

2023 年中考数学复习探究性试题汇编之全等三角形

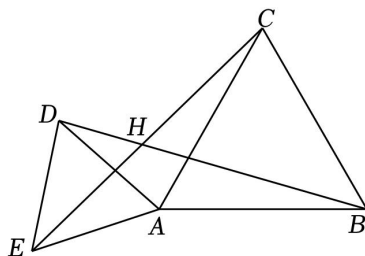
一. 解答题 (共 15 小题)

1. (2022 秋·天桥区期末) 有共同顶点的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中, $CA=CB$, $EA=ED$, 且 $\angle ACB = \angle AED = \alpha$, 连接 BD , CE , 线段 BD , CE 相交于点 H .

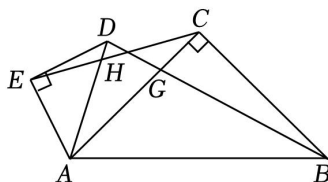
(1) 如图①, 当 $\alpha=60^\circ$ 时, $\frac{BD}{CE}$ 的值是 _____, $\angle BHC$ 的度数是 _____;

(2) 如图②, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 求 $\frac{BD}{CE}$ 的值和 $\angle BHC$ 的度数, 并说明理由;

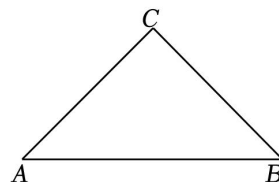
(3) 如果 $\alpha=90^\circ$, $\frac{AC}{AE}=2$, 当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点重合时, 请直接写出 $\frac{BD}{DE}$ 的值.



图①



图②



备用图

2. (2022 秋·桐柏县期末) 【教材呈现】如图是华师版八年级上册数学教材第 69 页的部分内容:

例4 如图13.2.13, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 的中点, 过点 C 画直线 CE , 使 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于点 E , 求证: $AD=ED$

证明 $\because CE \parallel AB$ (已知)

$\therefore \angle ABD = \angle ECD, \angle BAD = \angle CED$ (两直线平行, 内错角相等).

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$ 中,

$\because \angle ABD = \angle ECD, \angle BAD = \angle CED$ (已证),

$BD = CD$ (已知),

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (A.A.S.),

$\therefore AD = ED$ (全等三角形的对应边相等).

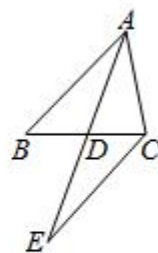
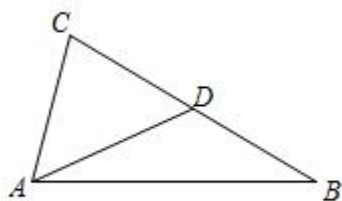


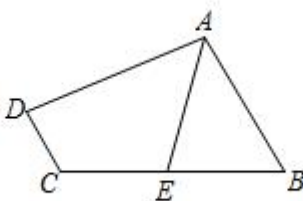
图13.2.13

- (1) 【方法应用】如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=4$, 则 BC 边上的中线 AD 长度的取值范围是_____.
- (2) 【猜想证明】如图②, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 是 BC 的中点, 若 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线, 试猜想线段 AB 、 AD 、 DC 之间的数量关系, 并证明你的猜想;
- (3) 【拓展延伸】如图③, 已知 $AB \parallel CF$, 点 E 是 BC 的中点, 点 D 在线段 AE 上, $\angle$

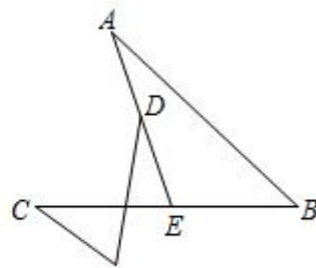
$\angle EDF = \angle BAE$ ，若 $AB=5$ ， $CF=2$ ，直接写出线段 DF 的长。



图①



图②



图③

3. (2022 秋·榆树市期末) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ，直线 MN 经过点 C ，且 $AD \perp MN$ 于 D ， $BE \perp MN$ 于 E 。

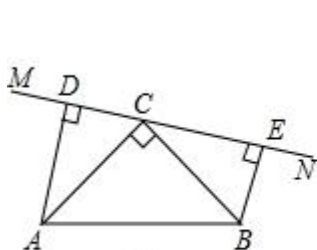
(1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (1) 的位置时，

求证：① $\triangle ADC \cong \triangle CEB$ ；

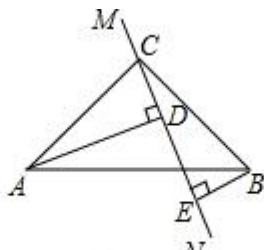
② $DE = AD + BE$ ；

(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (2) 的位置时，求证： $DE = AD - BE$ ；

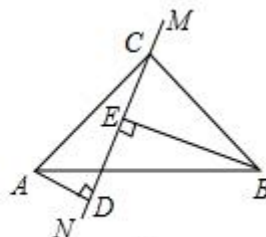
(3) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (3) 的位置时，请直接写出 DE ， AD ， BE 之间的等量



(1)



(2)



(3)

关系。

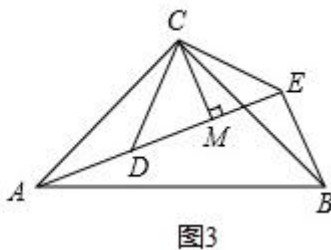
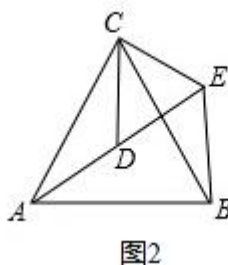
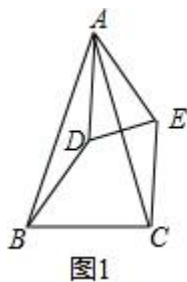
4. (2022 秋·惠民县校级期末) (1) 如图 1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 均是顶角为 40° 的等腰三角形， BC 、 DE 分别是底边，求证： $BD=CE$ ；

(2) 如图 2， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A 、 D 、 E 在同一直线上，连接 BE 。

填空： $\angle AEB$ 的度数为 _____；线段 BE 与 AD 之间的数量关系是 _____。

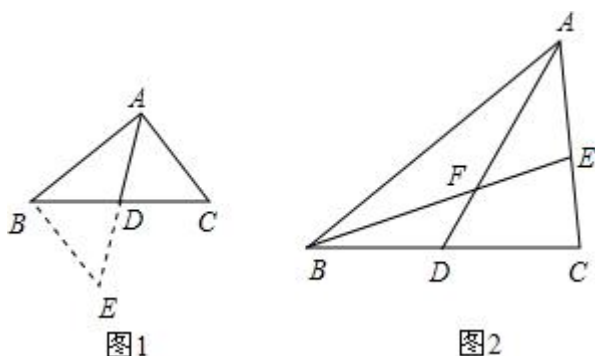
(3) 拓展探究

如图 3， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，点 A 、 D 、 E 在同一直线上， CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高，连接 BE 。请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段 CM 、 AE 、 BE 之间的数量关系，并说明理由。



