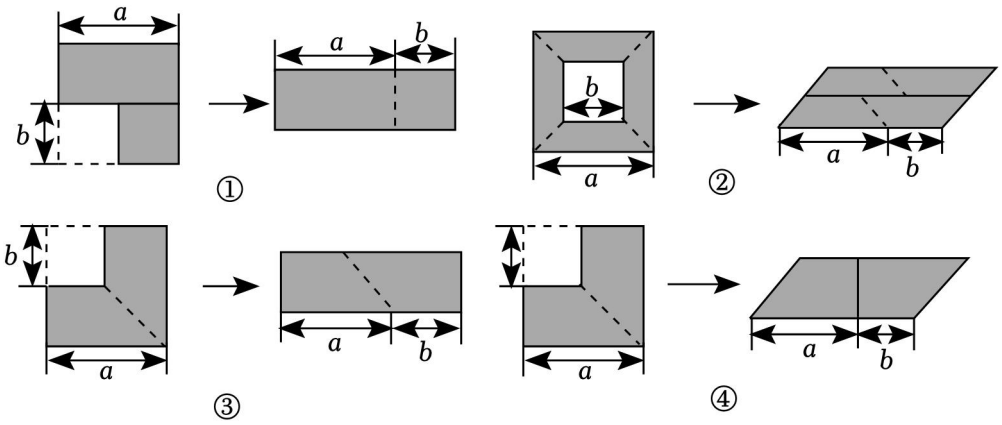
2023年中考数学复习探究性试题汇编之乘法公式

一．选择题（共3小题）

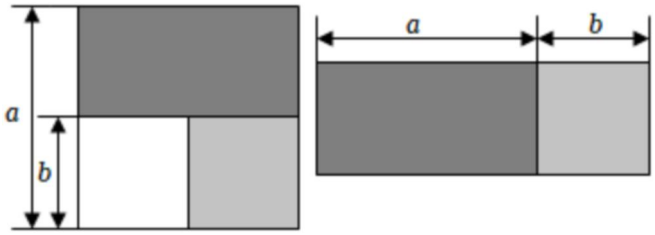
1．（2022秋•定襄县期末）如图，阴影部分是在一个边长为a的大正方形中剪去一个边长为b的小正方形后得到的图形，将阴影部分通过割、拼，形成新的图形．给出下列四种割拼方法，每种割拼方法都能够验证平方差公式，其中用到的数学思想是（　　）



A．数形结合思想　　B．分类思想

C．公理化思想　　D．函数思想

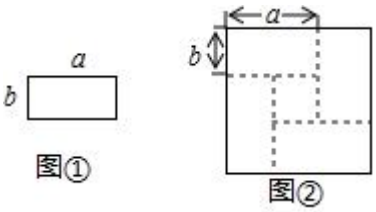
2．（2022秋•德城区校级期末）从边长为a的正方形中去掉一个边长为b的小正方形，如图，然后将剩余部分剪后拼成一个矩形，上述操作所能验证的等式是（　　）



A．$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　B．$a^2-b^2=a^2-2ab+b^2$

C．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　D．$a^2+ab=a(a+b)$

3．（2022秋•广宗县期末）小张利用如图①所示的长为a、宽为b的长方形卡片4张，拼成了如图②所示的图形，则根据图②的面积关系能验证的恒等式为（　　）

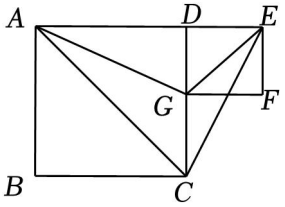


A．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　B．$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$

C．$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$　　D．$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

二．填空题（共 4 小题）

4．（2022 秋•忠县期末）如图所示，若大正方形 $ABCD$ 与小正方形 $DEFG$ 的面积之差是 20，则△ACG 与△CGE 的面积之和是 _____．



5．（2022 秋•湖里区期末）在一个面积为 $36cm^2$ 正方形纸板中剪下边长为 acm 大正方形和边长为 bcm 的小正方形（如图 1），再在大正方形沿一个顶点剪下一个边长为 bcm 的小正方形（如图 2），得到一个周长为 $16cm$ 的六边形 $ABCDEF$，则原大正方形中剩下的两个长方形的面积和为 _____cm^2．

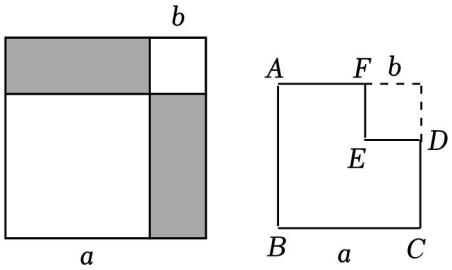
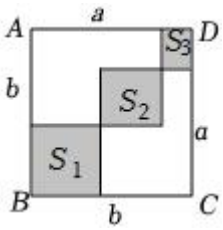
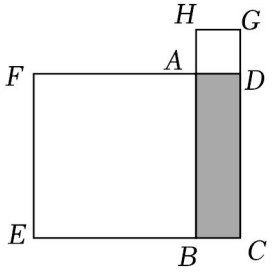


图1　　图2

6．（2022 秋•荆门期末）如图，边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中放置两个长和宽分别为 a，b（$a<6$，$b<6$）的长方形，若长方形的周长为 16，面积为 15.75，则图中阴影部分面积 $S_1+S_2+S_3=$_____．



7．（2022 春•新城区校级期中）如图，长方形 $ABCD$ 的周长是 $12cm$，以 AB，AD 为边向外作正方形 $ABEF$ 和正方形 $ADGH$，若正方形 $ABEF$ 和 $ADGH$ 的面积之和为 $26cm^2$，那么长方形 $ABCD$ 的面积是 _____．



三．解答题（共 8 小题）

8．（2022 秋•丰都县期末）教材 113 页《阅读与思考》谈到：我国古代数学的许多创新与发展都居世界前列，其中杨辉三角就是一例：在我国南宋数学家杨辉（约 13 世纪）所著的《详解九章算术》（1261 年）一书中，用如图的三角形解释二项和的乘方规律，法国数学家帕斯卡于 1654 年才发现此三角形，比中国晚了几百年，杨辉在注释中提到，在他之前北宋数学家贾宪（1050 年左右）也用过这种方法，因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”．此图揭示了（$a+b$）^{n}（n 为非负整数）的展开式的项数及各项系数的有关规律：

（1）直接写出（$a+b$）^{5} 的展开式（$a+b$）^{5}＝_____；

（2）（$a+b$）^{10} 的展开式中共有 _____项，所有项的系数和为 _____；

（3）此规律还可以解决实际问题：如果今天是星期四，再过 7 天还是星期四，那么再过 8^7 天是星期几？简要写出计算（推理）过程．

1

1　1　　…… $(a+b)^1=a+b$

1　2　1　　…… $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

1　3　3　1　　…… $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

1　4　( )　( )　1　…… $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2$……

9．（2022 秋•禹州市期末）数学活动课上，老师把一个边长为 $a+b$ 的正方形分割成 4 块，如图所示．

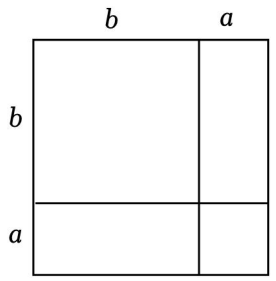
（1）请用两种不同的方法表示出图中大正方形的面积：方法 1：_____；方法 2：_____．

（2）观察图形，请你写出代数式（$a+b$）^{2}、a^2+b^2、ab 之间的等量关系：_____．

（3）根据（2）题中的等量关系，解决如下问题：

①已知 $a+b=6$，$a^2+b^2=14$，求 ab 的值；

②若 $x^2-4x+1=0$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$的值．



10．（2022秋•泉州期末）[阅读]“若 x 满足（$10-x$）（$x-3$）＝17，求（$10-x$）^{2}+（$x-3$）^{2} 的值”.

