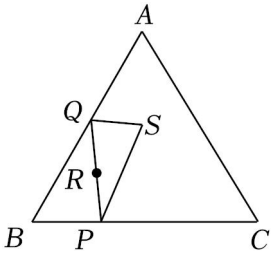
9.（2021秋•朝阳区月考）如图，在锐角△$ABC$中，$AB=BC=5$，△$ABC$的面积为10．点$P$从点$B$出发，以每秒3个单位的速度沿边$BC$向终点$C$运动，当点$P$不与点$B$、$C$重合时，过点$P$作$PQ\perp BC$，与△$ABC$的另一边交于点$Q$，取$PQ$的中点$R$，将线段$QR$绕点$Q$逆时针旋转90°得到线段$QS$，连结$PS$．设点$P$的运动时间为$t$（$s$）．

（1）$BC$边上的高为 _____．

（2）当点$S$落在边$AC$上时，求$t$的值．

（3）当△$PQS$与△$ABC$重叠部分的图形是三角形时，求重叠部分的面积$y$与$t$的函数关系式，并写出$t$的取值范围．

（4）当点$R$落在△$ABC$的高线上时，直接写出$t$的值．




10.（2019秋•高青县期末）如图1，线段$AB$、$CD$相交于点$O$，连接$AD$、$CB$．

（1）请说明：$\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$；

（2）$\angle DAB$的平分线$AP$和$\angle BCD$的平分线$CP$相交于点$P$（如图2），试探索$\angle P$与$\angle D$、$\angle B$之间的数量关系，并请说明理由；

（3）点$M$在$OD$上，点$N$在$OB$上，$AM$与$CN$相交于点$P$，且$\angle DAP=\frac{1}{n}\angle DAB$．$\angle DCP=\frac{1}{n}\angle DCB$，其中$n$为大于1的自然数（如图3）．$\angle P$与$\angle D$、$\angle B$之间又存在着怎样的数量关系？请直接写出你的探索结果，不必说明理由．

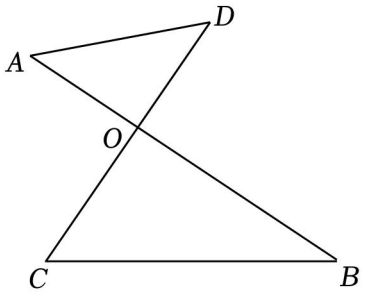



图1

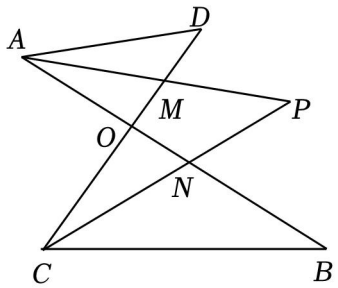



图2

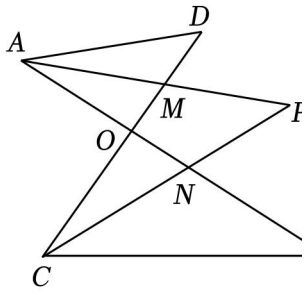



图3

11．（2019秋•陈仓区期末）平面内的两条直线有相交和平行两种位置关系．

（1）如图1，若$AB∥CD$，点$P$在$AB$、$CD$内部，$∠B=50°$，$∠D=30°$，求$∠BPD$．

（2）如图2，将点$P$移到$AB$、$CD$外部，则$∠BPD$、$∠B$、$∠D$之间有何数量关系？请证明你的结论．

（3）如图3，写出$∠BPD$、$∠B$、$∠D$、$∠BQD$之间的数量关系？（不需证明）

（4）如图4，求出$∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F$的度数．

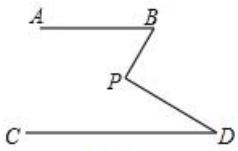



图1

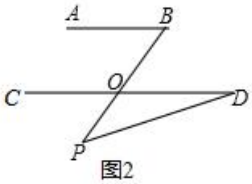



图2

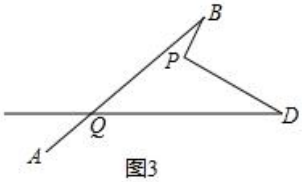



图3

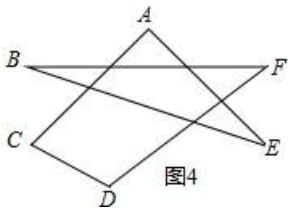



图4

12．（2018秋•兰州期末）探究与发现：如图1所示的图形，像我们常见的学习用品－－圆规．我们不妨把这样图形叫做“规形图”，

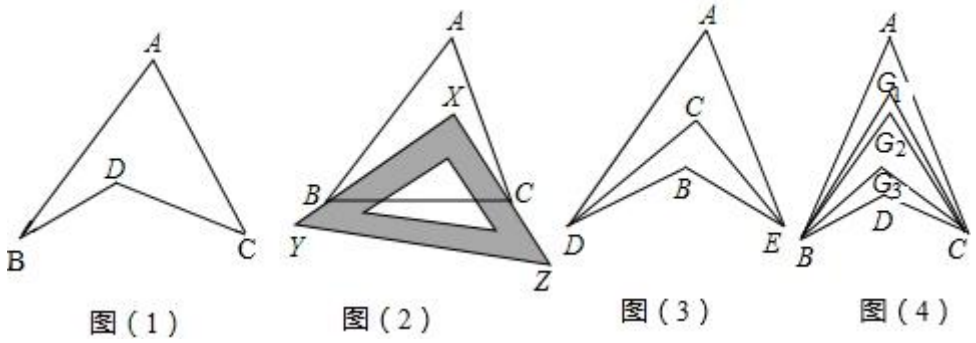
（1）观察“规形图”，试探究$∠BDC$与$∠A$、$∠B$、$∠C$之间的关系，并说明理由；

（2）请你直接利用以上结论，解决以下三个问题：

①如图2，把一块三角尺$XYZ$放置在$△ABC$上，使三角尺的两条直角边$XY$、$XZ$恰好经过点$B$、$C$，$∠A=40°$，则$∠ABX+∠ACX=$_____°；

②如图3，$DC$平分$∠ADB$，$EC$平分$∠AEB$，若$∠DAE=40°$，$∠DBE=130°$，求$∠DCE$的度数；

③如图4，$∠ABD$，$∠ACD$的10等分线相交于点$G_1$、$G_2$…、$G_9$，若$∠BDC=133°$，$∠BG_1C=70°$，求$∠A$的度数．




13．（2017春•鼓楼区校级期中）我们容易证明，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．那么，三角形的一个内角与它不相邻的两个外角的和之间存在怎样的数量关系呢？

尝试探究：

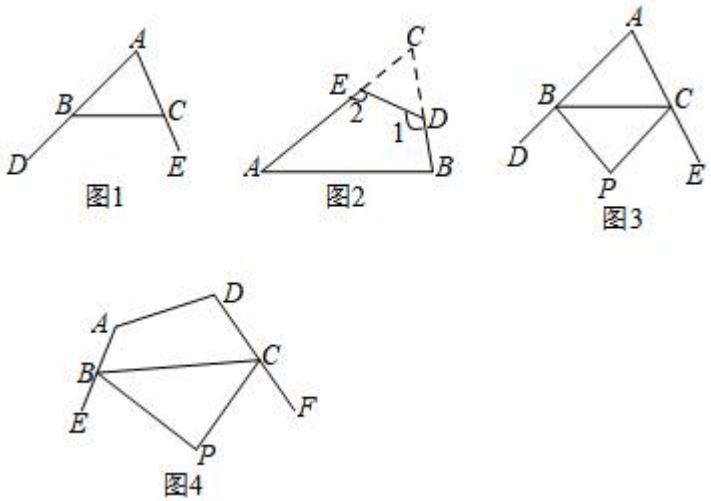
（1）如图1，$\angle DBC$与$\angle ECB$分别为$\triangle ABC$的两个外角，试探究$\angle A$与$\angle DBC+\angle ECB$之间的数量关系．

初步应用：

（2）如图2，在$\triangle ABC$纸片中剪去$\triangle CED$，得到四边形$ABDE$，$\angle 1=135°$，则$\angle 2-\angle C=$_____．

（3）解决问题：如图3，在$\triangle ABC$中，$BP$、$CP$分别平分外角$\angle DBC$、$\angle ECB$，$\angle P$与$\angle A$有何数量关系？请利用上面的结论直接写出答案_____．

（4）如图4，在四边形$ABCD$中，$BP$、$CP$分别平分外角$\angle EBC$、$\angle FCB$，请利用上面的结论探究$\angle P$与$\angle A$、$\angle D$的数量关系．




14．（2017春•亭湖区校级月考）如图1，已知线段$AB$、$CD$相交于点$O$，连接$AC$、$BD$，我们把形如图1的图形称之为“对顶三角形”．如图2，$\angle ACO$和$\angle DBO$的平分线$CP$和

$BP$ 相交于点 $P$，并且与 $AB$、$CD$ 分别相交于 $M$、$N$．试解答下列问题：

（1）仔细观察，在图 2 中有_____个以线段 $OC$ 为边的“对顶三角形”；

（2）在图 2 中，若$\angle A=40°$，$\angle D=50°$，求$\angle P$ 的度数．

（3）在图 2 中，若设$\angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$，$\angle ACP=\angle PCD$，$\angle ABP=\angle PBD$，试问$\angle P$ 与$\angle A$、$\angle D$ 之间存在着怎样的数量关系（用α、β表示$\angle P$），并说明理由；

（4）如图 3，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数为_____．

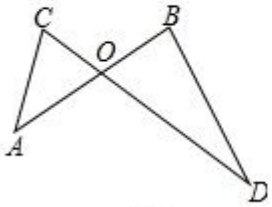


图1

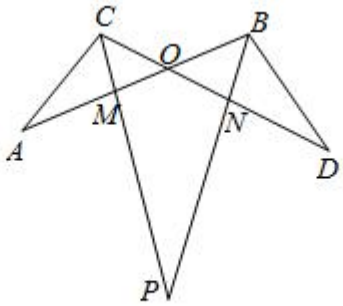


图2

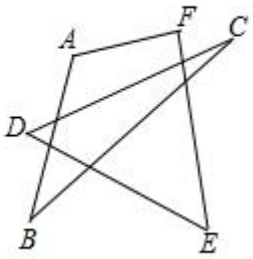


图3

15．（2016 春•盐都区期中）【课本拓展】

我们容易证明，三角形的一个外角等于它不相邻的连个内角的和，那么，三角形的一个内角与它不相邻的两个外角的和之间存在怎样的数量关系呢？

【尝试探究】

（1）如图 1，$\angle DBC$ 与$\angle ECB$ 分别为$\triangle ABC$ 的两个外角，试探究$\angle A$ 与$\angle DBC+\angle ECB$ 之间存在怎样的数量关系？为什么？

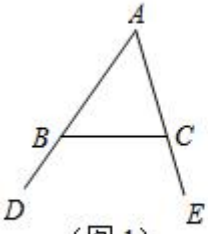
【初步应用】

（2）如图 2，在$\triangle ABCA$ 纸片中剪去$\triangle CED$，得到四边形 $ABDE$，$\angle 1=130°$，则$\angle 2-\angle C=$_____；

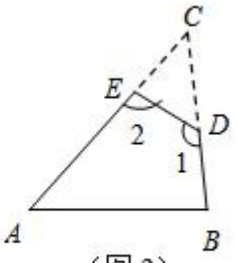
（3）小明联想到了曾经解决的一个问题：如图 3，在$\triangle ABC$ 中，$BP$、$CP$ 分别平分外角$\angle DBC$、$\angle ECB$，$\angle P$ 与$\angle A$ 有何数量关系？请直接写出结论．

【拓展提升】

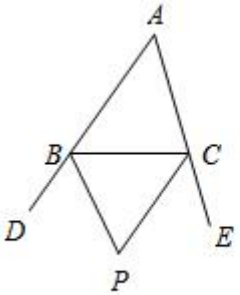
（4）如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，$BP$、$CP$ 分别平分外角$\angle EBC$、$\angle FCB$、$\angle P$ 与$\angle A$、$\angle D$ 有何数量关系？为什么？（若需要利用上面的结论说明，可直接使用，不需说明理由）



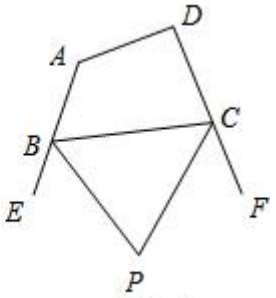
（图 1）



（图 2）



（图 3）



（图 4）

# 2023年中考数学复习探究性试题汇编之三角形

**参考答案与试题解析**

## 一．解答题（共15小题）

1．（2023•鄱阳县一模）课本再现

如图1，在等边△$ABC$中，$E$为边$AC$上一点，$D$为$BC$上一点，且$AE=CD$，连接$AD$与$BE$相交于点$F$．

（1）$AD$与$BE$的数量关系是 <u>$AD=BE$</u>，$AD$与$BE$构成的锐角夹角∠$BFD$的度数是 <u>60°</u>；

深入探究

（2）将图1中的$AD$延长至点$G$，使$FG=BF$，连接$BG$，$CG$，如图2所示．求证：$GA$平分∠$BGC$．（第一问的结论，本问可直接使用）

迁移应用

（3）如图3，在等腰△$ABC$中，$AB=AC$，$D$，$E$分别是边$BC$，$AC$上的点，$AD$与$BE$相交于点$F$．若∠$BAC$=∠$BFD$，且$BF=3AF$，求$\frac{BD}{CD}$值．