5. (2022 秋•平舆县期末)【阅读理解】

课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：



如图 1， $\triangle ABC$ 中，若 $AB=8$ ， $AC=6$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围．小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：延长 AD 到点 E ，使 $DE=AD$ ，请根据小明的方法思考：

(1) 由已知和作图能得到 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ 的理由是_____．

A. SSS B. SAS C. AAS D. HL

(2) 求得 AD 的取值范围是_____．

A. $6 < AD < 8$ B. $6 \leq AD \leq 8$ C. $1 < AD < 7$ D. $1 \leq AD \leq 7$

【感悟】

解题时，条件中若出现“中点”“中线”字样，可以考虑延长中线构造全等三角形，把分散的已知条件和所求证的结论集合到同一个三角形中．

【问题解决】

(3) 如图 2， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， BE 交 AC 于 E ，交 AD 于 F ，且 $AE=EF$ ．求证： $AC=BF$ ．

6. (2022 秋•东台市月考)【一线三等角模型】如图 1：点 A 、 B 、 C 在一条直线上， $\angle A = \angle DBE = \angle C$ ，当 $BD=BE$ 时，有 $\triangle ABD \cong \triangle CEB$ ．理由：

$\because \angle A = \angle DBE, \therefore \angle D + \angle DBA = 180^\circ - \angle A, \angle DBA + \angle CBE = 180^\circ - \angle DBE, \therefore \angle D = \angle CBE$ - - - - - 请将全等证明过程补充完整．

【模型运用】如图 2： $\angle ABC = \angle CAD = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = AD$ ，求 $\triangle BAD$ 的面积；

【能力提升】如图 3：在等边 $\triangle DEF$ 中， A ， C 分别为 DE 、 DF 边上的动点， $AE = 2CD$ ，连接 AC ，以 AC 为边在 $\triangle DEF$ 内作等边 $\triangle ABC$ ，连接 BF ，当点 A 从点 E 向点 D 运动（不与点 D 重合）时， $\angle CFB$ 的度数变化吗？如不变请求出它的度数，如变化，请说明它是怎样变化的？

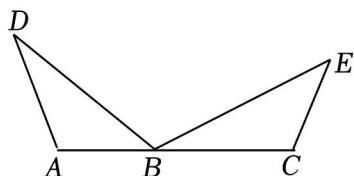


图 1

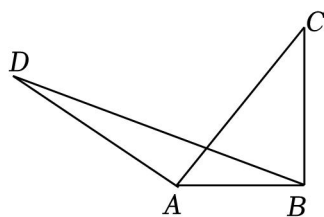


图 2

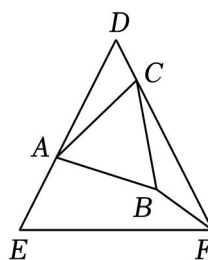


图 3

7. (2022 秋·辽阳期中) (1) 观察发现：如图 1， $\angle MBN$ 的两条边 BM ， BN 分别交正方形的边 AD ， CD 于点 P ， Q ，且 $\angle MBN = 45^\circ$ ，连接 PQ ，直接写出 AP ， CQ ， PQ 的数量关系。

(2) 类比探究：如图 2，四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ ， BM ， BN 分别交四边形 $ABCD$ 两个外角的角平分线于 P ， Q 两点，连接 PQ ，以 AP ， CQ ， PQ 为边长可以构成一个三角形，请你判断这个三角形的形状，并给予证明。

(3) 能力提升：在 (2) 问的条件下，若四边形 $ABCD$ 是正方形， $BC = 2$ ，请利用图 3 研究．当 $\triangle PBQ$ 是等腰三角形时 PQ 的长度．（直接写出结果即可）

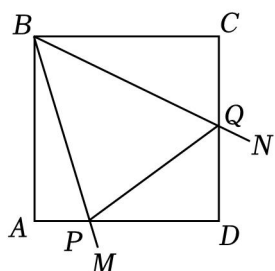


图 1

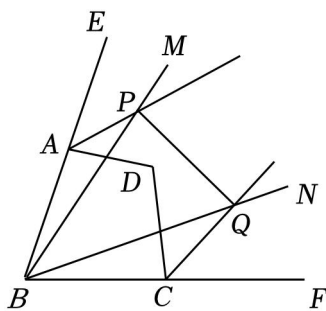


图 2

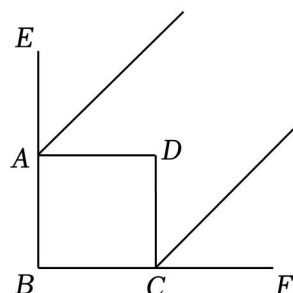


图 3

8. (2022 秋·皇姑区校级月考) 思维启迪：

(1) 如图 1，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AB 的中点，过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交边 AC 于点 G ，过点 G 作 $GE \perp BC$ 于点 E ，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 60° ，得到线段 DF ，连接 AF 。

①求证： $\triangle ADG$ 是等边三角形；

②求证： $AF \perp AB$.

思维探索：

(2) 在等边 $\triangle ABC$ 中， $BC=8$ ，点 D 是边 AB 的中点，点 E 在直线 BC 上，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 DF ，连接 EF .

①如图2，当 $DF \perp BC$ 时，直接写出线段 EF 的长；

②当 $AF = \frac{7}{2}$ 时，直接写出线段 FC 的长.

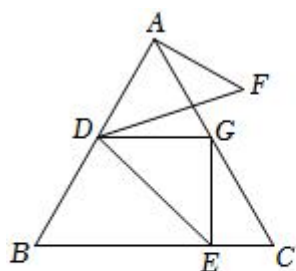


图1

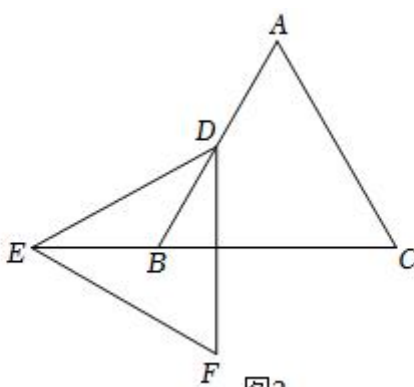
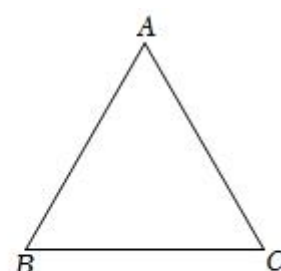


图2



备用图

9. (2022 秋•古冶区期中) 如图：在 $\angle EAF$ 的平分线上取点 B 作 $BC \perp AF$ 于点 C ，在直线 AC 上取一动点 P 。在直线 AE 上取点 Q 使得 $BQ=BP$ 。