设 $10-x=a$，$x-3=b$，

则（$10-x$）（$x-3$）＝ab＝17，$a+b$＝（$10-x$）+（$x-3$）＝7，

（$10-x$）^{2}+（$x-3$）^{2}＝a^2+b^2＝（$a+b$）$^2-2ab=7^2-2\times17=15$.

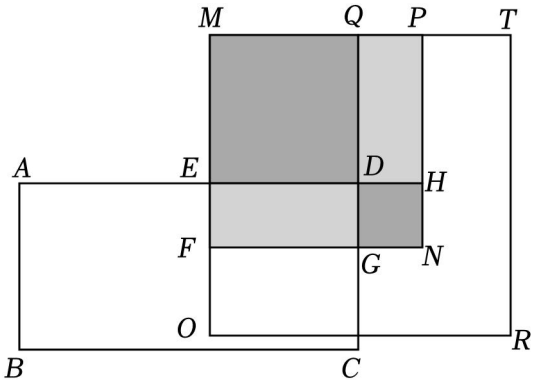
（1）[理解]

①若 x 满足（$50-x$）（$x-35$）＝100，则（$50-x$）^{2}+（$x-35$）^{2} 的值为 _____；

②若 x 满足（$x-1$）（$3x-7$）＝$\frac{7}{6}$，试求（$7-3x$）^{2}+9（$x-1$）^{2} 的值；

（2）[应用]

如图，长方形 $ABCD$ 中，$AD=2CD=2x$，$AE=44$，$CG=30$，长方形 $EFGD$ 的面积是 200，四边形 $NGDH$ 和 $MEDQ$ 都是正方形，四边形 $PQDH$ 是长方形．延长 MP 至 T，使 $PT=PQ$，延长 MF 至 O，使 $FO=FE$，过点 O、T 作 MO、MT 的垂线，两垂线相交于点 R，求四边形 $MORT$ 的面积．（结果必须是一个具体的数值）



11．（2022秋•宛城区校级期末）在数学课本第12章《整式乘除》里学习了两数和的平方公式，还记得它是如何被发现的吗？

如图1的面积，把图1看做一个大正方形，它的面积是（$a+b$）^{2}，如果把图1看做是由2个长方形形和2个小正方形组成的，它的面积为 $a^2+2ab+b^2$，由此得到：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

类比探究一：

（1）如图 2，正方形 $ABCD$ 是由四个边长分别是 a，b 的长方形和中间一个小正方形组成的，用不同的法对图 2 的面积进行计算，你发现的等式是 _____（用 a，b 表示）；

类比探究二：

（2）如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长是 c，它由四个直角边长分别是 a，b 的直角三角形和中间一个小正形组成的，对图 3 的面积进行计算，你发现的式子是 _____

（用 a，b，c 表示，结果化为最简）；

应用探索结果解决问题：

（3）如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长是 c，它由四个直角边长分别是 a，b 的角三角形和中间一个小正方形组成的，当 $c=5$，$a-b=1$ 时，求 $a+b$ 的值．

（4）如图 4，将四个全等的直角三角形无缝隙无重叠地拼接在一起，得到图形 $ABCDEFGH$．若该图形的周长为 80，$OA=12$．则该图形的面积为 _____．

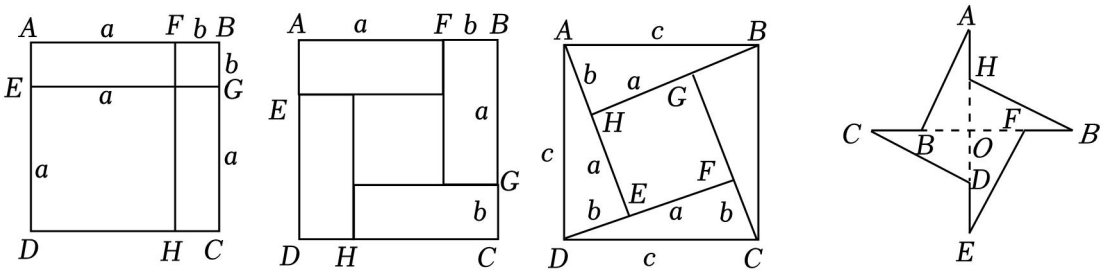


图1　　图2　　图3　　图4

12．（2022 秋•盐山县校级期末）材料准备：如图①的三种纸片，A 种纸片是边长为 a 的正方形，B 种纸片是边长为 b 的正方形，C 种纸片是长为 b，宽为 a 的长方形，并用 A 种纸片一张，B 种纸片一张，C 种纸片两张拼成如图②的大正方形．

解决问题：（1）观察图②，写出代数式 $(a+b)^2$，a^2+b^2，ab 之间的等量关系是 _____；

（2）根据（1）中的等量关系，解决下面问题：已知 $a+b=4$，$a^2+b^2=10$，求 ab 的值；

（3）若有 3 张边长为 a 的正方形纸片，4 张边长分别为 a，b（$a<b$）的长方形纸片，5 张边长为 b 的正方形纸片，现从其中取出若干张纸片（每种纸片至少取一张），拼成一个正方形（不重叠无缝隙），则所拼成的正方形的边长最长可以为 _____．

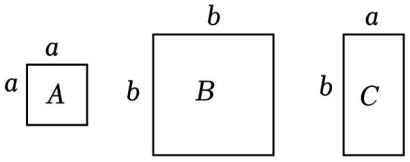
A．$a+b$

B．$2a+b$

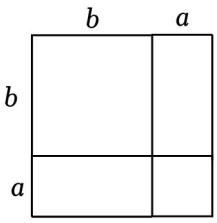
C．$3a+b$

D．$a+2b$

并画出所拼的正方形（模仿图②标注长度数据）．



图①



图②

13．（2022秋•南阳期末）阅读下列材料，完成后面的任务．

完全平方公式的变形及其应用．

我们知道，完全平方公式有：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$．

在解题过程中，根据题意，若将公式进行变形，则可以达到快速求解的目的，其变形主要有下列几种情形：

①$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$；②$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$；