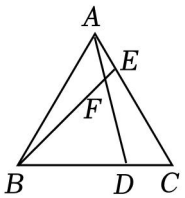


图1

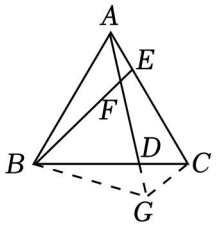


图2

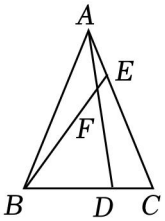


图3

【考点】三角形综合题．

【专题】几何综合题；线段、角、相交线与平行线；三角形；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；图形的相似；运算能力；推理能力．

【分析】（1）证△$ACD$≌△$BAE$（$SAS$）．得$AD=BE$，∠$CAD$=∠$ABE$，再由三角形的外角性质得∠$BFD$=∠$ABE$+∠$BAD$=∠$BAC$=60°即可；

（2）证△$BFG$是等边三角形，得$BF=BG$，∠$FBG$=∠$BGF$=60°，再证△$ABF$≌△$CBG$（$SAS$），得∠$AFB$=∠$CGB$=120°，即可解决问题；

（3）延长$FD$至点$G$，使$FG=BF$，连接$BG$、$CG$，过点$D$作$DM$⊥$BG$于点$M$，$DN$⊥$CG$于点$N$，证△$ABC$∽△$FBG$，得$\frac{AB}{FB}=\frac{BC}{BG}$，∠$ABC$=∠$FBG$，再证△$ABF$∽△$CBG$，

得$\frac{BG}{CG}=\frac{BF}{AF}$=3，∠$BAF$＝∠$BCG$，然后证 $DG$ 平分∠$BGC$，得 $DM$＝$DN$，进而证$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle CGD}}$=3，即可得出结论．

【解答】（1）解：∵△$ABC$ 是等边三角形，

∴$AB$＝$CA$，∠$BAE$＝∠$C$＝60°，

在△$ACD$ 和△$BAE$ 中，

$$\begin{cases}CA=AB\\ \angle C=\angle BAE,\\ CD=AE\end{cases}$$

∴△$ACD$≌△$BAE$（$SAS$）．

∴$AD$＝$BE$，∠$CAD$＝∠$ABE$，

∴∠$BFD$＝∠$ABE$+∠$BAD$＝∠$CAD$+∠$BAD$＝∠$BAC$＝60°，

故答案为：$AD$＝$BE$，60°；

（2）证明：由（1）可知，∠$BFD$＝60°，

∴∠$AFB$＝120°，

∵$FG$＝$BF$，

∴△$BFG$ 是等边三角形，

∴$BF$＝$BG$，∠$FBG$＝∠$BGF$＝60°，

∵△$ABC$ 是等边三角形，

∴$AB$＝$CB$，∠$ABC$＝60°，

∴∠$ABC$＝∠$FBG$，

∴∠$ABC$﹣∠$FBD$＝∠$FBG$﹣∠$FBD$，

即∠$ABF$＝∠$CBG$，

∴△$ABF$≌△$CBG$（$SAS$），

∴∠$AFB$＝∠$CGB$＝120°，

∴∠$CGF$＝∠$CGB$﹣∠$BGF$＝120°﹣60°＝60°，

∴∠$BGF$＝∠$CGF$，

∴$GA$ 平分∠$BGC$；

（3）解：如图 3，延长 $FD$ 至点 $G$，使 $FG$＝$BF$，连接 $BG$、$CG$，过点 $D$ 作 $DM$⊥$BG$ 于点 $M$，$DN$⊥$CG$ 于点 $N$，

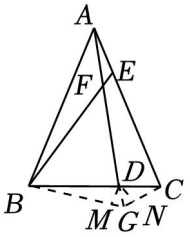


图3

∵$AB=AC$，$FG=BF$，

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{FB}{FG}$，

∵$\angle BAC=\angle BFD$，

∴$\triangle ABC\backsim\triangle FBG$，

∴$\frac{AB}{FB}=\frac{BC}{BG}$，$\angle ABC=\angle FBG$，

∴$\angle ABC-\angle CBE=\angle FBG-\angle CBE$，

即$\angle ABF=\angle CBG$，

∴$\triangle ABF\backsim\triangle CBG$，

∴$\frac{BG}{CG}=\frac{BF}{AF}=3$，$\angle BAF=\angle BCG$，

∵$\angle ADB=\angle CDG$，

∴$\angle CGD=\angle ABD$，

∵$AB=AC$，$FG=BF$，

∴$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle FBG=\angle FGB$，

∵$\angle BAC=\angle BFD$，

∴$\angle BAC=\angle FGB$，

∴$\angle CGD=\angle FGB$，

∴$DG$ 平分$\angle BGC$，

∵$DM\perp BG$，$DN\perp CG$，

∴$DM=DN$，

∵$S_{\triangle BGD}=\frac{1}{2}BG\cdot DM$，$S_{\triangle CGD}=\frac{1}{2}CG\cdot DN$，

∴$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle CGD}}=\frac{\frac{1}{2}BG\cdot DM}{\frac{1}{2}CG\cdot DN}=\frac{BG}{CG}=3$，

又∵$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle CGD}}=\frac{BD}{CD}$，

$\therefore \frac{BD}{CD}=3$.

【点评】本题是三角形综合题目，考查了全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质，角平分线的判定与性质、三角形的外角性质以及三角形面积等知识，本题综合性强，熟练掌握等边三角形的判定与性质和等腰三角形的性质，证明三角形全等和三角形相似是解题的关键，属于中考常考题型.

2.（2022秋•香坊区期末）已知：四边形 $ABCD$，连接 $AC$，$AD=CD$，$\angle DAC=\angle ABC$，$\angle DCA=\angle BAC$，$AD\parallel BC$.

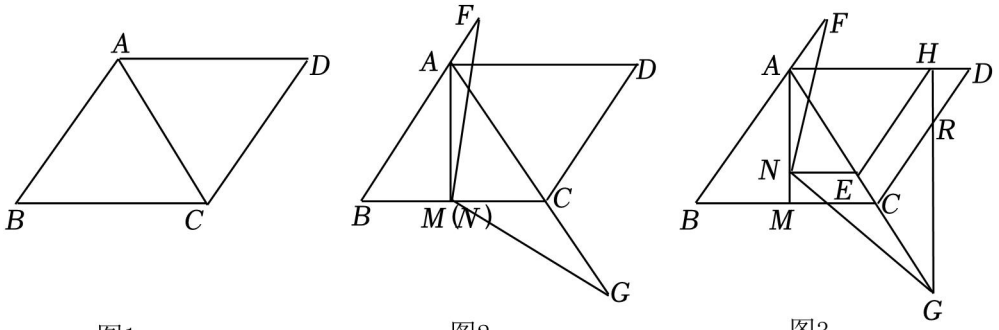



图1　　图2　　图3

（1）如图1，求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形；

（2）过点 $A$ 作 $AM\perp BC$ 于点 $M$，点 $N$ 为 $AM$ 上一点（不与点 $A$ 重合），$\angle FNG=120^\circ$，$\angle FNG$ 的边 $NF$ 交 $BA$ 的延长线于点 $F$，另一边 $NG$ 交 $AC$ 的延长线于点 $G$，如图2，点 $N$ 与点 $M$ 重合时，求证：$NF=NG$；

（3）如图3，在（2）的条件下，点 $N$ 不与点 $M$ 重合，过点 $N$ 作 $NE\perp AM$，交 $AC$ 于点 $E$，$EN$：$CM=3$：4，$AF=3$，$CG=4$，点 $H$ 为 $AD$ 上一点，连接 $EH$、$GH$，$GH$ 交 $CD$ 于点 $R$，$EH=EG$，求 $DR$ 的长.

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；线段、角、相交线与平行线；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；运算能力；推理能力.

【分析】（1）由等腰三角形的性质得 $\angle DCA=\angle DAC$，再证 $\angle ABC=\angle BAC$，然后由平行线的性质得 $\angle DAC=\angle ACB$，得 $\angle ABC=\angle BAC=\angle ACB$，即可得出结论；

（2）取 $AB$ 的中点 $E$，连接 $EM$，证 $\triangle MEF\cong\triangle MCG$（$ASA$），得 $MF=MG$，即 $NF=NG$；

（3）延长 $EN$ 交 $AB$ 于点 $T$，取 $AT$ 的中点 $K$，连接 $KN$，则 $\triangle AET$ 为等边三角形，设 $EN=3k$，则 $CM=4k$，得 $\triangle AET$ 的边长为 $6k$，$\triangle ABC$ 的边长为 $8k$，则 $EC=AC-AE=2k$，

$AK=\frac{1}{2}AT=3k$，同（2）得△$NKF$≌△$NEG$（$ASA$），则 $KF=EG$，即 $3k+3=2k+4$，解得 $k=1$，则 $AE=6$，$EG=EH=6$，再证△$AEH$ 是等边三角形，得 $AH=6$，同（1）得△$ACD$ 是等边三角形，则 $AD=AC=8$，$\angle D=60°$，然后由含 30°角的直角三角形的性质即可得出结论.

【解答】（1）证明：∵$AD=CD$，

∴$\angle DCA=\angle DAC$，

∵$\angle DAC=\angle ABC$，$\angle DCA=\angle BAC$，

∴$\angle ABC=\angle BAC$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAC=\angle ACB$，

∴$\angle ABC=\angle BAC=\angle ACB$，

∴△$ABC$ 是等边三角形；

（2）证明：如图 2，取 $AB$ 的中点 $E$，连接 $EM$，

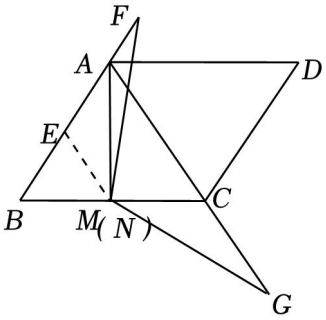



图2

∵△$ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle ABC=\angle ACB=60°$，$AB=BC$，

∴$\angle MCG=120°$，

∵$AM\perp BC$，

∴$\angle BAM=\angle CAM=30°$，$BM=CM=\frac{1}{2}BC$，

∵$E$ 是 $AB$ 的中点，

∴$EM=\frac{1}{2}AB$，

∴$EM=BM=CM$，

∴△$BME$ 是等边三角形，

∴∠$BEM$＝∠$BME$＝60°，

∴∠$MEF$＝∠$EMC$＝120°，

∴∠$MEF$＝∠$MCG$＝120°，

∵∠$FMG$＝120°，

∴∠$EMC$﹣∠$FMC$＝∠$FMG$﹣∠$FMC$，

即∠$EMF$＝∠$CMG$，

∴△$MEF$≌△$MCG$（$ASA$），

∴$MF$＝$MG$，

即 $NF$＝$NG$；

（3）解：如图 3，延长 $EN$ 交 $AB$ 于点 $T$，取 $AT$ 的中点 $K$，连接 $KN$，

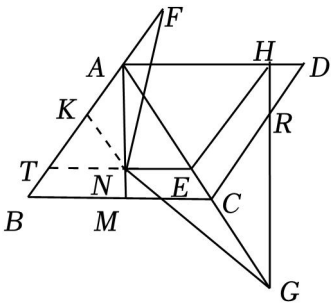



图3

则△$AET$ 为等边三角形，

∵$EN$：$CM$＝3：4，

∴设 $EN$＝3$k$，则 $CM$＝4$k$，

∴△$AET$ 的边长为 6$k$，△$ABC$ 的边长为 8$k$，

∴$EC$＝$AC$﹣$AE$＝2$k$，$AK$＝$\frac{1}{2}AT$＝3$k$，

同（2）得：△$NKF$≌△$NEG$（$ASA$），

∴$KF$＝$EG$，

即 3$k$+3＝2$k$+4，

解得：$k$＝1，

∴$AE$＝6，$EG$＝$EH$＝6，

∴$AE$＝$EH$＝$EG$，

∴∠$EAH$＝∠$EHA$，∠$EGH$＝∠$EHG$，

∵∠$EAH$+∠$EHA$+∠$EHG$+∠$EGH$＝180°，

∴∠$EHA$+∠$EHG$＝∠$AHG$＝90°，

∴∠$DHR$＝90°，

∵∠$CAD$＝∠$ACB$＝60°，

∴△$AEH$ 是等边三角形，

∴$AH$＝6，

同（1）得：△$ACD$ 是等边三角形，

∴$AD$＝$AC$＝8，∠$D$＝60°，

∴∠$HRD$＝90°﹣∠$D$＝30°，$DH$＝$AD$﹣$AH$＝8﹣6＝2，

∴$DR$＝2$DH$＝4．

【点评】本题是四边形综合题目，考查了等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、平行线的性质、含 30°角的直角三角形的性质等知识，本题综合性强，熟练掌握等边三角形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键，属于中考常考题型．

3．（2022 秋•沙坪坝区校级期末）如图，在△$ABC$ 中，$AB$＝$AC$，∠$BAC$＝90°．在△$BDE$ 中，$DB$＝$DE$，∠$BDE$＝90°．连接 $AD$、$EC$．

（1）如图 1，当点 $D$、$E$、$C$ 在一条直线上时，若∠$DBE$＝3∠$EBC$，且 $BD$＝2，求 $AC$ 的长；

（2）如图 2，点 $F$ 为 $EC$ 的中点，连接 $DF$．猜想 $AD$ 与 $DF$ 的数量关系，并证明你的猜想；

（3）如图 3，当点 $D$、$E$、$C$ 在一条直线上时，取 $AD$ 的中点 $P$，连接 $BP$．当 $BP$ 取最小值时，请直接写出$\frac{BP}{AC}$的值．