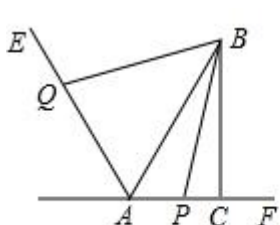


图1

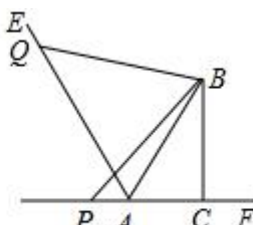
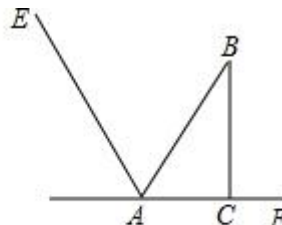


图2



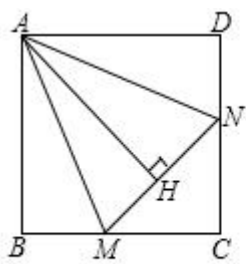
备用图

(1) 如图1，当点 P 在点线段 AC 上时， $\angle BQA + \angle BPA = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；

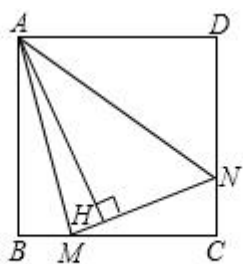
(2) 如图2，当点 P 在 CA 延长线上时，探究 AQ 、 AP 、 AC 三条线段之间的数量关系，说明理由；

(3) 在满足(1)的结论条件下，当点 P 运动到在射线 AC 上时，直接写出 AQ 、 AP 、 PC 三条线段之间的数量关系为：_____。

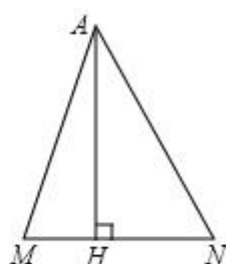
10. (2022•集贤县模拟) 已知正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N ， $AH \perp MN$ 于点 H 。



图①



图②



图③

(1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：_____；

(2) 如图②，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，(1)中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由，如果成立请证明；

(3) 如图③，已知 $\angle MAN=45^\circ$ ， $AH \perp MN$ 于点 H ，且 $MH=2$ ， $AH=6$ ，求 NH 的长。(可利用(2)得到的结论)

11. (2022 春•椒江区校级期中) 我们规定：有一组邻边相等，且这组邻边的夹角为 60° 的凸四边形叫做“准筝形”。

(1) 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A + \angle C = 270^\circ$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $AB = CB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是“准筝形”；

(2) 小军同学研究“准筝形”时，思索这样一道题：如图 2，“准筝形” $ABCD$ ， $AD = BD$ ， $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$ ，求 AC 的长。

小军研究后发现，可以 CD 为边向外作等边三角形，构造手拉手全等模型，用转化的思想来求 AC 。请你按照小军的思路求 AC 的长。

(3) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，当四边形 $ABCD$ 是“准筝形”时，请直接写出四边形 $ABCD$ 的面积。

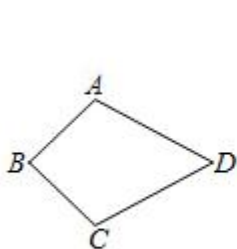


图 1

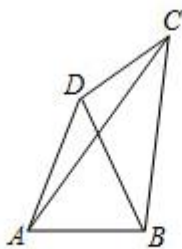


图 2

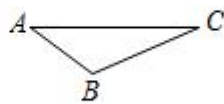
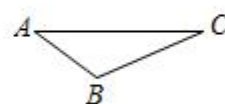


图 3



备用图

12. (2022 秋•西城区校级期中) (1) 问题背景。

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是线段 BC 、线段 CD 上的点。若 $\angle BAD = 2\angle EAF$ ，试探究线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系。

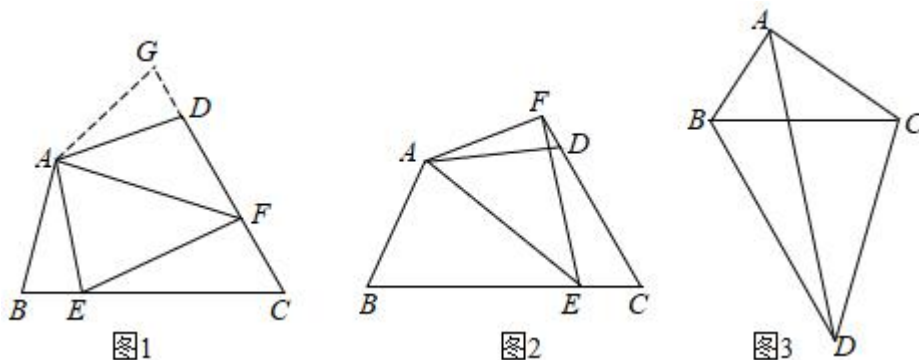
小明同学探究此问题的方法是，延长 FD 到点 G ，使 $DG=BE$ ，连接 AG ，先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，可得出结论，他的结论应是_____。

(2) 猜想论证。

如图 2，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle B+\angle ADC=180^\circ$ ， E 在线段 BC 上、 F 在线段 CD 延长线上。若 $\angle BAD=2\angle EAF$ ，上述结论是否依然成立？若成立说明理由；若不成立，试写出相应的结论并给出你的证明。

(3) 拓展应用。

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BDC=45^\circ$ ，连接 BC 、 AD ， $AB:AC:BC=3:4:5$ ， $AD=4$ ，且 $\angle ABD+\angle CBD=180^\circ$ 。则 $\triangle ACD$ 的面积为_____。



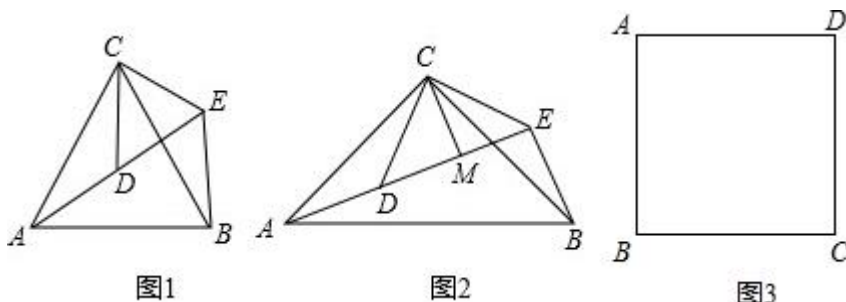
13. (2022•十堰模拟) (1) 如图 1， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A, D, E 在同一直线上，连接 BE 。

① $\angle AEB$ 的度数为 _____；

② 线段 AD, BE 之间的数量关系为 _____；

(2) 如图 2， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， $\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ ，点 A, D, E 在同一直线上， CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高，连接 BE ，请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段 CM, AE, BE 之间的数量关系，并证明你的结论；

(3) 如图 3，在正方形 $ABCD$ 中， $CD=\sqrt{3}$ ，若点 P 满足 $PD=1$ ，且 $\angle BPD=90^\circ$ ，请直接写出点 A 到 BP 的距离为 _____。



14. (2022•黄冈二模) (1) 问题发现：如图 1， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A, D, E 在同一直线上，连接

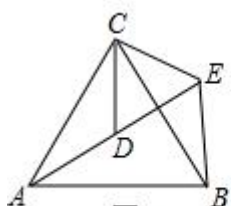


图1

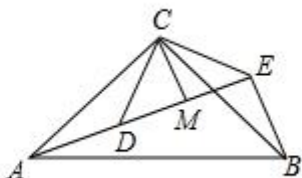


图2

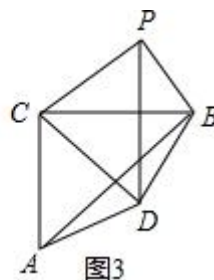


图3

BE.