③$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$；④$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$．

根据上述公式的变形，可以迅速地解决相关问题．

例如：已知 $x+y=3$，$x-y=1$，求 x^2+y^2 的值．

解：$x^2+y^2=\frac{1}{2}[(x+y)^2+(x-y)^2]=\frac{1}{2}\times(3^2+1^2)=5$．

任务：（1）已知 $x+y=5$，$x-y=3$，则 $xy=$_____．

（2）已知 $x+y=7$，$x^2+y^2=25$，求 $(x-y)^2$ 的值．

14．（2022秋•合肥期末）如图1，边长为 a 的大正方形剪去一个边长为 b 的小正方形，然后将图1中的阴影部分拼成一个长方形（如图2所示）．

（1）上述操作能验证的等式是 _____（用 a，b 表示）；

（2）请利用你从（1）得出的等式，完成下列各题：

①已知 $9a^2-b^2=27$，$3a+b=9$，则 $3a-b=$_____；

②计算：$(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{2022^2})$．

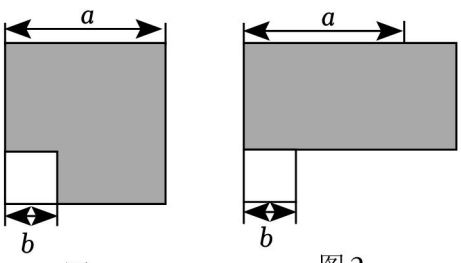


图1　　图2

15.（2022秋•南关区校级期末）如图1，三种纸片A、B、C分别是边长为a的正方形，边长为b的正方形和宽与长分别为a与b的长方形．

（1）数学课上，老师用图1中的一张纸片A，一张纸片B和两张纸片C，拼成了如图2所示的大正方形，由此可以得到的乘法公式是 _____；

（2）若小莉想用图1中的三种纸片拼出一个面积为$(2a+b)(a+b)$的大长方形，需要A、B、C三种纸片分别 _____张．

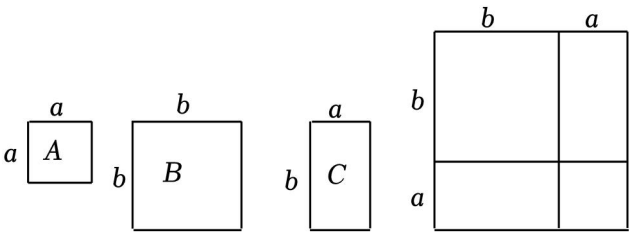


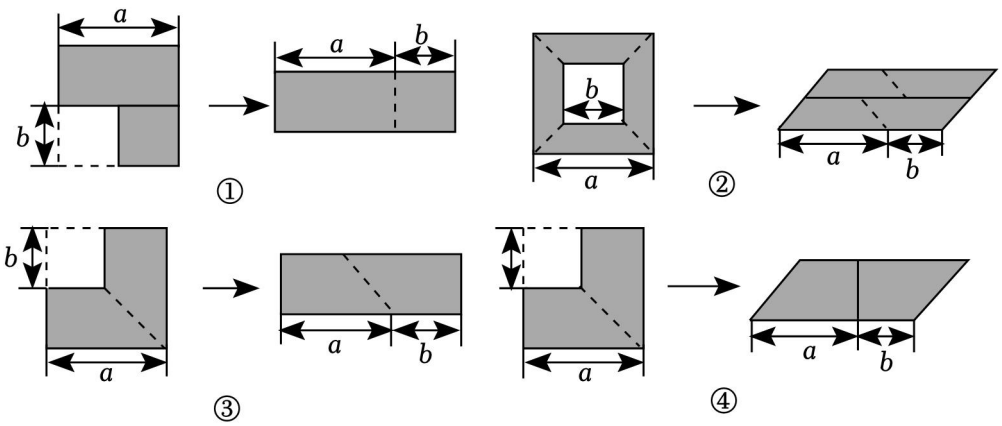
图1　　图2

2023年中考数学复习探究性试题汇编之乘法公式

参考答案与试题解析

一．选择题（共3小题）

1．（2022秋•定襄县期末）如图，阴影部分是在一个边长为a的大正方形中剪去一个边长为b的小正方形后得到的图形，将阴影部分通过割、拼，形成新的图形．给出下列四种割拼方法，每种割拼方法都能够验证平方差公式，其中用到的数学思想是（　　）



A．数形结合思想　　B．分类思想

C．公理化思想　　D．函数思想

【考点】平方差公式的几何背景．

【专题】数形结合；几何直观．

【分析】通过部分求和与整体计算两种方式对图形面积求解的方式验证了整式乘法的特殊方法“平方差公式”．

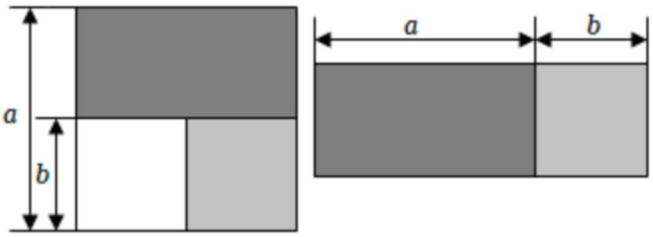
【解答】解：∵此题探究方法是通过对图形面积的不同求解方法验证了整式乘法的特殊方法“平方差公式”，

∴其中用到的数学思想是数形结合思想，

故选：A．

【点评】此题考查了运用数形结合数学思想解决数学问题的能力，关键是能准确理解并运用该数学思想．

2．（2022秋•德城区校级期末）从边长为a的正方形中去掉一个边长为b的小正方形，如图，然后将剩余部分剪后拼成一个矩形，上述操作所能验证的等式是（　　）



A．$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　B．$a^2-b^2=a^2-2ab+b^2$

C．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　D．$a^2+ab=a(a+b)$

【考点】平方差公式的几何背景．

【专题】整式；几何直观．

【分析】由大正方形的面积－小正方形的面积＝矩形的面积，进而可以证明平方差公式．

【解答】解：∵大正方形的面积－小正方形的面积＝a^2-b^2，

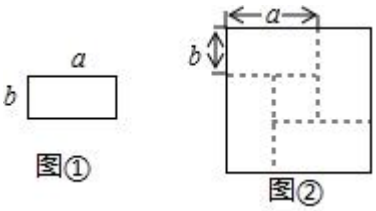
矩形的面积＝$(a+b)(a-b)$，

∴$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$．

故选：A．

【点评】本题主要考查平方差公式的几何意义，用两种方法表示阴影部分的面积是解题的关键．

3．（2022秋•广宗县期末）小张利用如图①所示的长为a、宽为b的长方形卡片4张，拼成了如图②所示的图形，则根据图②的面积关系能验证的恒等式为（　　）



A．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　B．$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$

C．$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$　　D．$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