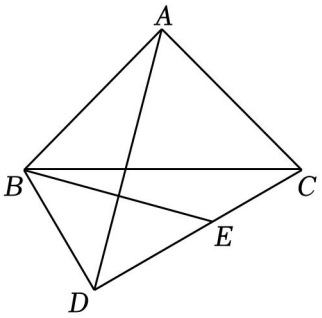


图1

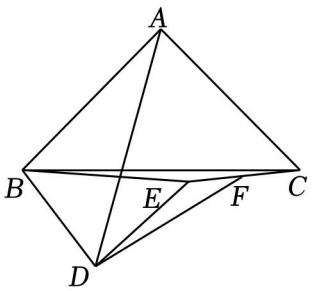


图2

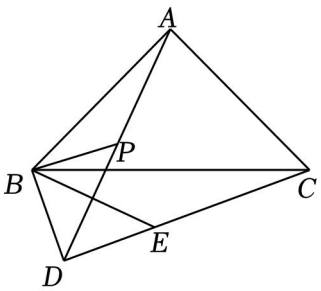


图3

【考点】三角形综合题．

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】（1）根据等腰直角三角形的性质即可解答；

（2）如图 2，连接 $AF$ 并延长到 $H$，使 $FH=AF$，连接 $EH$，$DH$，首先证明△$EFH$≌△$CFA$（$SAS$），可得 $EH=AC$，$\angle HEF=\angle ACF$，再证明△$ABD$≌△$HED$（$SAS$），可得 $AD=HD$，$\angle ADB=\angle HDE$，然后可以证明△$ADH$ 是等腰直角三角形，△$ADF$ 是等腰直角三角形，进而可以得结论；

（3）根据垂线段最短可知：当 $BP\perp AD$ 时，$BP$ 最短，如图 3，证明 $BP$ 是线段 $AD$ 的垂直平分线，得四边形 $ABDE$ 是正方形，进而可以解决问题．

【解答】解：（1）在△$BDE$ 中，$DB=DE$，$\angle BDE=90°$，

∴△$BDE$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle DBE=\angle DEB=45°$，

∵$\angle DBE=3\angle EBC$，

∴$\angle EBC=15°$，

∴$\angle DBC45°+15°=60°$，

∴$\angle BCD=30°$，

∴$BC=2BD=4$，

在△$ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$．

∴△$ABC$ 是等腰直角三角形，

∴$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=2\sqrt{2}$；

（2）$AD=\sqrt{2}DF$，理由如下：

如图 2，连接 $AF$ 并延长到 $H$，使 $FH=AF$，连接 $EH$，$DH$，

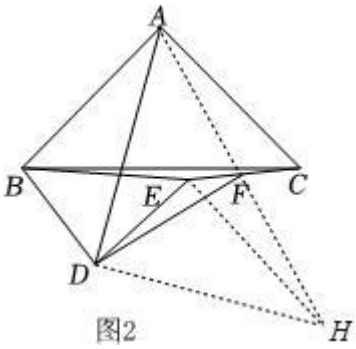


图2

∵点 $F$ 为 $EC$ 的中点，

∴$EF=CF$，

∵∠$EFH$＝∠$CFA$，

∴△$EFH$≌△$CFA$（$SAS$），

∴$EH$＝$AC$，∠$HEF$＝∠$ACF$，

∵∠$ABC$＝∠$ACB$＝∠$DBE$＝∠$DEB$＝45°，

∴∠$ABD$＝90°＋∠$EBC$，

∵∠$HED$＝360°－∠$BED$－∠$HEF$－∠$BEC$＝360°－45°－45°－（180°－∠$EBC$）＝90°＋∠$EBC$，

∴∠$ABD$＝∠$HED$，

∵$AB$＝$AC$，

∴$AB$＝$EH$，

∵$BD$＝$ED$，

∴△$ABD$≌△$HED$（$SAS$），

∴$AD$＝$HD$，∠$ADB$＝∠$HDE$，

∴$HDE$+∠$ADE$＝∠$ADB$+∠$ADE$＝∠$BDE$＝90°，

∴△$ADH$ 是等腰直角三角形，

∵$AF$＝$HF$，$DF$⊥$AF$，

∴$DF$＝$AF$＝$HF$，

∴△$ADF$ 是等腰直角三角形，

∴$AD$= $\sqrt{2}DF$.

（3）当点 $D$、$E$、$C$ 在一条直线上时，取 $AD$ 的中点 $P$，连接 $BP$．此时动点 $D$ 所在直线 $AD$ 是定直线，

根据垂线段最短可知：当 $BP$⊥$AD$ 时，$BP$ 最短，如图 3，

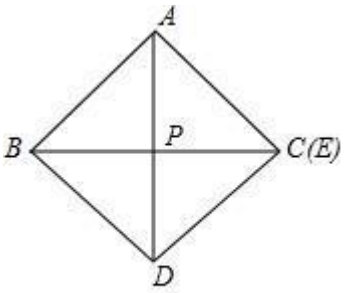



图3

∵$AD$ 的中点 $P$，

∴$BP$ 是线段 $AD$ 的垂直平分线，

∴$AB=BD=DE=CA$，

∴点 $C$ 与点 $E$ 重合，

∴四边形 $ABDE$ 是正方形，

∴$AC=AB=\sqrt{BP^2+AP^2}=\sqrt{2}BP$，

∴$\frac{BP}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

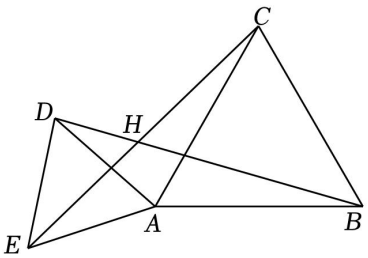
【点评】此题是三角形综合题，主要考查了全等三角形的性质和判定，等腰直角三角形的性质，解本题的关键是得出∠$ABD$＝∠$HED$，也是解本题的难点.

4.（2022 秋•天桥区期末）有共同顶点的△$ABC$ 与△$ADE$ 中，$CA=CB$，$EA=ED$，且∠$ACB$＝∠$AED$＝α，连接 $BD$，$CE$，线段 $BD$，$CE$ 相交于点 $H$.

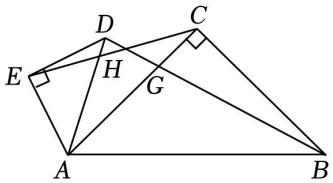
（1）如图①，当α＝60°时，$\frac{BD}{CE}$的值是 __1__，∠$BHC$ 的度数是 __60°__；

（2）如图②，当α＝90°时，求$\frac{BD}{CE}$的值和∠$BHC$ 的度数，并说明理由；

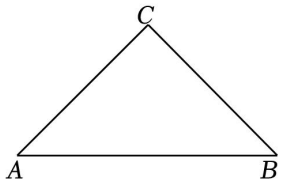
（3）如果α＝90°，$\frac{AC}{AE}=2$，当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点重合时，请直接写出$\frac{BD}{DE}$的值.



图①



图②



备用图

【考点】三角形综合题.

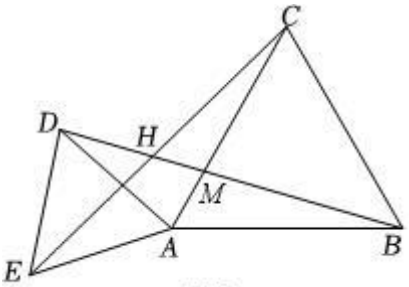
【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】（1）证明△$BAD$≌△$CAE$（$SAS$），由全等三角形的性质得出 $BD=CE$，∠$ACE$＝∠$ABD$，则可得出答案；

（2）由直角三角形的性质得出$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$，证明△$CAE$∽△$BAD$，由相似三角形的性质得出$\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$．∠$ACE$＝∠$ABD$，则可得出答案；

（3）分三种情况：①当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点 $D$ 重合时，如图③﹣1，②当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点 $E$ 重合时，如图③﹣2，③当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点 $A$ 重合时，如图③﹣3，结合（2）则可得出答案.

【解答】（1）解：如图①，$AB$ 与 $CF$ 交于点 $M$，



图①

∵$\angle ACB=\angle AED=60^\circ$，$CA=CB$，$EA=ED$，

∴$\triangle AED$ 和$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle CAB=\angle EAD=60^\circ$，

∴$\angle CAE=\angle BAD$，

∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（$SAS$），

∴$BD=CE$，$\angle ACE=\angle ABD$，

∵$\angle HMC=\angle AMB$，

∴$\angle BHC=\angle CAB=60^\circ$，

故答案为：1；60°；

（2）证明：∵$CA=CB$，且$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle CAB=\angle CBA=45^\circ$，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}AC$，

同理$\angle EAD=\angle ADE=45^\circ$，$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{2}AE$，

∴$\angle EAC=\angle DAB$，且$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$，

∴$\triangle ACE\backsim\triangle ABD$，

∴$\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$.

∴$\angle ACE=\angle ABD$，

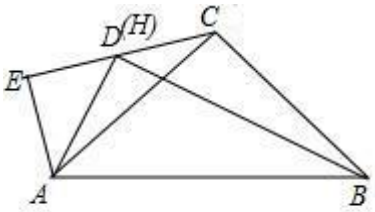
∴$\angle AGB=\angle CGH$，

∴$\angle BHC=\angle CAB=45^\circ$；

∴$\frac{BD}{CE}$的值为$\sqrt{2}$，$\angle BHC$ 的度数为 45°；

（3）解：分三种情况：

①当点 $H$ 与$\triangle ADE$ 的顶点 $D$ 重合时，如图③﹣1，




图③-1

∵α＝90°，$\frac{AC}{AE}$=2，

由（2）知：$\frac{BD}{CE}=\sqrt{2}$，

设 $AE=DE=a$，

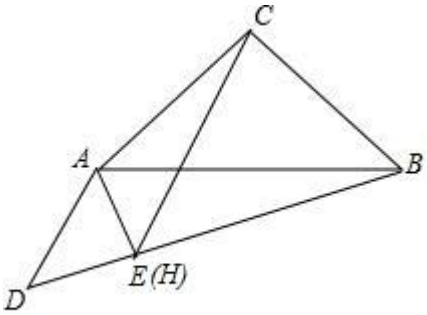
∴$AC=2a$，

∴$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{3}a$，

∴$BD=\sqrt{6}a$，

∴$\frac{BD}{DE}=\frac{\sqrt{6}a}{a}=\sqrt{6}$；

②当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点 $E$ 重合时，如图③﹣2，




图③-2

在 Rt△$ABC$ 中，$AC=BC=2a$，

∴$AB=\sqrt{2}AC=2\sqrt{2}a$，

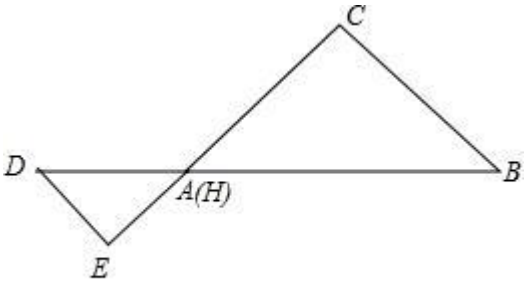
在 Rt△$ABE$ 中，$AE=DE=a$，

∴$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{7}a$，

∴$BD=BE+DE=\sqrt{7}a+a$，

∴$\frac{BD}{DE}=\frac{\sqrt{7}a+a}{a}=\sqrt{7}+1$；

③当点 $H$ 与△$ADE$ 的顶点 $A$ 重合时，如图③﹣3，




图③-3

∵$AD=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}a$，$AB=\sqrt{2}AC=2\sqrt{2}a$，

∴$BD=AB+AD=3\sqrt{2}a$，

∴$\frac{BD}{DE}=\frac{3\sqrt{2}a}{a}=3\sqrt{2}$.

综上所述：$\frac{BD}{DE}=\sqrt{6}$或 $3\sqrt{2}$或$\sqrt{7}+1$，

【点评】本题是三角形综合题，主要考查了等边三角形性质，等腰直角三角形性质，全等三角形判定和性质，相似三角形的判定和性质，直角三角形性质，熟练掌握全等三角形判定和性质和相似三角形的判定和性质是解题关键.

5.（2022 秋•江岸区期末）已知△$ABC$ 是等边三角形.

（1）如图 1，点 $D$ 是 $AB$ 边的中点，点 $P$ 为射线 $AC$ 上一动点，当△$CDP$ 是轴对称图形时，∠$APD$ 的度数为 15°，60°，105°；

（2）如图 2，$AE$∥$BC$，点 $D$ 在 $AB$ 边上，点 $F$ 在射线 $AE$ 上，且 $DC=DF$，作 $FG$⊥$AC$ 于 $G$，当点 $D$ 在 $AB$ 边上移动时，请同学们探究线段 $AD$，$AC$，$CG$ 之间有什么数量关系，并对结论加以证明；

（3）如图 3，点 $R$ 在 $BC$ 延长线上，连接 $AR$，$S$ 为 $AR$ 上一点，$AS=BC$，连接 $BS$ 交 $AC$ 于 $T$，若 $AT=2n$，$SR=n$，直接写出线段$\frac{CT}{AR}$的值为 $\frac{1}{7}$.