- 填空：① $\angle AEB$ 的度数为 _____；
② 线段 AD, BE 之间的数量关系为 _____；

(2) 拓展探究

如图 2， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，点 A, D, E 在同一直线上， CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高，连接 BE ，请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段 CM, AE, BE 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 解决问题

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 5$ ，平面上一动点 P 到点 B 的距离为 3，将线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 90° ，得到线段 CD ，连 DA, DB, PB ，则 BD 是否有最大值和最小值，若有直接写出，若没有说明理由？

15. (2021•武陟县模拟) 问题发现

如图 1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BED$ 中， $AB = BC, BE = BD, \angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$ 。点 D 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接 AE 。

- 填空：① $\frac{AE}{CD}$ 的值是 _____；
② 直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 _____；

(2) 类比探究

如图 2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBD$ 中， $\angle ABC = \angle EBD = 90^\circ, \angle ACB = \angle EDB = 60^\circ$ ，点 D 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接 AE 。请判断 $\frac{AE}{CD}$ 的值及直线 AE 与直线 CD 相交所成的角的度数，并说明理由。

(3) 拓展延伸

在 (2) 的条件下，若 $AC = 2$ ，请直接写出当 $\triangle ACD$ 是直角三角形时 AE 的长。

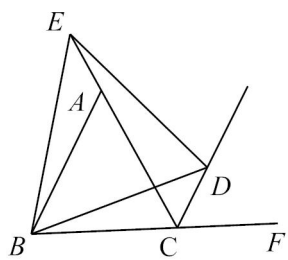


图1

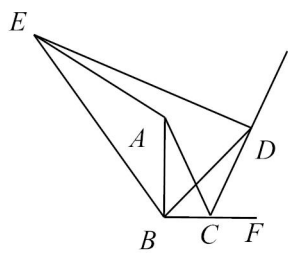
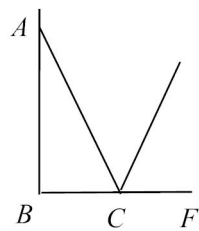


图2



备用图

2023 年中考数学复习探究性试题汇编之全等三角形

参考答案与试题解析

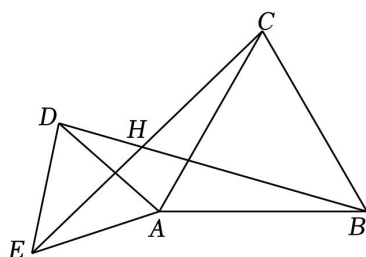
一. 解答题 (共 15 小题)

1. (2022 秋•天桥区期末) 有共同顶点的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中, $CA=CB$, $EA=ED$, 且 $\angle ACB = \angle AED = \alpha$, 连接 BD , CE , 线段 BD , CE 相交于点 H .

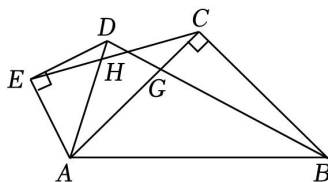
(1) 如图①, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\frac{BD}{CE}$ 的值是 1, $\angle BHC$ 的度数是 60° ;

(2) 如图②, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 求 $\frac{BD}{CE}$ 的值和 $\angle BHC$ 的度数, 并说明理由;

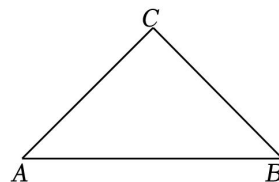
(3) 如果 $\alpha = 90^\circ$, $\frac{AC}{AE} = 2$, 当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点重合时, 请直接写出 $\frac{BD}{DE}$ 的值.



图①



图②



备用图

【考点】三角形综合题.

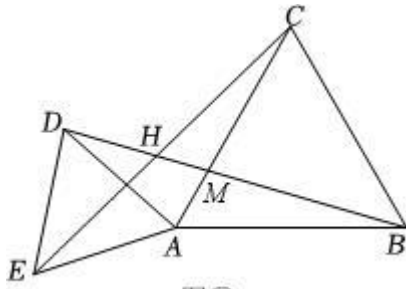
【专题】几何综合题; 推理能力.

【分析】(1) 证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $BD=CE$, $\angle ACE = \angle ABD$, 则可得出答案;

(2) 由直角三角形的性质得出 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$, 证明 $\triangle CAE \sim \triangle BAD$, 由相似三角形的性质得出 $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$. $\angle ACE = \angle ABD$, 则可得出答案;

(3) 分三种情况: ①当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 D 重合时, 如图③-1, ②当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 E 重合时, 如图③-2, ③当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 A 重合时, 如图③-3, 结合(2)则可得出答案.

【解答】(1) 解: 如图①, AB 与 CF 交于点 M ,



图①

$\because \angle ACB = \angle AED = 60^\circ$, $CA = CB$, $EA = ED$,

$\therefore \triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle CAB = \angle EAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAE = \angle BAD$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS),

$\therefore BD = CE$, $\angle ACE = \angle ABD$,

$\because \angle HMC = \angle AMB$,

$\therefore \angle BHC = \angle CAB = 60^\circ$,

故答案为: 1; 60° ;

(2) 证明: $\because CA = CB$, 且 $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2}AC$,

同理 $\angle EAD = \angle ADE = 45^\circ$, $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{2}AE$,

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$, 且 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABD$,

$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

$\therefore \angle ACE = \angle ABD$,

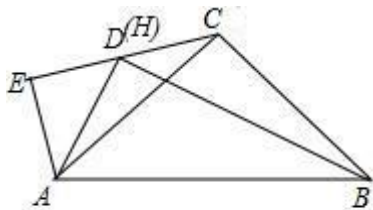
$\therefore \angle AGB = \angle CGH$,

$\therefore \angle BHC = \angle CAB = 45^\circ$;

$\therefore \frac{BD}{CE}$ 的值为 $\sqrt{2}$, $\angle BHC$ 的度数为 45° ;

(3) 解: 分三种情况:

①当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 D 重合时, 如图③ - 1,



图③-1

$$\because \alpha = 90^\circ, \quad \frac{AC}{AE} = 2,$$

$$\text{由 (2) 知: } \frac{BD}{CE} = \sqrt{2},$$

$$\text{设 } AE = DE = a,$$

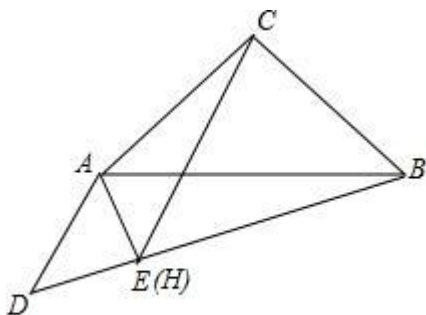
$$\therefore AC = 2a,$$

$$\therefore CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore BD = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{\sqrt{6}a}{a} = \sqrt{6};$$

②当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 E 重合时, 如图③ - 2,



图③-2

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = BC = 2a,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}a,$$

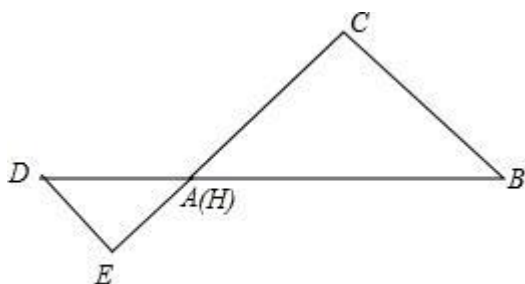
$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } AE = DE = a,$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{7}a,$$

$$\therefore BD = BE + DE = \sqrt{7}a + a,$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{\sqrt{7}a + a}{a} = \sqrt{7} + 1;$$

③当点 H 与 $\triangle ADE$ 的顶点 A 重合时, 如图③ - 3,



图③-3

$$\because AD = \sqrt{2}AE = \sqrt{2}a, \quad AB = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore BD = AB + AD = 3\sqrt{2}a,$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{3\sqrt{2}a}{a} = 3\sqrt{2}.$$

综上所述: $\frac{BD}{DE} = \sqrt{6}$ 或 $3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{7} + 1$,

【点评】 本题是三角形综合题, 主要考查了等边三角形性质, 等腰直角三角形性质, 全等三角形判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 直角三角形性质, 熟练掌握全等三角形判定和性质和相似三角形的判定和性质是解题关键.

2. (2022 秋·桐柏县期末) **【教材呈现】** 如图是华师版八年级上册数学教材第 69 页的部分内容:

例4 如图13.2.13, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 的中点, 过点 C 画直线 CE , 使 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于点 E , 求证: $AD=ED$

证明 $\because CE \parallel AB$ (已知)

$\therefore \angle ABD = \angle ECD, \angle BAD = \angle CED$ (两直线平行, 内错角相等).

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$ 中,

$\because \angle ABD = \angle ECD, \angle BAD = \angle CED$ (已证),

$BD = CD$ (已知),

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (A.A.S.),

$\therefore AD = ED$ (全等三角形的对应边相等).

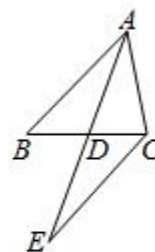
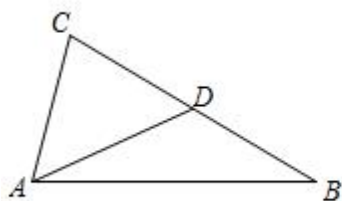


图13.2.13

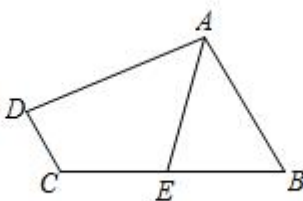
(1) **【方法应用】** 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=4$, 则 BC 边上的中线 AD 长度的取值范围是 $1 < AD < 5$.

(2) **【猜想证明】** 如图②, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 是 BC 的中点, 若 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线, 试猜想线段 AB 、 AD 、 DC 之间的数量关系, 并证明你的猜想;

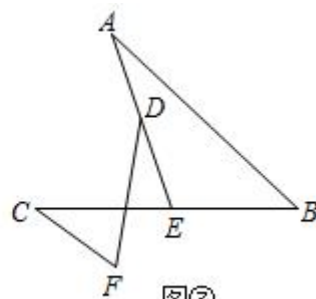
(3) **【拓展延伸】** 如图③, 已知 $AB \parallel CF$, 点 E 是 BC 的中点, 点 D 在线段 AE 上, $\angle EDF = \angle BAE$, 若 $AB=5$, $CF=2$, 直接写出线段 DF 的长.



图①



图②



图③

【考点】四边形综合题.

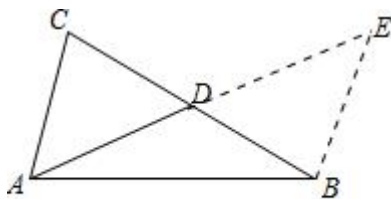
【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】(1) 延长 AD 到 E , 使 $AD=DE$, 连接 BE , 证 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$, 推出 $AC=BE=8$, 在 $\triangle ABE$ 中, 根据三角形三边关系定理得出 $AB - BE < AE < AB + BE$, 代入求出即可.

(2) 结论: $AD=AB+DC$. 延长 AE , DC 交于点 F , 证明 $\triangle ABE \cong \triangle FEC$ (AAS), 推出 $AB=CF$, 再证明 $DA=DF$ 即可解决问题.

(3) 如图③, 延长 AE 交 CF 的延长线于点 G , 证明 $AB=DF+CF$, 可得结论.

【解答】解: (1) 延长 AD 到 E , 使 $AD=DE$, 连接 BE ,



图①

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD=CD$,

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中,

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS),

$\therefore AC=BE=4$,

在 $\triangle ABE$ 中, $AB - BE < AE < AB + BE$,

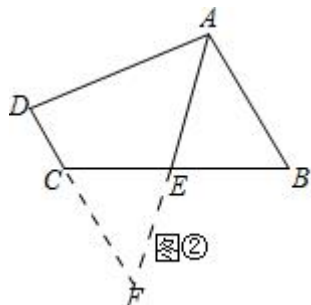
$\therefore 6 - 4 < 2AD < 6 + 4$,

$\therefore 1 < AD < 5$,

故答案为: $1 < AD < 5$.

(2) 结论: $AD=AB+DC$.

理由: 如图②中, 延长 AE , DC 交于点 F ,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAF = \angle F$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle FEC \\ \angle BAE = \angle F \\ BE = CE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FEC$ (AAS),

$\therefore CF = AB$,

$\because AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线,

$\therefore \angle BAF = \angle FAD$,

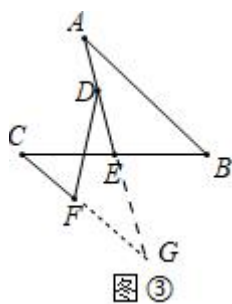
$\therefore \angle FAD = \angle F$,

$\therefore AD = DF$,

$\because DC + CF = DF$,

$\therefore DC + AB = AD$.