【考点】完全平方公式的几何背景．

【专题】数形结合；整式；几何直观．

【分析】图②的面积可以整体表示为$(a+b)^2$，也可将各部分求和表示为$(a-b)^2+4ab$，由此可得此题结果．

【解答】解：∵用整体和各部分求和两种方法表示出图②的面积的面积各为：$(a+b)^2$和$(a-b)^2+4ab$，

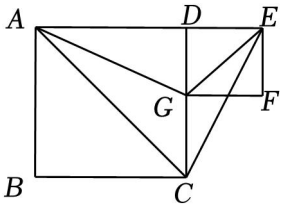
∴可得$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$，

故选：C．

【点评】此题考查对完全平方公式几何意义的理解，关键是能从整体和部分两方面来理解完全平方公式的几何意义．

二．填空题（共 4 小题）

4．（2022 秋•忠县期末）如图所示，若大正方形 $ABCD$ 与小正方形 $DEFG$ 的面积之差是 20，则△ACG 与△CGE 的面积之和是 __10__．



【考点】平方差公式的几何背景．

【专题】数形结合；整式；运算能力．

【分析】分别设大正方形 $ABCD$ 与小正方形 $DEFG$ 的边长各为 a，b，则 $a^2-b^2=20$，通过列式表示△ACG 与△CGE 的面积进行求解．

【解答】解：分别设大正方形 $ABCD$ 与小正方形 $DEFG$ 的边长各为 a，b，

由题意可得 $a^2-b^2=20$，

∴△ACG 与△CGE 的面积之和为：

$\frac{1}{2}(a-b)a+\frac{1}{2}(a-b)b$

$=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)$

$=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$

$=\frac{1}{2}\times 20$

$=10$，

故答案为：10．

【点评】此题考查了平方差公式几何背景问题的解决能力，关键是能准确列式表示所求图形的面积，并能运用平方差公式进行变形、求解．

5．（2022 秋•湖里区期末）在一个面积为 $36cm^2$ 正方形纸板中剪下边长为 acm 大正方形和边长为 bcm 的小正方形（如图 1），再在大正方形沿一个顶点剪下一个边长为 bcm 的小正方形（如图 2），得到一个周长为 $16cm$ 的六边形 $ABCDEF$，则原大正方形中剩下的两个长方形的面积和为 __16__ cm^2．

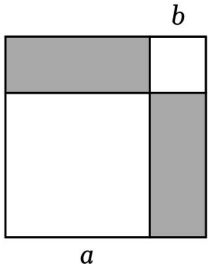


图1

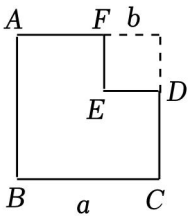


图2

【考点】完全平方公式的几何背景.

【专题】整式；运算能力.

【分析】先分别求得 $a+b$，a 和 b 的值，再分别代入求解.

【解答】解：由题意得$\begin{cases}(a+b)^2=36\\4a=16\end{cases}$，

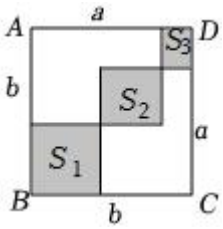
解得$\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=4\\b=-10\end{cases}$（舍去），

∴原大正方形中剩下的两个长方形的面积和为：4×2×2＝16，

故答案为：16.

【点评】此题考查了完全平方公式几何背景问题的解决能力，关键是能结合几何图形进行准确列式、运算.

6.（2022 秋•荆门期末）如图，边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中放置两个长和宽分别为 a，b（$a<6$，$b<6$）的长方形，若长方形的周长为 16，面积为 15.75，则图中阴影部分面积 $S_1+S_2+S_3$＝__12.5__.



【考点】完全平方公式的几何背景.

【专题】计算题；运算能力.

【分析】由长方形的周长 16，面积为 15.75，确定 $a+b=8$，$ab=15.75$，通过观察图形分别用含有 a 和 b 的式子表示出阴影部分的面积 S_1、S_2、S_3，然后整理化简 $S_1+S_2+S_3$，通过完全平方公式计算出 a^2+b^2，从而求出值.

【解答】解：由题知，$a+b=16\div2=8$，$ab=15.75$.

∴$(a+b)^2=64$，

$a^2+2ab+b^2=64$，

$a^2+b^2=64-2ab=64-2\times15.75=32.5$，

∵$S_1=(6-b)^2$，$S_3=(6-a)^2$，$S_2=[b-(6-a)]^2=(a+b-6)^2$，

∴阴影部分面积 $S_1+S_2+S_3=(6-b)^2+(6-a)^2+(a+b-6)^2$

$=36-12b+b^2+36-12a+a^2+(8-6)^2$

$=a^2+b^2-12b-12a+76$

$=a^2+b^2-12(b+a)+76$

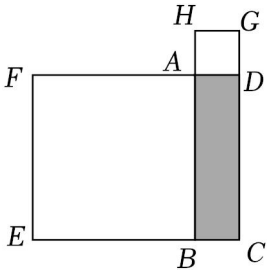
$=32.5-12\times8+76$

$=12.5$.

故答案为：12.5.

【点评】本题考查利用完全平方公式解决求阴影面积的问题，其中阴影部分的面积通过整理化简出 $a+b$ 和 ab 的形式是本题的关键，由 $a+b=8$ 和 $ab=15.75$，利用完全平方公式变形计算出 a^2+b^2，从而求出面积.

7.（2022 春•新城区校级期中）如图，长方形 $ABCD$ 的周长是 $12cm$，以 AB，AD 为边向外作正方形 $ABEF$ 和正方形 $ADGH$，若正方形 $ABEF$ 和 $ADGH$ 的面积之和为 $26cm^2$，那么长方形 $ABCD$ 的面积是 $\underline{\quad 5cm^2 \quad}$.



【考点】完全平方公式的几何背景.

【专题】矩形 菱形 正方形；几何直观.

【分析】由完全平方公式，求出 $AB\cdot AD$ 的值，即可解决问题.

【解答】解：∵正方形 $ABEF$ 和 $ADGH$ 的面积之和为 $26cm^2$，

∴$AB^2+AD^2=26$，

∵长方形 $ABCD$ 的周长是 $12cm$，

∴$AB+AD=\frac{1}{2}\times12=6$，

∴$(AB+AD)^2=36$，

$\therefore AB^2+AD^2+2AB\cdot AD=36$，

$\therefore AB\cdot AD=5$，

$\therefore$长方形 $ABCD$ 的面积是 $5cm^2$.

故答案为：$5cm^2$.

【点评】本题考查完全平方公式的应用，关键是应用此公式求出 AB 与 AD 的积.