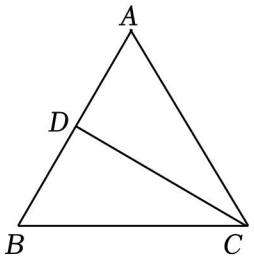



图1

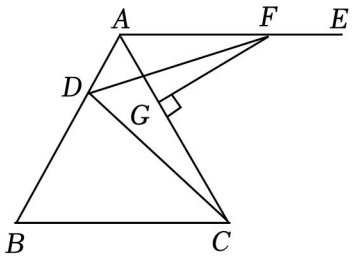



图2

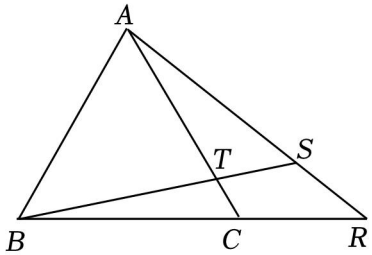



图3

【考点】三角形综合题.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】（1）先根据题意得到△$CDP$是等腰三角形，再分三种情况进行讨论：$CP=DP$，$CD=CP$，$CD=DP$，分别画出图形进行计算即可；

（2）延长$BA$，过点$F$作$FH\perp BH$于$H$，连接$CF$；延长$EA$，过点$D$作$DN\perp EN$于点$N$，过点$D$作$DM\perp AC$于$M$．证明Rt△$FAH$≌Rt△$FAG$，即可得到$AH=AG$；证明Rt△$NDF$≌Rt△$MDC$，即可得到∠$NDF$=∠$MDC$；再根据∠$FDC$=60°，即可证明△$DCF$是等边三角形，进而得到$CF=CD=DF$；最后证明Rt△$FHD$≌Rt△$FGC$，即可得出$CG=DH$；再根据线段的和差关系即可得出结论；

（3）过点$R$作$DE\parallel AB$交$BS$的延长线于点$D$，交$AC$的延长线于点$E$，在$BC$上截取$BF=CT$，连接$AF$，先证明△$ABF$≌△$BCT$，得到∠$BAF$=∠$CBT$；再证明∠$FAR$=∠$AFR$，得到$AR=FR$；证明△$ECR$为等边三角形，设$CE=ER=CR=m$，$AB=AC=BC=a$，求出$a=m+n$，证明△$ABT$≌△$EDT$，即可得到$AT=ET=2n$，求出$m=\frac{3}{2}n$，最后依据$CT=\frac{1}{2}n$，$AR=\frac{7}{2}n$，即可得出结论．

【解答】解：（1）∵等腰三角形为轴对称图形，

∴当△$CDP$为轴对称图形时，△$CDP$为等腰三角形，

∵△$ABC$为等边三角形，

∴∠$ACB$=60°，

∵点$D$是$AB$边的中点，

∴$CD$平分∠$ACB$，

∴∠$ACD$=∠$BCD$=$\frac{1}{2}$∠$ACB$=30°；

当$CP=DP$时，如图所示：

∴∠$PDC$=∠$PCD$=30°，

∴∠$APD$=∠$PDC$+∠$PCD$=60°；

当$CD=CP$，点$P$在线段$AC$上时，如图所示：

∴∠$CDP$=∠$CPD$=$\frac{1}{2}$（180°﹣30°）=75°，

∴∠$APD$=∠$PDC$+∠$PCD$=105°；

点$P$在线段$AC$的延长线上时，如图所示：

∵$\angle ACD=30°$，

∴$\angle PCD=180°-30°=150°$，

∵$CD=CP$，

∴$\angle CDP=\angle CPD=\frac{1}{2}(180°-150°)=15°$，即$\angle APD=15°$，

当 $CD=DP$ 时，点 $P$ 在 $CA$ 的延长线上，不在射线 $AC$ 上；

综上所述，$\angle APD$ 的度数为 15°，60°，105°．

故答案为：15°，60°，105°．

（2）解：$AC+AD=2CG$．理由：

延长 $BA$，过 $F$ 作 $FH\perp BH$ 于 $H$，连接 $CF$，延长 $EA$，过点 $D$ 作 $DN\perp EN$ 于 $N$，过点 $D$ 作 $DM\perp AC$ 于 $M$，如图所示：

∵$\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴$\angle ACB=\angle BAC=60°$，

∵$AE\parallel BC$，

∴$\angle EAC=\angle ACB=60°$，

∴$\angle FAH=180°-60°-60°=60°$，

∴$\angle FAH=\angle EAC$，

∵$FH\perp AH$，$FG\perp AC$，

∴$FH=FG$，

∵$AF=AF$，

∴$Rt\triangle FAH\cong Rt\triangle FAG$（$HL$），

∴$AH=AG$，

∵$\angle NAD=\angle HAF=60°$，

∴$\angle NAD=\angle DAM=60°$，

∵$DN\perp AN$，$DM\perp AM$，

∴$DN=DM$，

∵$DF=DC$，

∴$Rt\triangle NDF\cong Rt\triangle MDC$（$HL$），

∴∠$NDF$＝∠$MDC$，

∴∠$NDF$﹣∠$MDF$＝∠$MDC$﹣∠$MDF$，

∴∠$NDM$＝∠$FDC$，

∵∠$ADN$＝90°﹣∠$NAD$＝30°，∠$ADM$＝90°﹣∠$DAM$＝30°，

∴∠$NDM$＝30°+30°＝60°，

∴∠$FDC$＝60°，

∵$DF$＝$DC$，

∴△$DCF$是等边三角形，

∴$CF$＝$CD$＝$DF$，

∵$FH$＝$FG$，$FD$＝$FC$，

∴Rt△$FHD$≌Rt△$FGC$（$HL$），

∴$CG$＝$DH$，

∴$CG$＝$DH$＝$AD$+$AH$＝$AD$+$AG$，

∴$AG$＝$CG$﹣$AD$，

∴$AC$＝$CG$+$AG$＝$CG$+$CG$﹣$AD$＝2$CG$﹣$AD$，

即$AC$+$AD$＝2$CG$；

（3）过点$R$作$DE$∥$AB$交$BS$的延长线于点$D$，交$AC$的延长线于点$E$，在$BC$上截取$BF$＝$CT$，连接$AF$，如图所示：

在△$ABF$和△$BCT$中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABF = \angle BCT \\ BF = CT \end{cases},$$

∴△$ABF$≌△$BCT$（$SAS$），

∴∠$BAF$＝∠$CBT$，

设∠$BAF$＝∠$CBT$＝α，则∠$ABS$＝60°﹣α，

∵$AS$＝$BC$＝$AB$，

∴∠$ASB$＝∠$ABS$＝60°﹣α，

∴∠$BAS$＝180°﹣∠$ABS$﹣∠$ASB$＝60°+2α，∠$FAR$＝∠$BAS$﹣∠$BAF$＝60°+α，

∵∠$AFR$＝∠$ABF$+∠$BAF$＝60°+α，

∴∠$FAR$＝∠$AFR$，

∵$DE$∥$AB$，

∴∠$D$＝∠$ABS$，

∵∠$DSR$＝∠$ASB$，∠$ABS$＝∠$ASB$，

∴∠$D$＝∠$DSR$，

∴$DR$＝$SR$＝$n$，

∵$DE$∥$AB$，

∴∠$E$＝∠$BAC$＝60°，

又∵∠$ECR$＝∠$ACB$＝60°，

∴△$ECR$是等边三角形，

设$CE$＝$ER$＝$CR$＝$m$，$AB$＝$AC$＝$BC$＝$a$，则$AR$＝$AS$+$SR$＝$a$+$n$，

∵$BC$＝$AC$，$BF$＝$CT$，

∴$BC$﹣$BF$＝$AC$﹣$CT$，

∴$CF$＝$AT$＝2$n$，

∴$FR$＝$CF$+$CR$＝2$n$+$m$，

∵$AR$＝$FR$，

∴$a$+$n$＝2$n$+$m$，

∴$a$＝$m$+$n$，

又∵$DE$＝$DR$+$ER$＝$m$+$n$，

∴$DE$＝$AB$，

在△$ABT$和△$EDT$中，

$$\begin{cases}\angle ABT=\angle D\\ \angle ATB=\angle ETD\\ AB=ED\end{cases},$$

∴△$ABT$≌△$EDT$（$AAS$），

∴$AT$＝$ET$＝2$n$，

∵$ET$＝$CT$+$CE$，

∴$CT$＝$ET$﹣$CE$＝2$n$﹣$m$，

又∵$CT$＝$AC$﹣$AT$＝$a$﹣2$n$，

∴$a$﹣2$n$＝2$n$﹣$m$，

∵$a=m+n$，

∴$m+n-2n=2n-m$，

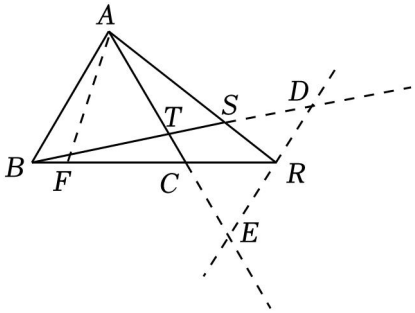
解得 $m=\frac{3}{2}n$，

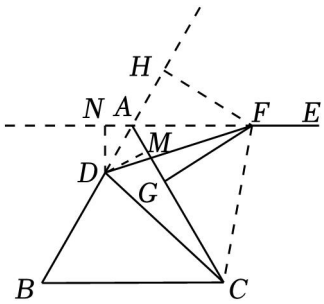
∴$CT=2n-m=2n-\frac{3}{2}n=\frac{1}{2}n$，

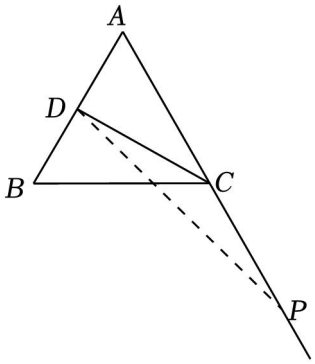
$AR=AS+SR=a+n=m+n+n=m+2n=\frac{3}{2}n+2n=\frac{7}{2}n$，

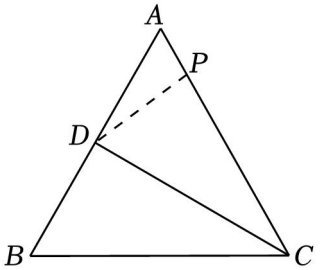
∴$\frac{CT}{AR}=\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{7}{2}n}=\frac{1}{7}$,

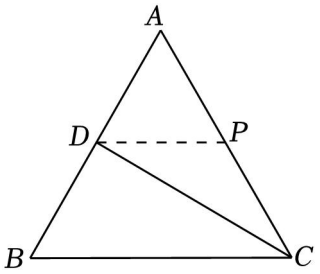
故答案为：$\frac{1}{7}$.






【点评】本题属于三角形综合题，主要考查了全等三角形的判定与性质以及等边三角形的判定与性质的运用，解决问题的关键是作辅助线构造全等三角形，利用全等三角形的性质以及线段的和差关系进行推算，进而得出结论．

6．（2022 秋•秦淮区期中）【习题再现】

| |
|---|
| （教材 $P74$ 第 10 题）如图①，$I$ 是△$ABC$ 的内心，$AI$ 的延长线交△$ABC$ 的外接圆于点 $D$．$BD$ 和 $ID$ 相等吗？为什么？ |

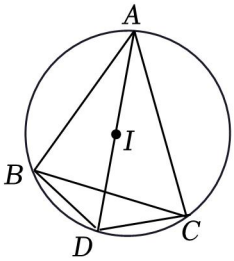
（1）完成原习题；

【逆向思考】

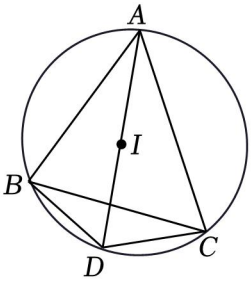
（2）如图②，$I$ 为△$ABC$ 内一点，$AI$ 的延长线交△$ABC$ 的外接圆于点 $D$．若 $DB=DI=DC$，求证：$I$ 为△$ABC$ 的内心．

【迁移运用】

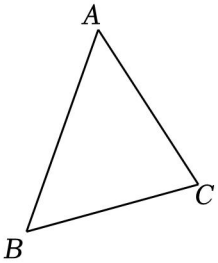
（3）如图③，利用无刻度直尺和圆规，作出△$ABC$ 的内心 $I$．（保留作图痕迹，写出必要的文字说明．）




①




②




③

【考点】圆的综合题.

【专题】与圆有关的计算；尺规作图；空间观念.

【分析】（1）连接 $BI$，根据 $I$ 是△$ABC$ 的内心可得出∠$BAD$＝∠$CAD$，∠$ABI$＝∠$IBC$，再由圆周角定理可知∠$DBC$＝∠$DAC$，$BID$ 是△$ABI$ 的一个外角可知∠$BID$＝∠$BAD$+∠$ABI$，故可得出∠$IBD$＝∠$BID$，由等腰三角形的性质可得出结论；

（2）连接 $BI$，由 $BD$＝$CD$ 可得出$\widehat{BD}=\widehat{CD}$，故可得出 $AD$ 平分∠$BAC$．再由 $BD$＝$DI$ 可知∠$IBD$＝∠$BID$，根据∠$BID$ 是△$ABI$ 的一个外角可知∠$BID$＝∠$BAD$+∠$ABI$．再由∠$IBD$＝∠$DBC$+∠$CBI$ 得出∠$ABI$＝∠$CBI$，即 $BI$ 平分∠$ABC$，故可得出结论．

（3）先做出△$ABC$ 的外接圆，再做 $BC$ 的垂直平分线与圆相交于点 $D$，在垂直平分线上截取 $DI$＝$DB$，且使点 $I$ 在△$ABC$ 的内部即可．