(3) 如图③, 延长 AE 交 CF 的延长线于点 G ,



$\because E$ 是 BC 的中点,

$$\therefore CE=BE,$$

$$\because AB \parallel CF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle G,$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle GEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle G \\ \angle AEB = \angle GEC, \\ BE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle GEC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AB=GC,$$

$$\because \angle EDF = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle G,$$

$$\therefore FD=FG,$$

$$\therefore AB=DF+CF,$$

$$\because AB=5, CF=2,$$

$$\therefore DF=AB - CF=3.$$

【点评】本题是四边形的综合问题，考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、角平分线的性质、三角形三边关系等知识点，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题．

3. (2022 秋•榆树市期末) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于 D , $BE \perp MN$ 于 E .

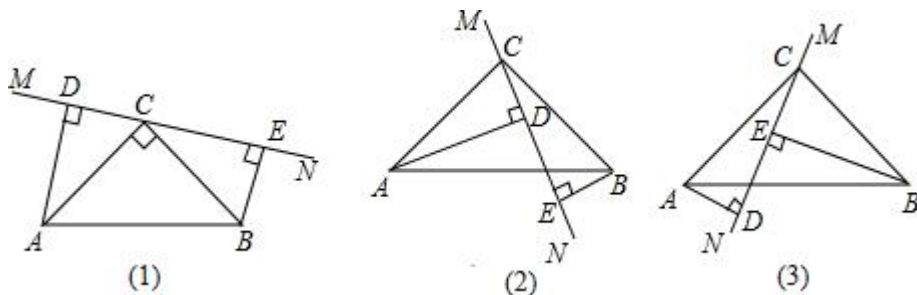
(1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图(1)的位置时,

求证: ① $\triangle ADC \cong \triangle CEB$;

② $DE=AD+BE$;

(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图(2)的位置时, 求证: $DE=AD - BE$;

(3) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图(3)的位置时, 请直接写出 DE , AD , BE 之间的等量



关系.

【考点】三角形综合题；全等三角形的判定与性质.

【专题】综合题.

【分析】(1) ①根据 $AD \perp MN$, $BE \perp MN$, $\angle ACB = 90^\circ$, 得出 $\angle CAD = \angle BCE$, 再根据 AAS 即可判定 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$; ②根据全等三角形的对应边相等, 即可得出 $CE = AD$, $CD = BE$, 进而得到 $DE = CE + CD = AD + BE$;

(2) 先根据 $AD \perp MN$, $BE \perp MN$, 得到 $\angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ$, 进而得出 $\angle CAD = \angle BCE$, 再根据 AAS 即可判定 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$, 进而得到 $CE = AD$, $CD = BE$, 最后得出 $DE = CE - CD = AD - BE$;

(3) 运用 (2) 中的方法即可得出 DE , AD , BE 之间的等量关系是: $DE = BE - AD$.

【解答】解: (1) ① $\because AD \perp MN$, $BE \perp MN$,

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ, \quad \angle BCE + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE,$$

$\because$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE \\ \angle ADC = \angle CEB \\ AC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB \text{ (AAS)};$$

$$\textcircled{2} \because \triangle ADC \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore CE = AD, \quad CD = BE,$$

$$\therefore DE = CE + CD = AD + BE;$$

(2) 证明: $\because AD \perp MN$, $BE \perp MN$,

$$\therefore \angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE,$$

$\because$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE \\ \angle ADC = \angle CEB \\ AC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB \text{ (AAS)};$$

$$\therefore CE=AD, CD=BE,$$

$$\therefore DE=CE-CD=AD-BE;$$

(3) 当 MN 旋转到题图 (3) 的位置时, AD, DE, BE 所满足的等量关系是: $DE=BE-AD$.

理由如下: $\because AD \perp MN, BE \perp MN$,

$$\therefore \angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE,$$

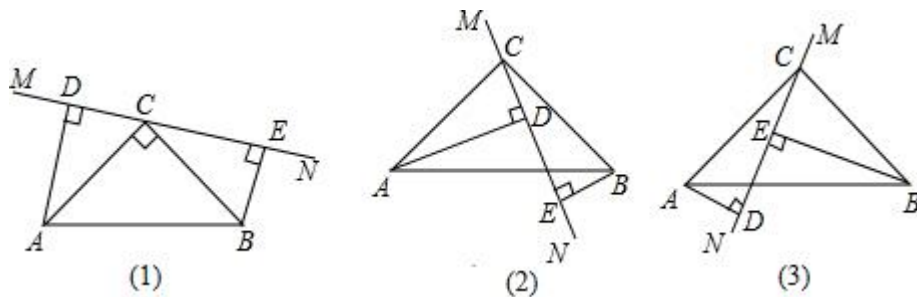
$\because$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE \\ \angle ADC = \angle CEB \\ AC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CE=AD, CD=BE,$$

$$\therefore DE=CD-CE=BE-AD.$$



【点评】 本题属于三角形综合题, 主要考查了全等三角形的判定与性质的综合应用, 解题时注意: 全等三角形的对应边相等, 同角的余角相等, 解决问题的关键是根据线段的和差关系进行推导, 得出结论.

4. (2022 秋•惠民县校级期末) (1) 如图 1, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 均是顶角为 40° 的等腰三角形, BC, DE 分别是底边, 求证: $BD=CE$;

(2) 如图 2, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一直线上, 连接 BE .

填空: $\angle AEB$ 的度数为 60° ; 线段 BE 与 AD 之间的数量关系是 $BE=AD$.

(3) 拓展探究

如图 3, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 A, D, E 在同一直线上, CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高, 连接 BE . 请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段 CM 、

AE 、 BE 之间的数量关系，并说明理由.

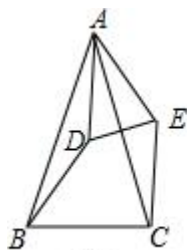


图1

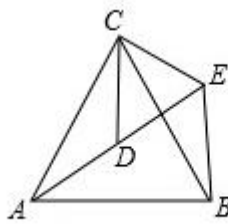


图2

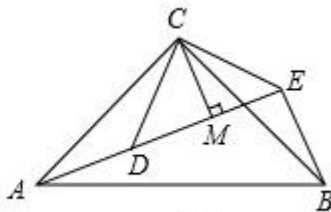


图3

【考点】全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形.

【分析】(1) 根据全等三角形的判定方法，判断出 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，即可判断出 $BD = CE$.

(2) 首先根据 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，可得 $AC = BC$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ ， $\angle CDE = \angle CED = 60^\circ$ ，据此判断出 $\angle ACD = \angle BCE$ ；然后根据全等三角形的判定方法，判断出 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，即可判断出 $BE = AD$ ， $\angle BEC = \angle ADC$ ，进而判断出 $\angle AEB$ 的度数为 60° 即可.