三．解答题（共 8 小题）

8.（2022 秋•丰都县期末）教材 113 页《阅读与思考》谈到：我国古代数学的许多创新与发展都居世界前列，其中杨辉三角就是一例：在我国南宋数学家杨辉（约 13 世纪）所著的《详解九章算术》（1261 年）一书中，用如图的三角形解释二项和的乘方规律，法国数学家帕斯卡于 1654 年才发现此三角形，比中国晚了几百年，杨辉在注释中提到，在他之前北宋数学家贾宪（1050 年左右）也用过这种方法，因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”．此图揭示了（$a+b$）^{n}（n 为非负整数）的展开式的项数及各项系数的有关规律：

（1）直接写出（$a+b$）^{5} 的展开式（$a+b$）^{5}＝ $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ；

（2）（$a+b$）^{10} 的展开式中共有 11 项，所有项的系数和为 2^{10} ；

（3）此规律还可以解决实际问题：如果今天是星期四，再过 7 天还是星期四，那么再过 8^7 天是星期几？简要写出计算（推理）过程.

1

1　1　　…… $(a+b)^1=a+b$

1　2　1　　…… $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

1　3　3　1　　…… $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

1　4　( )　( )　1　　…… $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2$ ……

【考点】完全平方公式；数学常识；规律型：图形的变化类.

【专题】整式；运算能力.

【分析】（1）根据杨辉三角的规律可求解此题；

（2）由杨辉三角归纳（$a+b$）^{10} 的项数与所有项的系数和的规律；

（3）将 8^7 改写成（1+7）^{7}，再运用杨辉三角进行求解.

【解答】解：（1）由题意得，（$a+b$）$^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$，

故答案为：$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$；

（2）由题意得，$a+b$ 共 2 项，所有项系数的和为 $1+1=2=2^1$；

$(a+b)^2$ 共 3 项，所有项系数的和为 $1+2+1=4=2^2$；

$(a+b)^3$ 共 4 项，所有项系数的和为 $1+3+3+1=8=2^3$；

……；

$(a+b)^n$ 共 $(n+1)$ 项，所有项系数的和为 2^n，

∴$(a+b)^{10}$ 共 11 项，所有项系数的和为 2^{10}，

故答案为：11，2^{10}；

（3）如果今天是星期四，再过 7 天还是星期四，那么再过 8^7 天是星期五，

∵8^7

$=(1+7)^7$

$=1^7+a\times1^6\times7+b\times1^5\times7^2+\cdots\cdots+7^7$（$a$，$b$，$c$ 为各项的系数）

$=1+7a+7^2b+\cdots\cdots+7^7$，

∵$7a+7^2b+\cdots\cdots+7^7$ 能被 7 整除，

∴8^7 除以 7 余 1，

∴如果今天是星期四，再过 7 天还是星期四，那么再过 8^7 天是星期五．

【点评】此题考查了杨辉三角的应用能力，关键是能根据完全平方式准确理解并运用杨辉三角．

9．（2022 秋•禹州市期末）数学活动课上，老师把一个边长为 $a+b$ 的正方形分割成 4 块，如图所示．

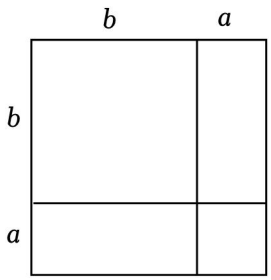
（1）请用两种不同的方法表示出图中大正方形的面积：方法 1：__$(a+b)^2$__；方法 2：__$a^2+2ab+b^2$__．

（2）观察图形，请你写出代数式 $(a+b)^2$、a^2+b^2、ab 之间的等量关系：__$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$__．

（3）根据（2）题中的等量关系，解决如下问题：

①已知 $a+b=6$，$a^2+b^2=14$，求 ab 的值；

②若 $x^2-4x+1=0$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$的值．



【考点】完全平方公式的几何背景.

【专题】数形结合；运算能力.

【分析】（1）根据图形面积整体求解和部分求和的方法进行列式表示；

（2）结合（1）题结果可得（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$；

（3）①先由（2）题结果可得 $ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$，再将 $a+b=6$，$a^2+b^2=14$ 代入进行求解；

②先由（2）题结果可得 $a^2+b^2=$（$a+b$）^2-2ab，再将 $x^2-4x+1=0$ 进行变形、代入求解.

【解答】解：（1）由题意得，该正方形的面积可表示为（$a+b$）^{2} 或 $a^2+2ab+b^2$，

故答案为：（$a+b$）^{2}，$a^2+2ab+b^2$；

（2）由（1）题可得（$a+b$）$^2=a^2+2ab+b^2$，

即（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$，

故答案为：（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$；

（3）①由（2）题结果（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$ 可得，

$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$，

∴当 $a+b=6$，$a^2+b^2=14$ 时，

$ab=\frac{6^2-14}{2}$

$=\frac{36-14}{2}$

$=\frac{22}{2}$

$=11$，

即 ab 的值是 11；

②由（2）题结果（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$ 可得，

$a^2+b^2=$（$a+b$）^2-2ab，

∵$x^2-4x+1=0$，

$\therefore x+\frac{1}{x}=4$，

$\therefore (x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$，

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}$

$=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$=4^2-2$

$=16-2$

$=14$，

即 $x^2+\frac{1}{x^2}$的值是 14．

【点评】此题考查了完全平方公式几何背景问题的解决能力，关键是能结合几何图形进行准确列式、归纳、应用．

10．（2022 秋•泉州期末）[阅读]“若 x 满足（$10-x$）（$x-3$）$=17$，求（$10-x$）^{2}+（$x-3$）^{2} 的值”．

设 $10-x=a$，$x-3=b$，

则（$10-x$）（$x-3$）$=ab=17$，$a+b=(10-x)+(x-3)=7$，

（$10-x$）^{2}+（$x-3$）$^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=7^2-2\times17=15$．

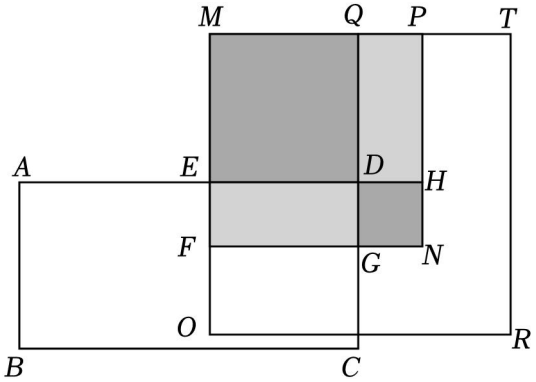
（1）[理解]

①若 x 满足（$50-x$）（$x-35$）$=100$，则（$50-x$）^{2}+（$x-35$）^{2} 的值为 __25__；

②若 x 满足（$x-1$）（$3x-7$）$=\frac{7}{6}$，试求（$7-3x$）^{2}+9（$x-1$）^{2} 的值；

（2）[应用]

如图，长方形 $ABCD$ 中，$AD=2CD=2x$，$AE=44$，$CG=30$，长方形 $EFGD$ 的面积是 200，四边形 $NGDH$ 和 $MEDQ$ 都是正方形，四边形 $PQDH$ 是长方形．延长 MP 至 T，使 $PT=PQ$，延长 MF 至 O，使 $FO=FE$，过点 O、T 作 MO、MT 的垂线，两垂线相交于点 R，求四边形 $MORT$ 的面积．（结果必须是一个具体的数值）