【解答】（1）证明：如图①，连接 $BI$，

∵$I$ 是△$ABC$ 的内心，

∴∠$BAD$＝∠$CAD$，∠$ABI$＝∠$IBC$．

∵∠$DBC$，∠$DAC$ 是$\widehat{DC}$所对的圆周角，

∴∠$DBC$＝∠$DAC$，

∴∠$DBC$＝∠$BAD$．

根据角之间的关系可知∠$IBD$＝∠$DBC$+∠$IBC$．

又∵∠$BID$ 是△$ABI$ 的一个外角，

∴∠$BID$＝∠$BAD$+∠$ABI$，

∴∠$IBD$＝∠$BID$，

∴$BD$＝$BI$．

（2）证明：连接 $BI$，

∵$BD$＝$CD$，

∴$\widehat{BD}=\widehat{CD}$，

∴∠$BAD$＝∠$DBC$＝∠$CAD$，即 $AD$ 平分∠$BAC$．

∵$BD$＝$DI$，

∴∠$IBD$＝∠$BID$．

∵∠$BID$ 是△$ABI$ 的一个外角，

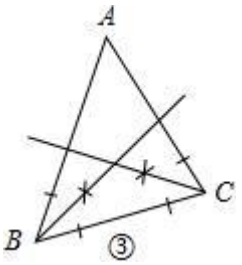
∴∠$BID$＝∠$BAD$+∠$ABI$．

∵∠$IBD$＝∠$DBC$+∠$CBI$，

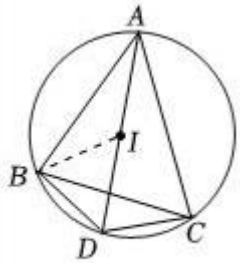
∴∠$ABI$＝∠$CBI$，即 $BI$ 平分∠$ABC$，

∴$I$ 为△$ABC$ 的内心．

（3）如图③，点 $I$ 即为△$ABC$ 的内心．




③




①

【点评】本题考查的是圆的综合题，涉及到圆的内心，三角形外角的性质及角平分线的性质，尺规作图等知识综合性较强，难度较大．

7．（2022 秋•古冶区期中）如图：在∠$EAF$ 的平分线上取点 $B$ 作 $BC$⊥$AF$ 于点 $C$，在直线 $AC$ 上取一动点 $P$．在直线 $AE$ 上取点 $Q$ 使得 $BQ$＝$BP$．

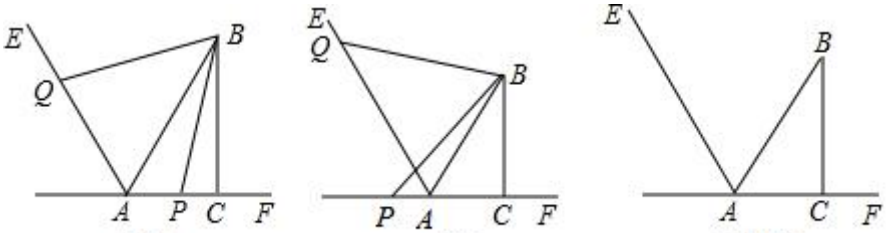



图1　　图2　　备用图

（1）如图 1，当点 $P$ 在点线段 $AC$ 上时，∠$BQA$+∠$BPA$＝__180__°；

（2）如图 2，当点 $P$ 在 $CA$ 延长线上时，探究 $AQ$、$AP$、$AC$ 三条线段之间的数量关系，说明理由；

（3）在满足（1）的结论条件下，当点 $P$ 运动到在射线 $AC$ 上时，直接写出 $AQ$、$AP$、$PC$ 三条线段之间的数量关系为：__$AQ-AP=2PC$ 或 $AP-AQ=2PC$__．

【考点】三角形综合题．

【专题】几何综合题；三角形；推理能力；应用意识．

【分析】（1）作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，根据角平分线的性质得到 $BM=BC$，证明 Rt△$BMQ$≌Rt△$BPC$（$HL$），进而证明∠$BQA$＝∠$BPC$ 即可得出答案；

（2）作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，证明 Rt△$ABM$≌Rt△$ABC$（$HL$），得到∠$ABM$＝∠$ABC$，$AM=AC$，$BM=BC$，再证明 Rt△$BMQ$≌Rt△$BCP$（$HL$），从而得出 $PC=QM$ 即可；

（3）分两种情况进行讨论，$P$ 在线段 $AC$ 上或 $P$ 在线段 $AC$ 的延长线上，作出图后，由△$QBM$≌△$PBC$（$AAS$），得∠$QBC$＝∠$PBC$，$QM=PC$，$BM=BC$，结合 Rt△$ABM$≌Rt△$ABC$（$HL$），得出 $AM=AC$，利用线段和差计算即可．

【解答】解：（1）作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，

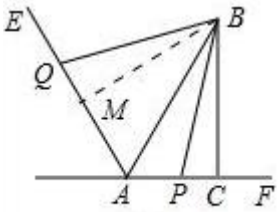


图1

∵$AB$ 平方∠$EAF$，$BC\perp AF$，

∴$BM=BC$，

在 Rt△$BMQ$ 和 Rt△$BPC$ 中，

$\begin{cases} BQ=BP \\ BM=BC \end{cases}$，

∴Rt△$BMQ$≌Rt△$BPC$（$HL$），

∴∠$BQA$＝∠$BPC$，

又∵∠$BPC$+∠$BPA$＝180°，

∴∠$BQA$+∠$BPA$＝180°，

故答案为：180；

（2）$AQ-AP=2AC$，理由如下，

作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，

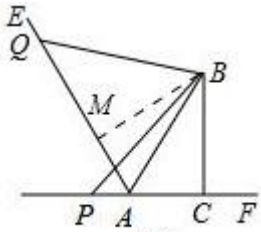


图2

∵$AB$ 平方∠$EAF$，$BC\perp AF$，

∴$BM=BC$，$\angle BMA=\angle BCA=90°$，

在 Rt△$ABM$ 和 Rt△$ABC$ 中，

$\begin{cases}BM=BC\\AB=AB\end{cases}$，

∴Rt△$ABM$≌Rt△$ABC$（$HL$），

∴$\angle ABM=\angle ABC$，$AM=AC$，

在 Rt△$BMQ$ 和 Rt△$BCP$ 中，

$\begin{cases}BQ=BP\\BM=BC\end{cases}$，

∴Rt△$BMQ$≌Rt△$BCP$（$HL$），

∴$PC=QM$，

∴$AQ-QP=(AM+QM)-(PC-AC)=AM+AC=2AC$；

（3）当点 $P$ 在线段 $AC$ 上时，如图，$AQ-AP=2PC$，

作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，

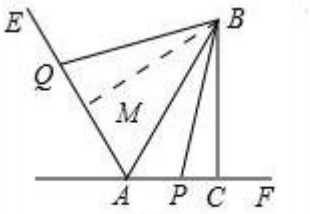


图1

∵$BC\perp AF$，

∴，$\angle BMA=\angle BCA=90°$，

∵$\angle BQA+\angle BPA=180°$，$\angle BPC+\angle BPA=180°$，

∴$\angle BPC=\angle BQM$，

在△$QBM$ 和△$PBC$ 中，

$\begin{cases}\angle BMQ=\angle BCP\\\angle BQM=\angle BPC\\QB=PB\end{cases}$，

∴△$QBM$≌△$PBC$（$AAS$），

∴$\angle QBC=\angle PBC$，$QM=PC$，$BM=BC$，

在 Rt△$ABM$ 和 Rt△$ABC$ 中，

$\begin{cases}BM=BC\\AB=AB\end{cases}$，

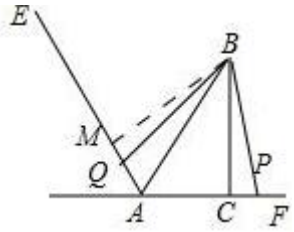
∴Rt△$ABM$≌Rt△$ABC$（$HL$），

∴$AM=AC$，

∴$AQ-AP=AM+QM-(AC-PC)=QM+PC=2PC$；

当 $P$ 在线段 $AC$ 的延长线上，如图，$AP-AQ=2PC$，

作 $BM\perp AE$ 于点 $M$，




∵$BC\perp AF$，

∴$\angle BMA=\angle BCA=90°$，

∵$\angle BQA+\angle BPA=180°$，$\angle BQM+\angle BQA=180°$，

∴$\angle BPC=\angle BQM$，

在△$QBM$ 和△$PBC$ 中，

$$\begin{cases}\angle BMQ=\angle BCP\\ \angle BQM=\angle BPC\\ QB=PB\end{cases},$$

∴△$QBM$≌△$PBC$（$AAS$），

∴$\angle QBC=\angle PBC$，$QM=PC$，$BM=BC$，

在 Rt△$ABM$ 和 Rt△$ABC$ 中，

$$\begin{cases}BM=BC\\ AB=AB\end{cases},$$

∴Rt△$ABM$≌Rt△$ABC$（$HL$），

∴$AM=AC$，

∴$AP-AQ=AC+CP-(AM-QM)=MQ+PC=2PC$.

故答案为：$AQ-AP=2PC$ 或 $AP-AQ=2PC$.

【点评】本题考查了三角形的综合应用，做题关键要掌握角平分线性质，三角形全等的判定.

8.（2022•建湖县一模）在平面直角坐标系中，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过点 $C$（0，－4）和点 $D$（2，－6），与 $x$ 轴交于点 $A$、$B$（点 $A$ 在点 $B$ 的左边），且点 $D$ 与点 $G$ 关于坐标原点对称.

（1）求该二次函数解析式，并判断点 $G$ 是否在此函数的图象上，并说明理由；

（2）若点 $P$ 为此抛物线上一点，它关于 $x$ 轴，$y$ 轴的对称点分别为 $M$，$N$，问是否存在这样的 $P$ 点使得 $M$，$N$ 恰好都在直线 $DG$ 上？如存在，求出点 $P$ 的坐标，如不存在，请说明理由；

（3）若第四象限有一动点 $E$，满足 $BE=OB$，过 $E$ 作 $EF\perp x$ 轴于点 $F$，设 $F$ 坐标为（$t$，0），$0<t<4$，$\triangle BEF$ 的内心为 $I$，连接 $CI$，直接写出 $CI$ 的最小值．

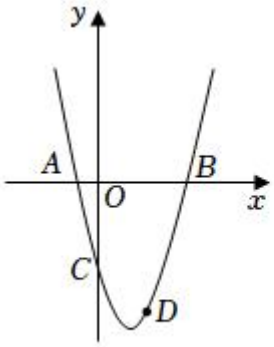


图1

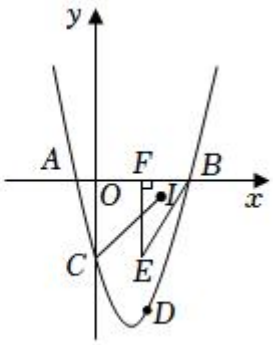


图2

【考点】二次函数综合题．

【专题】二次函数图象及其性质；推理能力；应用意识．

【分析】（1）用待定系数法直接求解即可，将点 $G$ 代入解析式验证即可；

（2）先将 $DG$ 的解析式求出来，然后将表示出来的点 $M$，$N$ 坐标代入解析式求解；

（3）先找出$\triangle OBI$ 的外接圆，利用 $BI$ 是角平分线证得全等，求出外接圆的半径，利用三角形三边关系求解即可．

【解答】解：（1）∵二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过点 $C$（0，﹣4）和点 $D$（2，﹣6），

∴$\begin{cases}c=-4\\4+2b+c=-6\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=-3\\c=-4\end{cases}$，

∴$y=x^2-3x-4$，

∵点 $D$ 与点 $G$ 关于坐标原点对称，

∴$G$（﹣2，6），

把 $x=-2$ 代入 $y=x^2-3x-4$，得：

$y=(-2)^2-3\times(-2)-4=6$，

∴$G$（﹣2，6）在此抛物线上；

（2）设直线 $DG$ 的解析式为 $y=mx+n$，

∵$D$（2，﹣6），$G$（﹣2，6），

∴$\begin{cases}2m+n=-6\\-2m+n=6\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=-3\\n=0\end{cases}$，

∴直线 $DG$ 的解析式为 $y=-3x$，

假设此抛物线上存在这样的点 $P$（$x$，$x^2-3x-4$），

使得它关于 $x$ 轴，$y$ 轴的对称点 $M$，$N$ 恰好都在直线 $DG$ 上，

∵$M$（$x$，$-x^2+3x+4$），$N$（$-x$，$x^2-3x-4$），

∴$x^2-3x-4=3x$，

解得$x=3\pm\sqrt{13}$，

故所求点 $P$ 的坐标为$(3+\sqrt{13}，9+3\sqrt{13})$或$(3-\sqrt{13}，9-3\sqrt{13})$；

（3）如图 1，连接 $BI$．$OI$，$EI$，作△$OBI$ 的外接圆⊙$M$，连接 $OM$，$BM$，$MI$，$CM$，过点 $M$ 作 $MH\perp y$ 轴于点 $H$，

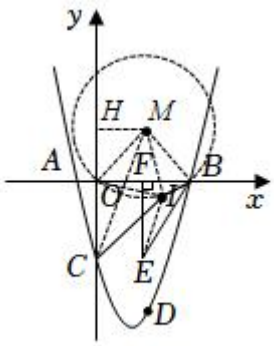



图 1

∵$EF\perp x$ 轴，

∴$\angle BFE=90°$，

∴$\angle FBE+\angle FEB=90°$，

∵△$BEF$ 的内心为 $I$，

∴$BI$，$EI$ 分别平分$\angle FBE$，$\angle FEB$，

∴$\angle IBE=\frac{1}{2}\angle FBE$，$\angle IEB=\frac{1}{2}\angle FEB$，

∴$\angle IBE+\angle IEB=\frac{1}{2}(\angle FBE+\angle FEB)=45°$，

∴$\angle BIE=135°$，

在△$BIO$ 和△$BIE$ 中，

$\begin{cases} OB = EB \\ \angle OBI = \angle EBI \\ BI = BI \end{cases}$，

∴△$BIO$≌△$BIE$（$SAS$），

∴∠$BIO$＝∠$BIE$＝135°，

∵⊙$M$ 是△$OBI$ 的外接圆，

∴∠$OMB$＝2×（180°﹣∠$BIO$）＝90°，

∴$OM$＝$BM$＝$\frac{\sqrt{2}}{2}OB$＝$2\sqrt{2}$，

∴$MI$＝$OM$＝$2\sqrt{2}$，

∴∠$MOB$＝∠$MOH$＝45°，

∵$MH$⊥$y$ 轴，

∴∠$HOM$＝∠$HMO$＝45°，

∴$OH$＝$HM$＝$\frac{\sqrt{2}}{2}OM$＝2，

∴$CH$＝$OH$+$OC$＝2+4＝6，

∴$CM$＝$\sqrt{HM^2 + CH^2}$ ＝$2\sqrt{10}$，

∵$CI$≥$CM$﹣$MI$，

∴当且仅当 $C$，$M$，$I$ 三点共线时，$CI$ 取得最小值，

∴$CI$ 的最小值为 $2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了二次函数综合，待定系数法，几何变换﹣对折，三角形内心，外接圆，两点之间线段最短，全等三角形的判定和性质等知识点，充分利用三角形内心、合理作出辅助线是解题的关键.