(3) 首先根据 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形，可得 $AC = BC$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，据此判断出 $\angle ACD = \angle BCE$ ；然后根据全等三角形的判定方法，判断出 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，即可判断出 $BE = AD$ ， $\angle BEC = \angle ADC$ ，进而判断出 $\angle AEB$ 的度数为 90° 即可；最后根据 $\angle DCE = 90^\circ$ ， $CD = CE$ ， $CM \perp DE$ ，可得 $CM = DM = EM$ ，所以 $DE = DM + EM = 2CM$ ，据此判断出 $AE = BE + 2CM$ 即可.

【解答】(1) 证明： $\because \angle BAC = \angle DAE = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\text{即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore BD = CE.$$

(2) 解： $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ, \angle CDE = \angle CED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB,$$

$$\text{即 } \angle ACD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore BE = AD, \quad \angle ADC = \angle BEC,$$

$\because$ 点 A, D, E 在同一直线上,

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

综上, 可得

$\angle AEB$ 的度数为 60° ; 线段 BE 与 AD 之间的数量关系是: $BE = AD$.

故答案为: 60° 、 $BE = AD$.

(3) 解: $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore AC = BC, \quad CD = CE, \quad \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ, \quad \angle CDE = \angle CED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB,$$

即 $\angle ACD = \angle BCE$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore BE = AD, \quad \angle BEC = \angle ADC,$$

$\because$ 点 A, D, E 在同一直线上,

$$\therefore \angle ADC = 180 - 45 = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 135 - 45 = 90^\circ;$$

$$\because \angle DCE = 90^\circ, \quad CD = CE, \quad CM \perp DE,$$

$$\therefore CM = DM = EM,$$

$$\therefore DE = DM + EM = 2CM,$$

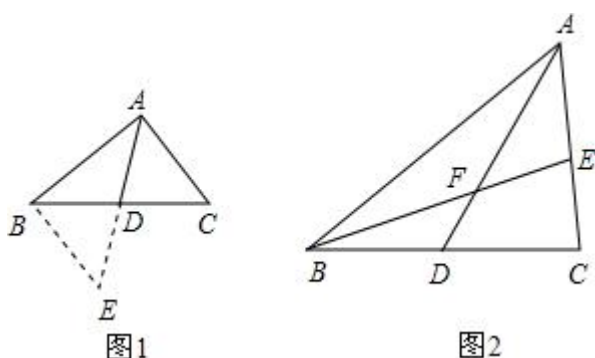
$$\therefore AE = AD + DE = BE + 2CM.$$

【点评】(1) 此题主要考查了全等三角形的判定方法和性质，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件.

(2) 此题还考查了等腰直角三角形的性质和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：等腰直角三角形是一种特殊的三角形，具有所有三角形的性质，还具备等腰三角形和直角三角形的所有性质.

5. (2022 秋·平舆县期末) 【阅读理解】

课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：



如图 1, $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=8$, $AC=6$, 求 BC 边上的中线 AD 的取值范围. 小明在组内经过合作交流, 得到了如下的解决方法: 延长 AD 到点 E , 使 $DE=AD$, 请根据小明的方法思考:

(1) 由已知和作图能得到 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ 的理由是 B.

A. SSS B. SAS C. AAS D. HL

(2) 求得 AD 的取值范围是 C.

A. $6 < AD < 8$ B. $6 \leq AD \leq 8$ C. $1 < AD < 7$ D. $1 \leq AD \leq 7$

【感悟】

解题时, 条件中若出现“中点”“中线”字样, 可以考虑延长中线构造全等三角形, 把分散的已知条件和所求证的结论集合到同一个三角形中.

【问题解决】

(3) 如图 2, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, BE 交 AC 于 E , 交 AD 于 F , 且 $AE=EF$. 求证: $AC=BF$.

【考点】全等三角形的判定与性质; 三角形三边关系.

【分析】(1) 根据 $AD=DE$, $\angle ADC = \angle BDE$, $BD=DC$ 推出 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 全等即可;

(2) 根据全等得出 $BE=AC=6$, $AE=2AD$, 由三角形三边关系定理得出 $8-6<2AD<8+6$, 求出即可;

(3) 延长 AD 到 M , 使 $AD=DM$, 连接 BM , 根据 SAS 证 $\triangle ADC \cong \triangle MDB$, 推出 $BM=AC$, $\angle CAD=\angle M$, 根据 $AE=EF$, 推出 $\angle CAD=\angle AFE=\angle BFD$, 求出 $\angle BFD=\angle M$, 根据等腰三角形的性质求出即可.

【解答】(1) 解: $\because$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADC = \angle BDE, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS),

故选 B ;

(2) 解: $\because$ 由 (1) 知: $\triangle ADC \cong \triangle EDB$,

$\therefore BE=AC=6$, $AE=2AD$,

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 中, $AB=8$, 由三角形三边关系定理得: $8-6<2AD<8+6$,

$\therefore 1<AD<7$,

故选 C .

(3) 证明:

延长 AD 到 M , 使 $AD=DM$, 连接 BM ,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 中线,

$\therefore CD=BD$,

$\because$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle MDB$ 中

$$\begin{cases} DC = DB \\ \angle ADC = \angle MDB \\ DA = DM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle MDB$,

$\therefore BM=AC$, $\angle CAD=\angle M$,

$\because AE=EF$,

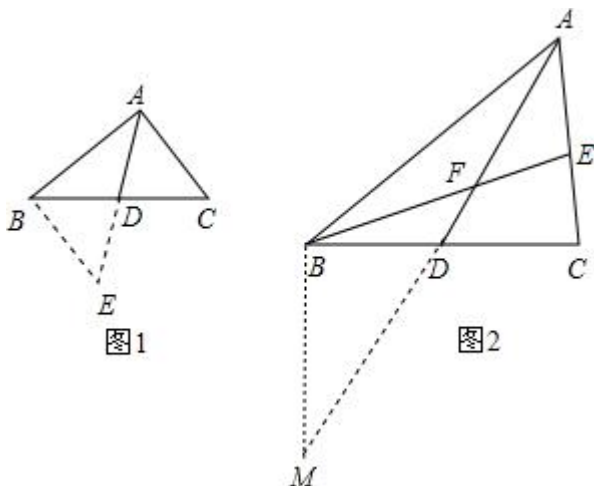
$\therefore \angle CAD=\angle AFE$,

$\because \angle AFE=\angle BFD$,

$$\therefore \angle BFD = \angle CAD = \angle M,$$

$$\therefore BF = BM = AC,$$

即 $AC = BF$.