【考点】完全平方公式的几何背景；非负数的性质：偶次方；多项式乘多项式．

【专题】整式；运算能力．

【分析】（1）由完全平方公式（$a\pm b$）$^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 即可计算；

（2）由条件表示出正方形 $MORT$ 的边长，由完全平方公式即可求解．

【解答】解：（1）①令 $a=50-x$，$b=x-35$，

∵（$50-x$）（$x-35$）$=100$，

∴$ab=100$，$a+b=15$，

∴（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab=225$，

∴$a^2+b^2=225-2ab=25$，

∴（$50-x$）$^2+$（$x-35$）^{2}，

$=a^2+b^2$，

$=25$，

故答案为：25．

②∵（$x-1$）（$3x-7$）$=\frac{7}{6}$，

∴3（$x-1$）（$7-3x$）$=-\frac{7}{6}\times 3=-\frac{7}{2}$，

令 $a=3$（$x-1$），$b=7-3x$，

∴$ab=-\frac{7}{2}$，$a+b=4$，

∴（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab=16$，

∴$a^2+b^2=16-2ab=23$，

∴（$7-3x$）$^2+9$（$x-1$）^{2}

$=a^2+b^2$

$=23$；

（2）∵$ED=AD-AE$，$DG=DC-CG$，

∴$ED=2x-44$，$DG=x-30$，

∴$MT=MO=(2x-44)+2(x-30)$，

∵长方形 $EFGD$ 的面积是 200，

∴$(2x-44)(x-30)=200$，

∴$2(x-30)(2x-44)=400$，

令 $a=2x-44$，$b=2(x-30)$，

∴$ab=400$，$a-b=16$，

∴$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=256$，

∴$a^2+b^2=256+2ab=1056$，

∴四边形 $MORT$ 的面积$=MT^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=1056+800=1856$.

【点评】本题考查完全平方公式，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

11.（2022 秋•宛城区校级期末）在数学课本第 12 章《整式乘除》里学习了两数和的平方公式，还记得它是如何被发现的吗？

如图 1 的面积，把图 1 看做一个大正方形，它的面积是 $(a+b)^2$，如果把图 1 看做是由 2 个长方形形和 2 个小正方形组成的，它的面积为 $a^2+2ab+b^2$，由此得到：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

类比探究一：

（1）如图 2，正方形 $ABCD$ 是由四个边长分别是 a，b 的长方形和中间一个小正方形组成的，用不同的法对图 2 的面积进行计算，你发现的等式是 $\underline{(a+b)^2-4ab=(a-b)^2}$（用 a，b 表示）；

类比探究二：

（2）如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长是 c，它由四个直角边长分别是 a，b 的直角三角形和中间一个小正方形组成的，对图 3 的面积进行计算，你发现的式子是 $\underline{c^2=a^2+b^2}$（用 a，b，c 表示，结果化为最简）；

应用探索结果解决问题：

（3）如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长是 c，它由四个直角边长分别是 a，b 的角三角形和中间一个小正方形组成的，当 $c=5$，$a-b=1$ 时，求 $a+b$ 的值.

（4）如图 4，将四个全等的直角三角形无缝隙无重叠地拼接在一起，得到图形 $ABCDEFGH$．若该图形的周长为 80，$OA=12$．则该图形的面积为 $\underline{120}$.

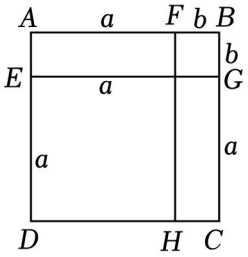


图1

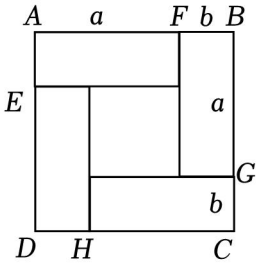


图2

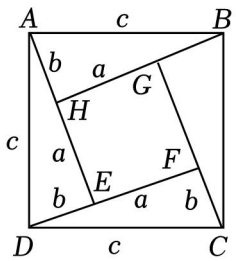


图3

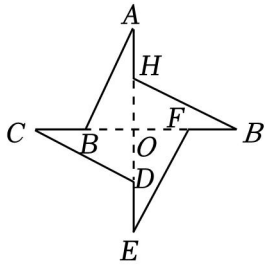


图4

【考点】完全平方式；全等三角形的性质；完全平方公式的几何背景．

【专题】实数；整式；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；运算能力；推理能力．

【分析】（1）利用大正方形的面积减去 4 个小长方形的面积等于中间小正方形的面积即可得出结论；

（2）利用大正方形的面积等于小正方形的面积与 4 个全等直角三角形的面积和表示，化简整理即可得出结论；

（3）利用大正方形的面积等于小正方形的面积与 4 个全等直角三角形的面积和表示，再利用整体代入的方法和算术平方根的意义解答即可；

（4）设 $OB=x$，利用已知条件和勾股定理列出方程，解方程求得 x 值，再利用图形的面积为 4 个直角三角形的面积之和解答即可．

【解答】解：（1）如图 2，∵正方形 $ABCD$ 是由四个边长分别是 a，b 的长方形和中间一个小正方形组成，

∴$(a+b)^2=4ab+(a-b)^2$，

∴$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$．

故答案为：$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$；

（2）∵正方形 $ABCD$ 的边长是 c，

∴正方形 $ABCD$ 的面积为 c^2．

∵正方形 $ABCD$ 由四个直角边长分别是 a，b 的角三角形和中间一个小正方形组成，

∴$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，

∴$c^2=2ab+a^2-2ab+b^2$，

∴$c^2=a^2+b^2$．

故答案为：$c^2=a^2+b^2$；

（3）∵正方形 $ABCD$ 的边长是 c，$c=5$，

∴正方形 $ABCD$ 的面积为 25．

∵正方形 $ABCD$ 由四个直角边长分别是 a，b 的角三角形和中间一个小正方形组成，

∴$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，

∵$a-b=1$，

∴$25=2ab+1$，

∴$ab=12$．

∴$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=1+48=49$，

∵$a+b>0$，

∴$a+b=7$；

（4）设 $OB=x$，则 $AH=DE=BC=BF=12-x$，

有勾股定理得：$AB=BH=FE=CD=\sqrt{12^2+x^2}$，

∵图形 $ABCDEFGH$ 的周长为 80，

∴$4\sqrt{144+x^2}+4(12-x)=80$，

解得：$x=5$，

∴$OB=5$，

∴$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times OB\cdot OA=30$，

∴该图形的面积为 $4\times S_{\triangle OAB}=120$．

故答案为：120．

【点评】本题主要考查了完全平方式，正方形，矩形的面积，直角三角形的面积，完全平方公式的几何背景，勾股定理的几何背景，熟练掌握完全平方式是解题的关键．

12．（2022 秋•盐山县校级期末）材料准备：如图①的三种纸片，A 种纸片是边长为 a 的正方形，B 种纸片是边长为 b 的正方形，C 种纸片是长为 b，宽为 a 的长方形，并用 A 种纸片一张，B 种纸片一张，C 种纸片两张拼成如图②的大正方形．

解决问题：（1）观察图②，写出代数式 $(a+b)^2$，a^2+b^2，ab 之间的等量关系是 <u>$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$</u>；

（2）根据（1）中的等量关系，解决下面问题：已知 $a+b=4$，$a^2+b^2=10$，求 ab 的值；

（3）若有 3 张边长为 a 的正方形纸片，4 张边长分别为 a，b（$a<b$）的长方形纸片，5

张边长为 b 的正方形纸片，现从其中取出若干张纸片（每种纸片至少取一张），拼成一个正方形（不重叠无缝隙），则所拼成的正方形的边长最长可以为 __D__.