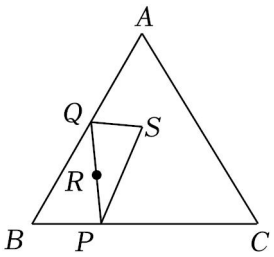
9.（2021 秋•朝阳区月考）如图，在锐角△$ABC$ 中，$AB$＝$BC$＝5，△$ABC$ 的面积为 10．点 $P$ 从点 $B$ 出发，以每秒 3 个单位的速度沿边 $BC$ 向终点 $C$ 运动，当点 $P$ 不与点 $B$、$C$ 重合时，过点 $P$ 作 $PQ$⊥$BC$，与△$ABC$ 的另一边交于点 $Q$，取 $PQ$ 的中点 $R$，将线段 $QR$ 绕点 $Q$ 逆时针旋转 90°得到线段 $QS$，连结 $PS$．设点 $P$ 的运动时间为 $t$（$s$）.

（1）$BC$ 边上的高为 __4__.

（2）当点 $S$ 落在边 $AC$ 上时，求 $t$ 的值.

（3）当△$PQS$ 与△$ABC$ 重叠部分的图形是三角形时，求重叠部分的面积 $y$ 与 $t$ 的函数关系式，并写出 $t$ 的取值范围.

（4）当点 $R$ 落在△$ABC$ 的高线上时，直接写出 $t$ 的值.




【考点】三角形综合题.

【专题】几何综合题；压轴题；探究型；数形结合；分类讨论；运算能力；推理能力；模型思想.

【分析】（1）设高为 $h$，直接根据三角形的面积公式求解即可；

（2）过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$，可证明△$BPQ$∽△$BDA$，可得 $PQ=4t$，$BQ=5t$，再证明△$AQS$∽△$ABC$，可得 $AQ=QS=2t$，由 $BQ+AQ=AB$ 求出 $t$ 的值即可；

（3）根据 $P$ 的运动过程，当 $P$ 从 $B$ 运动到 $S$，落在 $AC$ 上时和 $P$ 从 $D$ 运动到 $C$ 时两种情况时，△$PQS$ 与△$ABC$ 重叠部分的图形是三角形，根据这两种情况分别求解即可；

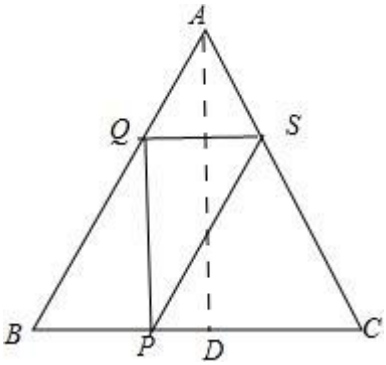
（4）当点 $R$ 落在边 $BC$ 的高线上，点 $R$ 落在边 $AB$ 的高线上、点 $R$ 落在边 $AC$ 的高线上三种情况分别进行解答即可.

【解答】解：（1）设 $BC$ 边上的高为 $h$，由题意得$\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}\times 5h=10$，

∴$h=4$，

故答案为：4；

（2）如图，过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$，则∠$BDA$＝∠$CDA$＝90°，




∴$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∵$PQ\perp BC$，

∴∠$BPQ$＝∠$QPC$＝90°，

∴∠$BPQ$＝∠$BDA$，

又∠$B$＝∠$B$，

∴△$BPQ$∽△$BDA$，

∴$\frac{BQ}{AB}=\frac{BP}{BD}=\frac{PQ}{AD}$，

∵$AB$＝5，$AD$＝4，$BD$＝3，$BP$＝3$t$，

∴$\frac{BQ}{5}=\frac{3t}{3}=\frac{PQ}{4}$，

∴$PQ$＝4$t$，$BQ$＝5$t$，

∵$R$ 为 $PQ$ 的中点，且线段 $QR$ 绕点 $Q$ 逆时针旋转 90°得到线段 $QS$，

∴$QS$＝$QR$＝$PR$＝$\frac{1}{2}PQ$＝2$t$，∠$PQS$＝90°，

∴∠$PQS$＝∠$QPC$＝90°，

∴$QS$∥$BC$，

∴△$AQS$∽△$ABC$，

∴$\frac{AQ}{QS}=\frac{AB}{BC}$＝1，

∴$AQ$＝$QS$＝2$t$，

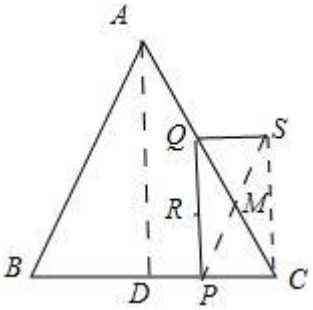
由 $BQ$+$AQ$＝$AB$ 得 5$t$+2$t$＝5，

∴$t$＝$\frac{5}{7}$；

（3）当 $P$ 从 $B$ 运动到 $S$，落在 $AC$ 上时，△$PQS$ 与△$ABC$ 重叠部分的图形是△$PQS$，

∴$y$＝$\frac{1}{2}PQ$•$QS$＝4$t^2$，

当 $P$ 从 $D$ 运动到 $C$ 过程中如图，$Q$ 在 $AC$ 上，连接 $CS$，设 $SP$ 交 $AC$ 于 $M$，则△$PQS$ 与△$ABC$ 重叠部分是△$PQM$，




∵∠$CPQ$＝∠$CDA$，

又∠$C$＝∠$C$，

∴△$CPQ$∽△$CDA$，

$\therefore \frac{CP}{CD}=\frac{PQ}{AD}$,

∵$AD$＝4，$CD$＝$BC$﹣$BD$＝2，$CP$＝$BC$﹣$BP$＝5﹣3$t$，

$\therefore \frac{5-3t}{2}=\frac{PQ}{4}$,

∴$PQ$＝10﹣6$t$，

∴$QS$＝$QR$＝$PR$＝$\frac{1}{2}PQ$＝5﹣3$t$＝$CP$，

∵$QS$∥$PC$，∠$PQS$＝90°，

∴四边形 $QPCS$ 是矩形，

∴$y$＝$S_{\triangle PQM}$＝$\frac{1}{4}S_{矩形QPCS}$＝$\frac{1}{4}CP$•$QP$＝$\frac{9}{2}t^2$﹣15$t$＋$\frac{25}{2}$,

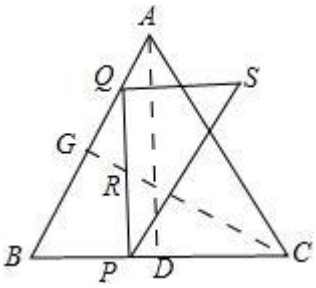
当点 $P$ 在 $D$ 时，$t$＝3÷3＝1，

当 $P$ 在 $C$ 点时，$t$＝5÷3＝$\frac{5}{3}$,

∴综上所述，重叠部分的面积 $y$ 与 $t$ 的函数关系式为 $y=\begin{cases}4t^2(0<t\le\frac{5}{7})\\ \frac{9}{2}t^2-15t+\frac{25}{2}(1\le t<\frac{5}{3})\end{cases}$；

（4）当 $R$ 落在边 $BC$ 的高线上时，即 $R$ 在 $AD$ 上，则 $t$＝1；

点 $R$ 落在边 $AB$ 的高线上时，过 $C$ 点作 $CG$⊥$AB$ 于 $G$，则 $R$ 在 $CG$ 上，如图，




∵∠$B$＝∠$BAD$＝∠$B$+∠$BCG$＝90°，

∴∠$BAD$＝∠$BCG$，则 tan∠$BAD$＝tan∠$BCG$＝$\frac{BD}{AD}=\frac{3}{4}$,

∵$R$ 在 $CG$ 上，$PR$⊥$BC$，

∴tan∠$BCG$＝$\frac{PR}{CP}=\frac{3}{4}$,

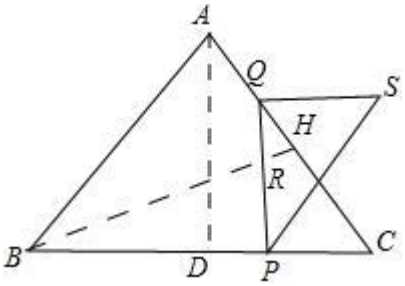
由（3）可知，当 $t$>1 时，$PR$＝$CP$＝5﹣3$t$，

则$\frac{PR}{CP}=1$ 与$\frac{PR}{CP}=\frac{3}{4}$不符合题意，故舍去；

当 $t$<1 时，$PR$＝2$t$，$CP$＝5﹣3$t$，

由$\frac{2t}{5-3t}=\frac{3}{4}$，得 $t=\frac{15}{17}$，

当 $R$ 落在边 $AC$ 的高线上时，过 $B$ 作 $BH\perp AC$ 于点 $H$，则 $R$ 在 $BH$ 上，如图，




∵$\angle C+\angle CBH=\angle C+\angle CAD=90°$，

∴$\angle CBH=\angle CAD$，则 $\tan\angle CBH=\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$，

∵$R$ 在 $BH$ 上，$PR\perp BC$，

∴$\tan\angle CBH=\frac{PR}{BP}=\frac{1}{2}$，

由（3）可知，当 $t>1$ 时，$PR=5-3t$，$BP=3t$，

由$\frac{5-3t}{3t}=\frac{1}{2}$，得，$t=\frac{10}{9}$；

当 $t<1$ 时，$PR=3t$，$BP=3t$，则$\frac{PR}{BP}=\frac{2}{3}$与$\frac{PR}{BP}=\frac{1}{2}$不符合题意，故舍去，

综上所述，点 $R$ 落在△$ABC$ 的高线上时，$t$ 的值为 1 或$\frac{15}{17}$或$\frac{10}{9}$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，勾股定理，图形的运动与二次函数问题，矩形的判定与性质，解直角三角形，比例性质，旋转的性质，三角形的综合运用等相关知识，解题关键在于熟练掌握相关知识的联系与应用，借助数形结合和分类讨论的思想.

10.（2019 秋•高青县期末）如图 1，线段 $AB$、$CD$ 相交于点 $O$，连接 $AD$、$CB$.

（1）请说明：$\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$；

（2）$\angle DAB$ 的平分线 $AP$ 和$\angle BCD$ 的平分线 $CP$ 相交于点 $P$（如图 2），试探索$\angle P$ 与$\angle D$、$\angle B$ 之间的数量关系，并请说明理由；

（3）点 $M$ 在 $OD$ 上，点 $N$ 在 $OB$ 上，$AM$ 与 $CN$ 相交于点 $P$，且$\angle DAP=\frac{1}{n}\angle DAB$．$\angle DCP=\frac{1}{n}\angle DCB$，其中 $n$ 为大于 1 的自然数（如图 3）．$\angle P$ 与$\angle D$、$\angle B$ 之间又存在着怎样的数量关系？请直接写出你的探索结果，不必说明理由.

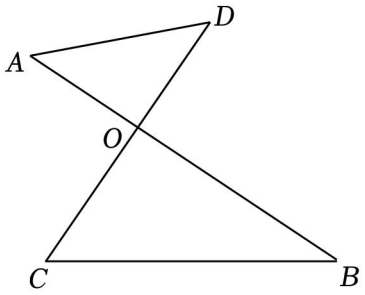


图1

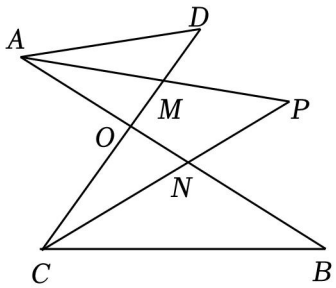


图2

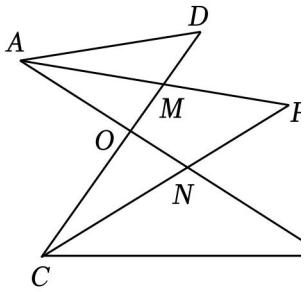


图3

【考点】三角形内角和定理.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】（1）∠$A$、∠$B$、∠$C$、∠$D$ 所在的两个三角形中，有一对对顶角相等，根据三角形的内角和定理得出数量关系；

（2）先根据“8 字形”中的角的规律，可得∠$DAP$+∠$D$＝∠$P$+∠$DCP$①，∠$PCB$+∠$B$＝∠$PAB$+∠$P$②，再根据角平分线的定义，得出∠$DAP$＝∠$PAB$，∠$DCP$＝∠$PCB$，将①+②，可得 2∠$P$＝∠$D$+∠$B$；

（3）证明方法类似（2）.

【解答】解：（1）∵∠$A$+∠$D$+∠$AOD$＝180°，∠$B$+∠$C$+∠$BOC$＝180°，

又∵∠$AOD$＝∠$BOC$，

∴∠$A$+∠$D$＝∠$B$+∠$C$；

（2）2∠$P$＝∠$D$+∠$B$，理由如下：

由（1）可知，∠1+∠$D$＝∠$P$+∠3，①

∠4+∠$B$＝∠2+∠$P$，②

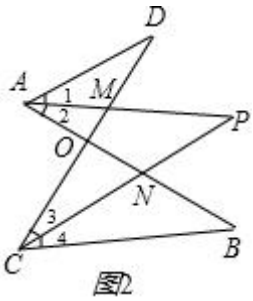


图2

∵∠$DAB$ 和∠$BCD$ 的平分线 $AP$ 和 $CP$ 相交于点 $P$，

∴∠1＝∠2，∠3＝∠4，

由①+②得：∠1+∠$D$+∠4+∠$B$＝∠$P$+∠3+∠2+∠$P$，

即 2∠$P$＝∠$D$+∠$B$；

（3）结论：$\angle P$ 与 $\angle D$、$\angle B$ 之间存在的关系为 $\angle P=\frac{(n-1)\cdot\angle D+\angle B}{n}$，

∵ $\angle 1+\angle D=\angle P+\angle 3$，①

$\angle 4+\angle B=\angle 2+\angle P$，②

∵ $\angle 1=\frac{1}{n}\angle DAB$．$\angle 3=\frac{1}{n}\angle DCB$，

∴ $\angle DAB=n\angle 1$，$\angle DCB=n\angle 3$，

∵ $\angle 1+\angle 2=\angle DAB$，$\angle 3+\angle 4=\angle DCB$，

∴ $\angle 1+\angle 2=n\angle 1$，$\angle 3+\angle 4=n\angle 3$，

∴ $\angle 1=\frac{1}{n-1}\angle 2$，$\angle 3=\frac{1}{n-1}\angle 4$，

由（$n$ - 1）①+②得：（$n$ - 1）（$\angle 1+\angle D$）+$\angle 4+\angle B$=（$n$ - 1）（$\angle P+\angle 3$）+$\angle 2+\angle P$，

即 $n\angle P$=（$n$ - 1）•$\angle D+\angle B$，

∴ $\angle P=\frac{(n-1)\cdot\angle D+\angle B}{n}$.

【点评】本题主要考查了三角形内角和定理，以及角平分线的定义，考查了学生的阅读理解与知识的迁移能力．解决问题的关键是根据三角形内角和定理得出“8 字形”中的角的规律，以及直接运用“8 字形”中的角的规律解题．

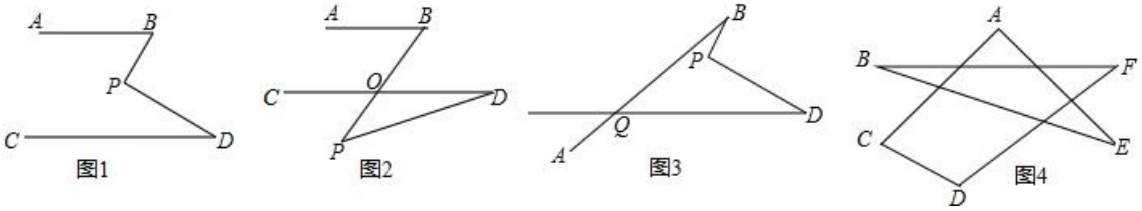
11．（2019 秋•陈仓区期末）平面内的两条直线有相交和平行两种位置关系．

（1）如图 1，若 $AB\parallel CD$，点 $P$ 在 $AB$、$CD$ 内部，$\angle B=50°$，$\angle D=30°$，求 $\angle BPD$．

（2）如图 2，将点 $P$ 移到 $AB$、$CD$ 外部，则 $\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$ 之间有何数量关系？请证明你的结论．

（3）如图 3，写出 $\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$、$\angle BQD$ 之间的数量关系？（不需证明）

（4）如图 4，求出 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数．




【考点】平行线的性质；三角形内角和定理；三角形的外角性质．

【分析】（1）过点 $P$ 作 $PE\parallel AB$，根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle B=\angle 1$，$\angle D=\angle 2$，再根据 $\angle BPD=\angle 1+\angle 2$ 代入数据计算即可得解；

（2）根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle BOD=\angle B$，然后根据三角形的一个外角等于

与它不相邻的两个内角的和列式整理即可得解；

（3）连接 $QP$ 并延长，再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和解答；

（4）根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得 $\angle A+\angle E=\angle 1$，$\angle B+\angle F=\angle 2$，再根据四边形的内角和定理列式计算即可得解．

【解答】解：（1）过点 $P$ 作 $PE\parallel AB$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore AB\parallel EP\parallel CD$，

$\therefore \angle B=\angle 1=50^\circ$，$\angle D=\angle 2=30^\circ$，

$\therefore \angle BPD=80^\circ$；

（2）$\angle B=\angle BPD+\angle D$．

理由如下：设 $BP$ 与 $CD$ 相交于点 $O$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle BOD=\angle B$，

在△$POD$ 中，$\angle BOD=\angle BPD+\angle D$，

$\therefore \angle B=\angle BPD+\angle D$．

（3）如图，连接 $QP$ 并延长，

结论：$\angle BPD=\angle BQD+\angle B+\angle D$．

（4）如图，由三角形的外角性质，$\angle A+\angle E=\angle 1$，$\angle B+\angle F=\angle 2$，

$\because \angle 1+\angle 2+\angle C+\angle D=360^\circ$，

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360^\circ$．

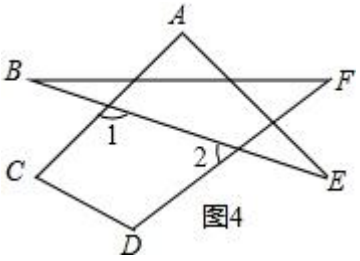
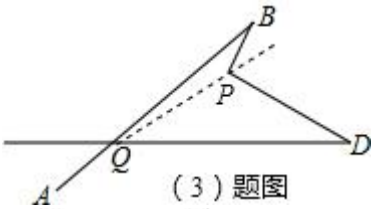
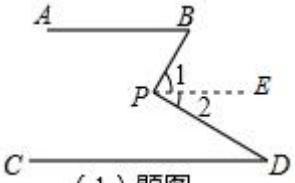


图4



（3）题图



（1）题图

【点评】本题考查了平行线的性质，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，熟记性质并作出辅助线是解题的关键．

12．（2018秋•兰州期末）探究与发现：如图1所示的图形，像我们常见的学习用品－－圆规．我们不妨把这样图形叫做“规形图”，

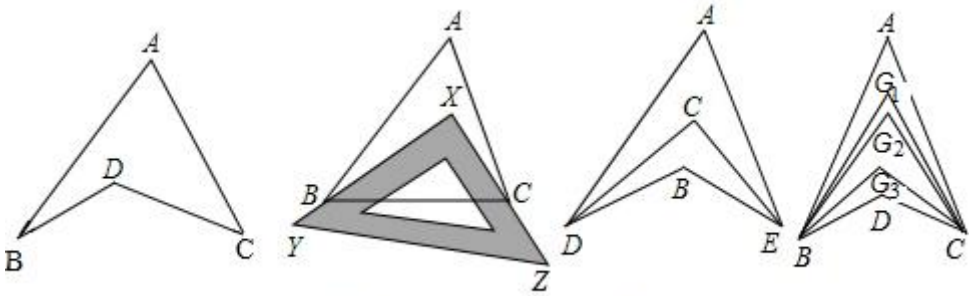
（1）观察“规形图”，试探究∠*BDC*与∠*A*、∠*B*、∠*C*之间的关系，并说明理由；

（2）请你直接利用以上结论，解决以下三个问题：

①如图2，把一块三角尺*XYZ*放置在△*ABC*上，使三角尺的两条直角边*XY*、*XZ*恰好经过点*B*、*C*，∠*A*＝40°，则∠*ABX*+∠*ACX*＝__50__°；

②如图3，*DC*平分∠*ADB*，*EC*平分∠*AEB*，若∠*DAE*＝40°，∠*DBE*＝130°，求∠*DCE*的度数；

③如图4，∠*ABD*，∠*ACD*的10等分线相交于点$G_1$、$G_2$…、$G_9$，若∠*BDC*＝133°，∠$BG_1C$＝70°，求∠*A*的度数．



图（1）　图（2）　图（3）　图（4）

【考点】三角形内角和定理；三角形的外角性质．

【专题】探究型．

【分析】（1）首先连接*AD*并延长至点*F*，然后根据外角的性质，即可判断出∠*BDC*＝∠*A*+∠*B*+∠*C*．

（2）①由（1）可得∠*ABX*+∠*ACX*+∠*A*＝∠*BXC*，然后根据∠*A*＝40°，∠*BXC*＝90°，

求出$\angle ABX+\angle ACX$的值是多少即可.

②由（1）可得$\angle DBE=\angle DAE+\angle ADB+\angle AEB$，再根据$\angle DAE=40°$，$\angle DBE=130°$，求出$\angle ADB+\angle AEB$的值是多少；然后根据$\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle AEB)+\angle DAE$，求出$\angle DCE$的度数是多少即可.

③根据$\angle BG_1C=\frac{1}{10}(\angle ABD+\angle ACD)+\angle A$，$\angle BG_1C=70°$，设$\angle A$为$x°$，可得$\angle ABD+\angle ACD=133°-x°$，解方程，求出$x$的值，即可判断出$\angle A$的度数是多少.

【解答】解：（1）如图（1），连接$AD$并延长至点$F$，

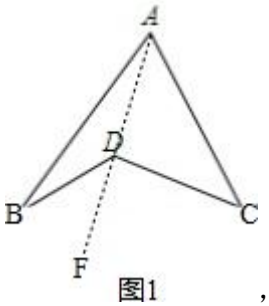


图1，

根据外角的性质，可得

$\angle BDF=\angle BAD+\angle B$，$\angle CDF=\angle C+\angle CAD$，

又∵$\angle BDC=\angle BDF+\angle CDF$，$\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$，

∴$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$.

（2）①由（1），可得

$\angle ABX+\angle ACX+\angle A=\angle BXC$，

∵$\angle A=40°$，$\angle BXC=90°$，

∴$\angle ABX+\angle ACX=90°-40°=50°$.

②由（1），可得

$\angle DBE=\angle DAE+\angle ADB+\angle AEB$，

∴$\angle ADB+\angle AEB=\angle DBE-\angle DAE=130°-40°=90°$，

∴$\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle AEB)=90°\div 2=45°$，

∴$\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle AEB)+\angle DAE$

$=45°+40°$

$=85°$．

③$\angle BG_1C=\frac{1}{10}$（$\angle ABD+\angle ACD$）$+\angle A$，

∵$\angle BG_1C=70°$，

∴设$\angle A$为$x°$，

∵$\angle ABD+\angle ACD=133°-x°$

∴$\frac{1}{10}$（$133-x$）$+x=70$，

∴$13.3-\frac{1}{10}x+x=70$，

解得$x=63$

即$\angle A$的度数为63°．

故答案为：50．

【点评】（1）此题主要考查了三角形的内角和定理，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：三角形的内角和是180°．

（2）此题还考查了三角形的外角的性质，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：三角形的外角等于和它不相邻的两个内角的和．

13．（2017春•鼓楼区校级期中）我们容易证明，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．那么，三角形的一个内角与它不相邻的两个外角的和之间存在怎样的数量关系呢？

尝试探究：

（1）如图1，$\angle DBC$与$\angle ECB$分别为$\triangle ABC$的两个外角，试探究$\angle A$与$\angle DBC+\angle ECB$之间的数量关系．

初步应用：

（2）如图2，在$\triangle ABC$纸片中剪去$\triangle CED$，得到四边形$ABDE$，$\angle 1=135°$，则$\angle 2-\angle C=$__45°____．

（3）解决问题：如图3，在$\triangle ABC$中，$BP$、$CP$分别平分外角$\angle DBC$、$\angle ECB$，$\angle P$与$\angle A$有何数量关系？请利用上面的结论直接写出答案__$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle A$__．

（4）如图4，在四边形$ABCD$中，$BP$、$CP$分别平分外角$\angle EBC$、$\angle FCB$，请利用上面的结论探究$\angle P$与$\angle A$、$\angle D$的数量关系．

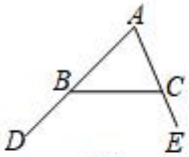


图1

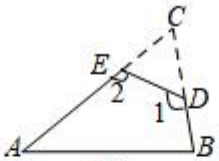


图2

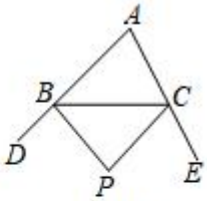


图3

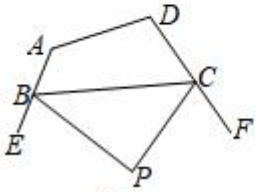


图4

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题.

【分析】（1）根据三角形外角的性质得：∠$DBC$＝∠$A$+∠$ACB$，∠$ECB$＝∠$A$+∠$ABC$，两式相加可得结论；

（2）利用（1）的结论：∵∠2+∠1﹣∠$C$＝180°，将∠1＝135°代入可得结论；

（3）根据角平分线的定义得：$\angle CBP=\frac{1}{2}\angle DBC$，$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle ECB$，根据三角形内角和可得：∠$P$ 的式子，代入（1）中得的结论：∠$DBC$+∠$ECB$＝180°+∠$A$，可得：$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle A$；

（4）根据平角的定义得：∠$EBC$＝180°﹣∠1，∠$FCB$＝180°﹣∠2，由角平分线得：$\angle 3=\frac{1}{2}\angle EBC=90°-\frac{1}{2}\angle 1$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle FCB=90°-\frac{1}{2}\angle 2$，相加可得：$\angle 3+\angle 4=180°-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$，再由四边形的内角和与三角形的内角和可得结论.

【解答】解：（1）∠$DBC$+∠$ECB$﹣∠$A$＝180°，

理由是：∵∠$DBC$＝∠$A$+∠$ACB$，∠$ECB$＝∠$A$+∠$ABC$，

∴∠$DBC$+∠$ECB$＝2∠$A$+∠$ACB$+∠$ABC$＝180°+∠$A$，

∴∠$DBC$+∠$ECB$﹣∠$A$＝180°.

（2）∠2﹣∠$C$＝45°.

理由是：∵∠2+∠1﹣∠$C$＝180°，∠1＝135°，

∴∠2﹣∠$C$+135°＝180°，

∴∠2﹣∠$C$＝45°.