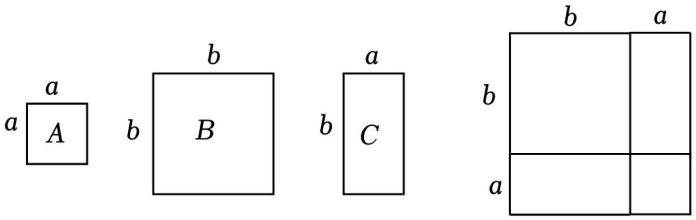
A．$a+b$

B．$2a+b$

C．$3a+b$

D．$a+2b$

并画出所拼的正方形（模仿图②标注长度数据）.



图①　　图②

【考点】完全平方式；完全平方公式的几何背景.

【专题】操作型；整式；几何直观；运算能力.

【分析】（1）利用完全平方公式解答即可；

（2）利用完全平方公式和整体的思想方法解答即可；

（3）利用完全平方公式和正方形的性质解答即可.

【解答】解：（1）代数式 $(a+b)^2$，a^2+b^2，ab 之间的等量关系是：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

故答案为：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

（2）∵ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$a+b=4$，$a^2+b^2=10$，

∴ $4^2=10+2ab$，

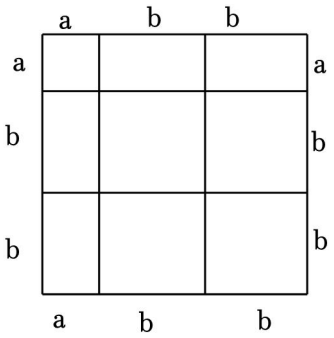
∴ $2ab=6$，

∴ $ab=3$；

（3）选取 1 张边长为 a 的正方形纸片，4 张 4 张边长分别为 a，b（$a<b$）的长方形纸片，4 张边长为 b 的正方形纸片，拼成如图所示的正方形，如图，

则正方形的边长最大为：$a+2b$.

故选：D.



【点评】本题主要考查了完全平方公式，完全平方公式的几何背景，熟练掌握完全平方公式是解题的关键．

13．（2022秋•南阳期末）阅读下列材料，完成后面的任务．

完全平方公式的变形及其应用．

我们知道，完全平方公式有：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$．

在解题过程中，根据题意，若将公式进行变形，则可以达到快速求解的目的，其变形主要有下列几种情形：

①$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$；②$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$；

③$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$；④$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$．

根据上述公式的变形，可以迅速地解决相关问题．

例如：已知 $x+y=3$，$x-y=1$，求 x^2+y^2 的值．

解：$x^2+y^2=\frac{1}{2}[(x+y)^2+(x-y)^2]=\frac{1}{2}\times(3^2+1^2)=5$．

任务：（1）已知 $x+y=5$，$x-y=3$，则 $xy=$__4__．

（2）已知 $x+y=7$，$x^2+y^2=25$，求 $(x-y)^2$ 的值．

【考点】完全平方公式；解二元一次方程组．

【专题】计算题；整式；一次方程（组）及应用；运算能力．

【分析】（1）利用完全平方公式列等式，再利用等式的性质计算；

（2）利用完全平方公式列等式，再整体代入求值即可．

【解答】解：（1）∵$x+y=5$，$x-y=3$，

∴$(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=9$，

∴$x^2+y^2+2xy=25$，$x^2+y^2-2xy=9$，

∴两等式相减得：$4xy=16$，

∴$xy=4$；

故答案为：4；

（2）∵$x+y=7$，$x^2+y^2=25$，

∴$(x+y)^2=49$，

∴$x^2+y^2+2xy=49$，

∴$25+2xy=49$，

∴$2xy=24$，

∴$(x-y)^2$

$=x^2+y^2-2xy$

$=25-24$

$=1$．

【点评】本题考查了完全平方公式，代数式求值，解题的关键是掌握完全平方公式和整体代入求值．

14．（2022秋•合肥期末）如图1，边长为a的大正方形剪去一个边长为b的小正方形，然后将图1中的阴影部分拼成一个长方形（如图2所示）．

（1）上述操作能验证的等式是 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ （用a，b表示）；

（2）请利用你从（1）得出的等式，完成下列各题：

①已知$9a^2-b^2=27$，$3a+b=9$，则$3a-b=$ 3 ；

②计算：$(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{2022^2})$．

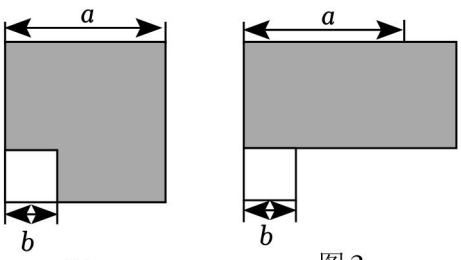


图1　　图2

【考点】平方差公式的几何背景．

【专题】整式；几何直观．

【分析】（1）通过整体运算和部分求和的分式对图中阴影部分的面积求解即可；

（2）①由（1）得出的等式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$进行求解即可；

②运用（1）得出的等式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$将算式进行变形、求解．

【解答】解：（1）∵图1中阴影部分的面积为a^2-b^2，

图 1 中阴影部分的面积为（$a+b$）（$a-b$），

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，

故答案为：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

（2）①由（1）得出的等式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 可得，

$9a^2-b^2=(3a+b)(3a-b)$，

$\therefore 3a-b=(9a^2-b^2)\div(3a+b)=27\div 9=3$，

故答案为：3；

②由（1）得出的等式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 可得，

$(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{2022^2})$

$=(1-\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{2022})\cdot(1+\frac{1}{2022})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2021}{2022}\times\frac{2023}{2022}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2023}{2022}$

$=\frac{2023}{4044}$.

【点评】此题考查了平方差公式几何背景与变形应用的能力，关键是能准确理解并变式运用该公式.

15.（2022 秋•南关区校级期末）如图 1，三种纸片 A、B、C 分别是边长为 a 的正方形，边长为 b 的正方形和宽与长分别为 a 与 b 的长方形.

（1）数学课上，老师用图 1 中的一张纸片 A，一张纸片 B 和两张纸片 C，拼成了如图 2 所示的大正方形，由此可以得到的乘法公式是 $\underline{\quad(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\quad}$；

（2）若小莉想用图 1 中的三种纸片拼出一个面积为（$2a+b$）（$a+b$）的大长方形，需要 A、B、C 三种纸片分别 $\underline{\quad 2，1，3\quad}$张.