故答案为：45°；

（3）$\angle P=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，

理由是：∵$BP$ 平分$\angle DBC$，$CP$ 平分$\angle ECB$，

∴$\angle CBP=\frac{1}{2}\angle DBC$，$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle ECB$，

∵$\triangle BPC$ 中，$\angle P=180^\circ-\angle CBP-\angle BCP=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle DBC+\angle ECB)$，

∵$\angle DBC+\angle ECB=180^\circ+\angle A$，

∴$\angle P=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ+\angle A)$，$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

故答案为：$\angle P=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，

（4）$\angle P=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$.

理由是：∵$\angle EBC=180^\circ-\angle 1$，$\angle FCB=180^\circ-\angle 2$，

∵$BP$ 平分$\angle EBC$，$CP$ 平分$\angle FCB$，

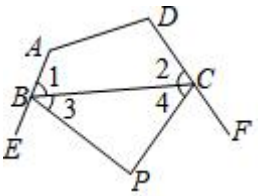
∴$\angle 3=\frac{1}{2}\angle EBC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 1$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle FCB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 2$，

∴$\angle 3+\angle 4=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$，

∵四边形 $ABCD$ 中，$\angle 1+\angle 2=360^\circ-(\angle A+\angle D)$，

又∵$\triangle PBC$ 中，$\angle P=180^\circ-(\angle 3+\angle 4)=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$，

∴$\angle P=\frac{1}{2}\times[360^\circ-(\angle A+\angle D)]=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$.




【点评】本题是四边形和三角形的综合问题，考查了三角形和四边形的内角和定理、三角形外角的性质、角平分线的定义等知识，难度适中，熟练掌握三角形外角的性质是关键.

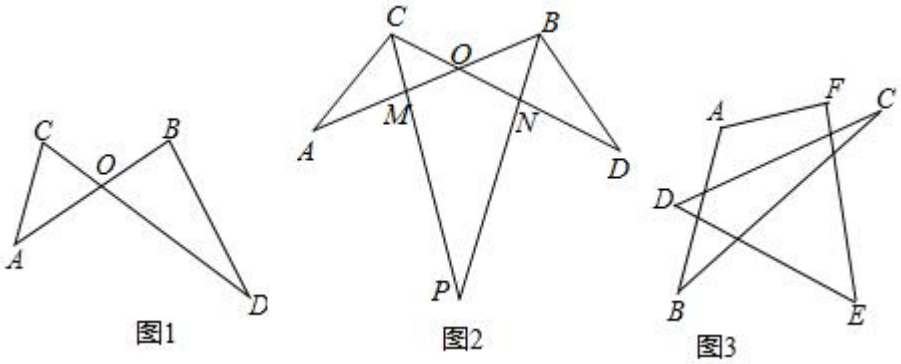
14.（2017 春•亭湖区校级月考）如图 1，已知线段 $AB$、$CD$ 相交于点 $O$，连接 $AC$、$BD$，我们把形如图 1 的图形称之为“对顶三角形”．如图 2，$\angle ACO$ 和$\angle DBO$ 的平分线 $CP$ 和 $BP$ 相交于点 $P$，并且与 $AB$、$CD$ 分别相交于 $M$、$N$．试解答下列问题：

（1）仔细观察，在图 2 中有__4__个以线段 $OC$ 为边的“对顶三角形”；

（2）在图 2 中，若∠$A$＝40°，∠$D$＝50°，求∠$P$ 的度数．

（3）在图 2 中，若设∠$A$＝α，∠$D$＝β，∠$ACP$＝∠$PCD$，∠$ABP$＝∠$PBD$，试问∠$P$ 与∠$A$、∠$D$ 之间存在着怎样的数量关系（用α、β表示∠$P$），并说明理由；

（4）如图 3，则∠$A$+∠$B$+∠$C$+∠$D$+∠$E$+∠$F$ 的度数为__360°____．




【考点】三角形综合题．

【分析】（1）根据“对顶三角形”的定义容易得出结果；

（2）由角平分线得出∠$ACP$＝∠$DCP$，∠$ABP$＝∠$DBP$，由三角形内角和定理和对顶角相等得出∠$ACP$+∠$A$＝∠$ABP$+∠$P$，∠$DCP$+∠$P$＝∠$DBP$+∠$D$，得出∠$A$﹣∠$P$＝∠$P$﹣∠$D$，即可得出结果；

（3）由角平分线得出∠$ACP$＝∠$DCP$，∠$ABP$＝∠$DBP$，由三角形内角和定理和对顶角相等得出∠$ACP$+∠$A$＝∠$ABP$+∠$P$，∠$DCP$+∠$P$＝∠$DBP$+∠$D$，得出∠$A$﹣∠$P$＝∠$P$﹣∠$D$，即可得出结论；

（4）由三角形的外角性质得出∠1＝∠$MGE$+∠$E$，∠$MGE$＝∠$C$+∠$D$，∴∠1＝∠$C$+∠$D$+∠$E$，在四边形 $ABMF$ 中，由四边形内角和即可得出结果．

【解答】解：（1）在图 2 中有 4 个以线段 $OC$ 为边的“对顶三角形”；

故答案为：4；

（2）∵∠$ACO$ 和∠$DBO$ 的平分线 $CP$ 和 $BP$ 相交于点 $P$，

∴∠$ACP$＝∠$DCP$，∠$ABP$＝∠$DBP$，

∵∠$ACP$+∠$A$＝∠$ABP$+∠$P$，∠$DCP$+∠$P$＝∠$DBP$+∠$D$，

∴∠$A$﹣∠$P$＝∠$P$﹣∠$D$，

∴∠$P$=$\frac{1}{2}$（∠$A$+∠$D$），

∵∠$A$＝40°，∠$D$＝50°，

∴∠$P$=$\frac{1}{2}$（40°+50°）＝45°；

（3）$\angle P=\frac{1}{2}$（α+β），理由如下：

∵$\angle ACO$ 和 $\angle DBO$ 的平分线 $CP$ 和 $BP$ 相交于点 $P$，

∴$\angle ACP=\angle DCP$，$\angle ABP=\angle DBP$，

∵$\angle ACP+\angle A=\angle ABP+\angle P$，$\angle DCP+\angle P=\angle DBP+\angle D$，

∴$\angle A-\angle P=\angle P-\angle D$，

∴$\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$，

∴$\angle P=\frac{1}{2}$（α+β）；

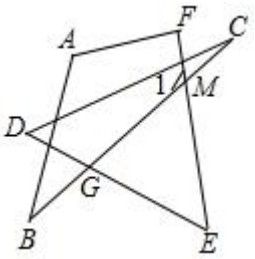
（4）如图所示：

由三角形的外角性质得：$\angle 1=\angle MGE+\angle E$，$\angle MGE=\angle C+\angle D$，

∴$\angle 1=\angle C+\angle D+\angle E$，

在四边形 $ABMF$ 中，$\angle A+\angle B+\angle 1+\angle F=360°$，

∴$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360°$．




【点评】本题是四边形综合题目，考查了角平分线定义、“对顶三角形”定义、三角形内角和定理、四边形内角和定理、三角形的外角性质等知识；熟练掌握三角形内角和定理和四边形内角和定理是解决问题的关键．

15．（2016 春•盐都区期中）【课本拓展】

我们容易证明，三角形的一个外角等于它不相邻的连个内角的和，那么，三角形的一个内角与它不相邻的两个外角的和之间存在怎样的数量关系呢？

【尝试探究】

（1）如图 1，$\angle DBC$ 与 $\angle ECB$ 分别为△$ABC$ 的两个外角，试探究 $\angle A$ 与 $\angle DBC+\angle ECB$ 之间存在怎样的数量关系？为什么？

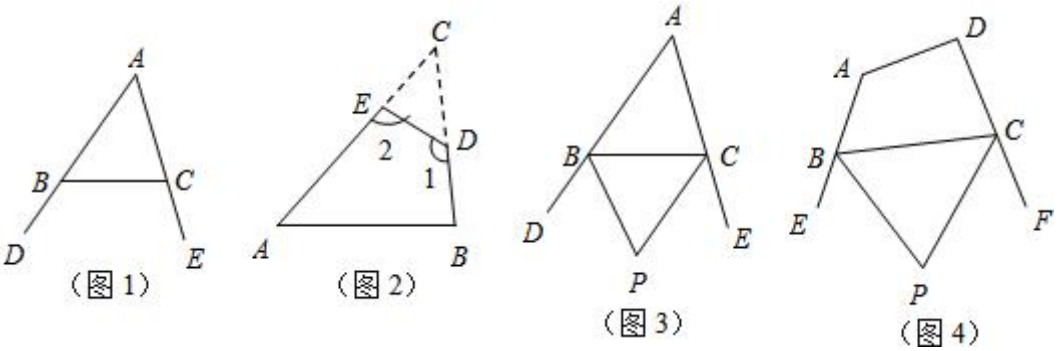
【初步应用】

（2）如图 2，在△$ABCA$ 纸片中剪去△$CED$，得到四边形 $ABDE$，$\angle 1=130°$，则 $\angle 2-\angle C=$ __50°____；

（3）小明联想到了曾经解决的一个问题：如图 3，在△$ABC$ 中，$BP$、$CP$ 分别平分外角∠$DBC$、∠$ECB$，∠$P$ 与∠$A$ 有何数量关系？请直接写出结论．

【拓展提升】

（4）如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，$BP$、$CP$ 分别平分外角∠$EBC$、∠$FCB$、∠$P$ 与∠$A$、∠$D$ 有何数量关系？为什么？（若需要利用上面的结论说明，可直接使用，不需说明理由）




【考点】三角形综合题．

【专题】综合题．

【分析】（1）根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得∠$FDC$＝∠$A$+∠$ACD$，∠$ECD$＝∠$A$+∠$ADC$，再根据三角形内角和定理整理即可得解；

（2）利用（1）中的结论即可求出；

（3）根据角平分线的定义可得∠$PCE$=$\frac{1}{2}$∠$BCE$，∠$PBD$=$\frac{1}{2}$∠$CBD$，然后根据三角形内角和定理列式整理即可得解；

（4）根据四边形的内角和定理表示出∠$BAD$+∠$CDA$，然后同理（3）解答即可．

【解答】解：（1）∠$DBC$+∠$ECB$

＝180°﹣∠$ABC$+180°﹣∠$ACB$

＝360°﹣（∠$ABC$+∠$ACB$）

＝360°﹣（180°﹣∠$A$）

＝180°+∠$A$；

（2）∵∠1+∠2＝∠180°+∠$C$，

∴130°+∠2＝180°+∠$C$，

∴∠2﹣∠$C$＝50°．

故答案为 50°．

（3）∵$BP$，$CP$ 分别是外角$\angle DBC$，$\angle ECB$ 的平分线，

∴$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}$（$\angle DBC+\angle ECB$）$=\frac{1}{2}$（180°－$\angle A$），

在△$PBC$ 中，$\angle P=180°-\frac{1}{2}$（180°－$\angle A$）$=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

（4）如图 1，

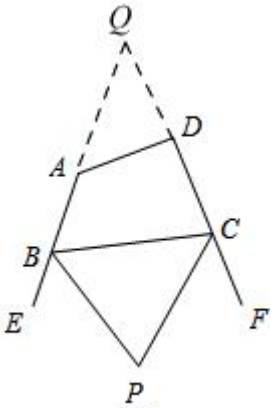


图1

延长 $BA$、$CD$ 于 $Q$，

则$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle Q$，

∴$\angle Q=180°-2\angle P$.

∴$\angle BAD+\angle CDA$

$=180°+\angle Q$

$=180°+180°-2\angle P$

$=360°-2\angle P$.

【点评】本题是三角形综合题，考查了三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，三角形的内角和定理，角平分线的定义，熟记性质并读懂题目信息是解题的关键.

# 考点卡片

**1．二次函数综合题**

（1）二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时，先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号，然后判断新的函数关系式中系数的符号，再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征，则符合所有特征的图象即为正确选项．

（2）二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起．这类试题一般难度较大．解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题，善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识，并注意挖掘题目中的一些隐含条件．

（3）二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系，建立二次函数模型．关键在于观察、分析、创建，建立直角坐标系下的二次函数图象，然后数形结合解决问题，需要我们注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义．

**2．平行线的性质**

1、平行线性质定理

定理 1：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等． 简单说成：两直线平行，同位角相等．

定理 2：两条平行线被地三条直线所截，同旁内角互补．．简单说成：两直线平行，同旁内角互补．

定理 3：两条平行线被第三条直线所截，内错角相等． 简单说成：两直线平行，内错角相等．

2、两条平行线之间的距离处处相等．

**3．三角形内角和定理**

（1）三角形内角的概念：三角形内角是三角形三边的夹角．每个三角形都有三个内角，且每个内角均大于 0°且小于 180°．

（2）三角形内角和定理：三角形内角和是 180°．

（3）三角形内角和定理的证明

证明方法，不唯一，但其思路都是设法将三角形的三个内角移到一起，组合成一个平角．在

转化中借助平行线．

（4）三角形内角和定理的应用

主要用在求三角形中角的度数．①直接根据两已知角求第三个角；②依据三角形中角的关系，用代数方法求三个角；③在直角三角形中，已知一锐角可利用两锐角互余求另一锐角．

**4．三角形的外角性质**

（1）三角形外角的定义：三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的外角．三角形共有六个外角，其中有公共顶点的两个相等，因此共有三对．

（2）三角形的外角性质：

①三角形的外角和为360°．

②三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和．

③三角形的一个外角大于和它不相邻的任何一个内角．

（3）若研究的角比较多，要设法利用三角形的外角性质②将它们转化到一个三角形中去．

（4）探究角度之间的不等关系，多用外角的性质③，先从最大角开始，观察它是哪个三角形的外角．

**5．三角形综合题**

三角形综合题．

**6．四边形综合题**

四边形综合题．

**7．圆的综合题**

圆的综合题．