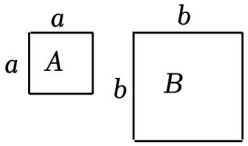


图1

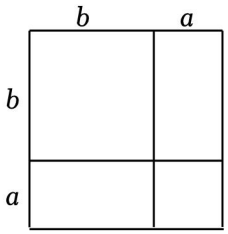


图2

【考点】完全平方式；多项式乘多项式；完全平方公式的几何背景．

【专题】整式；应用意识．

【分析】（1）根据完全平方公式得出结论即可；

（2）根据多项式乘多项式得出结论即可．

【解答】解：（1）由题意知，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

故答案为：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

（2）∵$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$，

∴需要 A、B、C 三种纸片分别 2 张，1 张，3 张，

故答案为：2，1，3．

【点评】本题主要考查完全平方公式及多项式乘多项式，熟练掌握完全平方公式及多项式乘多项式是解题的关键．

考点卡片

1．非负数的性质：偶次方

偶次方具有非负性．

任意一个数的偶次方都是非负数，当几个数或式的偶次方相加和为 0 时，则其中的每一项都必须等于 0．

2．数学常识

数学常识

此类问题要结合实际问题来解决，生活中的一些数学常识要了解．比如给出一个物体的高度要会选择它合适的单位长度等等．

平时要注意多观察，留意身边的小知识．

3．规律型：图形的变化类

图形的变化类的规律题

首先应找出图形哪些部分发生了变化，是按照什么规律变化的，通过分析找到各部分的变化规律后直接利用规律求解．探寻规律要认真观察、仔细思考，善用联想来解决这类问题．

4．多项式乘多项式

（1）多项式与多项式相乘的法则：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另外一个多项式的每一项，再把所得的积相加．

（2）运用法则时应注意以下两点：

①相乘时，按一定的顺序进行，必须做到不重不漏；②多项式与多项式相乘，仍得多项式，在合并同类项之前，积的项数应等于原多项式的项数之积．

5．完全平方公式

（1）完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$．

可巧记为："首平方，末平方，首末两倍中间放"．

（2）完全平方公式有以下几个特征：①左边是两个数的和的平方；②右边是一个三项式，其中首末两项分别是两项的平方，都为正，中间一项是两项积的 2 倍；其符号与左边的运算符号相同．

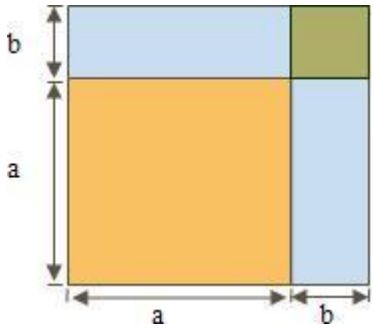
（3）应用完全平方公式时，要注意：①公式中的 a，b 可是单项式，也可以是多项式；②对形如两数和（或差）的平方的计算，都可以用这个公式；③对于三项的可以把其中的两

项看做一项后，也可以用完全平方公式．

6．完全平方公式的几何背景

（1）运用几何直观理解、解决完全平方公式的推导过程，通过几何图形之间的数量关系对完全平方公式做出几何解释．

（2）常见验证完全平方公式的几何图形



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．（用大正方形的面积等于边长为 a 和边长为 b 的两个正方形与两个长宽分别是 a，b 的长方形的面积和作为相等关系）

7．完全平方式

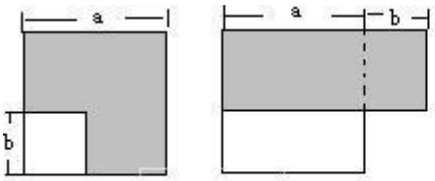
完全平方式的定义：对于一个具有若干个简单变元的整式 A，如果存在另一个实系数整式 B，使 $A=B^2$，则称 A 是完全平方式．

$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

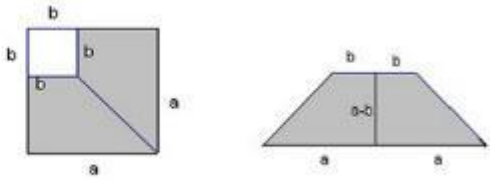
完全平方式分两种，一种是完全平方和公式，就是两个整式的和括号外的平方．另一种是完全平方差公式，就是两个整式的差括号外的平方．算时有一个口诀“首末两项算平方，首末项乘积的 2 倍中间放，符号随中央．（就是把两项的乘方分别算出来，再算出两项的乘积，再乘以 2，然后把这个数放在两数的乘方的中间，这个数以前一个数间的符号随原式中间的符号，完全平方和公式就用+，完全平方差公式就用﹣，后边的符号都用+）”

8．平方差公式的几何背景

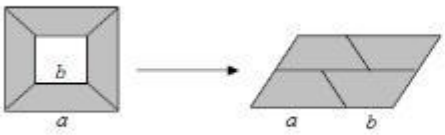
（1）常见验证平方差公式的几何图形（利用图形的面积和作为相等关系列出等式即可验证平方差公式）．



图（1）



图（2）



图（3）

（2）运用几何直观理解、解决平方差公式的推导过程，通过几何图形之间的数量关系对平方差公式做出几何解释．

9．解二元一次方程组

（1）用代入法解二元一次方程组的一般步骤：①从方程组中选一个系数比较简单的方程，将这个方程组中的一个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来．②将变形后的关系式代入另一个方程，消去一个未知数，得到一个一元一次方程．③解这个一元一次方程，求出 x（或 y）的值．④将求得的未知数的值代入变形后的关系式中，求出另一个未知数的值．⑤把求得的 x、y 的值用“{”联立起来，就是方程组的解．

（2）用加减法解二元一次方程组的一般步骤：①方程组的两个方程中，如果同一个未知数的系数既不相等又不互为相反数，就用适当的数去乘方程的两边，使某一个未知数的系数相等或互为相反数．②把两个方程的两边分别相减或相加，消去一个未知数，得到一个一元一次方程．③解这个一元一次方程，求得未知数的值．④将求出的未知数的值代入原方程组的任意一个方程中，求出另一个未知数的值．⑤把所求得的两个未知数的值写在一起，就得到原方程组的解，用$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$的形式表示．

10．全等三角形的性质

（1）性质 1：全等三角形的对应边相等

性质 2：全等三角形的对应角相等

说明：①全等三角形的对应边上的高、中线以及对应角的平分线相等

②全等三角形的周长相等，面积相等

③平移、翻折、旋转前后的图形全等

（2）关于全等三角形的性质应注意

①全等三角形的性质是证明线段和角相等的理论依据，应用时要会找对应角和对应边．

②要正确区分对应边与对边，对应角与对角的概念，一般地：对应边、对应角是对两个三角形而言，而对边、对角是对同一个三角形的边和角而言的，对边是指角的对边，对角是指边的对角．