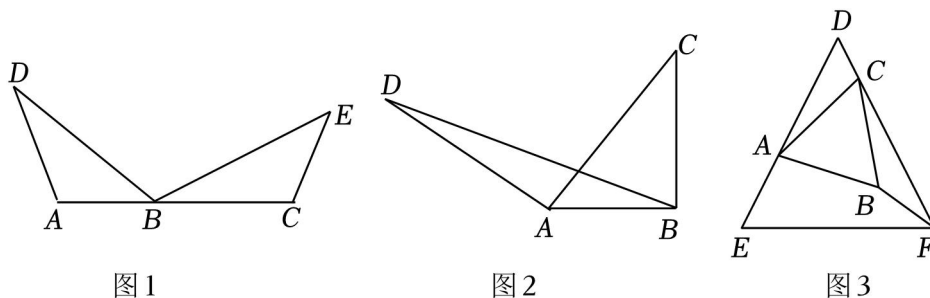
【点评】本题考查了三角形的中线，三角形的三边关系定理，等腰三角形性质和判定，全等三角形的性质和判定等知识点，主要考查学生运用定理进行推理的能力.

6. (2022 秋·东台市月考)【一线三等角模型】如图 1：点 A 、 B 、 C 在一条直线上， $\angle A = \angle DBE = \angle C$ ，当 $BD = BE$ 时，有 $\triangle ABD \cong \triangle CEB$. 理由：

$\because \angle A = \angle DBE, \therefore \angle D + \angle DBA = 180^\circ - \angle A, \angle DBA + \angle CBE = 180^\circ - \angle DBE, \therefore \angle D = \angle CBE$ - - - - - 请将全等证明过程补充完整.

【模型运用】如图 2： $\angle ABC = \angle CAD = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = AD$ ，求 $\triangle BAD$ 的面积；

【能力提升】如图 3：在等边 $\triangle DEF$ 中， A 、 C 分别为 DE 、 DF 边上的动点， $AE = 2CD$ ，连接 AC ，以 AC 为边在 $\triangle DEF$ 内作等边 $\triangle ABC$ ，连接 BF ，当点 A 从点 E 向点 D 运动（不与点 D 重合）时， $\angle CFB$ 的度数变化吗？如不变请求出它的度数，如变化，请说明它是怎样变化的？



【考点】三角形综合题.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】【一线三等角模型】如图 1：根据 AAS 证明三角形全等即可；

【模型运用】如图 2：过点 D 作 $DT \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 T 。构造全等三角形解决问题即可；

【能力提升】 $\angle CFB = 30^\circ$ 不变。如图 3 中，在 CF 上取一点 N ，使得 $FN = DC$ 。证明 $\triangle ADC \cong \triangle CNB$ (SAS)，推出 $BN = CD$ ， $\angle D = \angle BNC = 60^\circ$ ，可得结论。

【解答】【一线三等角模型】证明：如图 1： $\because \angle A = \angle DBE$ ，

$$\therefore \angle D + \angle DBA = 180^\circ - \angle A, \quad \angle DBA + \angle CBE = 180^\circ - \angle DBE,$$

$$\therefore \angle D = \angle CBE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle D = \angle CBE \\ BE = EB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CEB \text{ (AAS)};$$

【模型运用】解：如图 2：过点 D 作 $DT \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 T 。

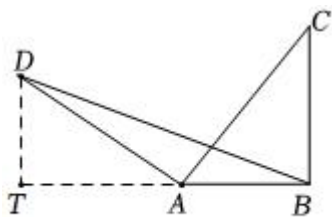


图2

同法可证 $\triangle ATD \cong \triangle CBA$ (AAS)，

$$\therefore DT = AB = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times DT = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8;$$

【能力提升】解： $\angle CFB = 30^\circ$ 不变。

理由：如图 3 中，在 CF 上取一点 N ，使得 $FN = DC$ 。

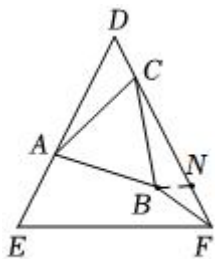


图3

$\because \triangle ABC, \triangle DEF$ 都是等边三角形,
 $\therefore \angle D = \angle ACB = 60^\circ$, $DA = DF$, $CA = CB$,
 $\because AE = 2CD$, $CD = FN$,
 $\therefore DA = CN$,
 $\because \angle ACN = \angle ACB + \angle BCN = \angle D + \angle CAD$,
 $\therefore \angle BCN = \angle DAC$,

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CNB$ 中,

$$\begin{cases} AD = CN \\ \angle CAD = \angle BCN, \\ AC = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CNB$ (SAS),
 $\therefore BN = CD$, $\angle D = \angle BNC = 60^\circ$,
 $\because NF = CD$,
 $\therefore NB = NF$,
 $\therefore \angle NBF = \angle NFB$,
 $\because \angle BNC = \angle NBF + \angle NFB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle NFB = \angle NBF = 30^\circ$,
 $\therefore \angle CFB = 30^\circ$.

【点评】 本题属于三角形综合题, 考查了等边三角形的性质, 全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造一线三等角模型, 利用全等三角形解决问题.

7. (2022 秋•辽阳期中) (1) 观察发现: 如图 1, $\angle MBN$ 的两条边 BM , BN 分别交正方形的边 AD , CD 于点 P , Q , 且 $\angle MBN = 45^\circ$, 连接 PQ , 直接写出 AP , CQ , PQ 的数量关系.

(2) 类比探究: 如图 2, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$, BM , BN 分别交四边形 $ABCD$ 两个外角的角平分线于 P , Q 两点, 连接 PQ , 以 AP , CQ , PQ 为边长可以构成一个三角形, 请你判断这个三角形的形状, 并给予证明.

(3) 能力提升: 在 (2) 问的条件下, 若四边形 $ABCD$ 是正方形, $BC = 2$, 请利用图 3 研究. 当 $\triangle PBQ$ 是等腰三角形时 PQ 的长度. (直接写出结果即可)

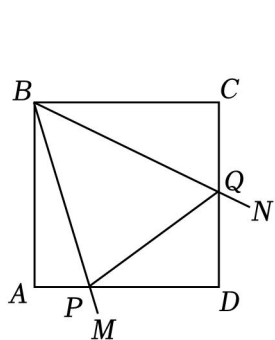


图1

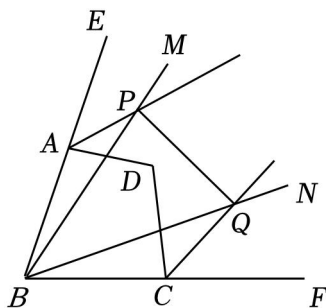


图2

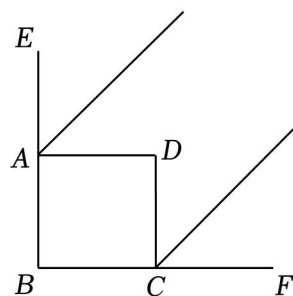


图3

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；分类讨论；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；运算能力；推理能力.

【分析】(1) 延长 DA 至 E 使 $AE = CQ$, 连接 BE , 证 $\triangle ABE \cong \triangle CBQ$ (SAS), 得 $BE = BQ$, $\angle ABE = \angle CBQ$, 再证 $\triangle PBE \cong \triangle PBQ$, 得 $PE = PQ$, 即可得出结论;

(2) 作 $\angle PBA' = \angle PBA$, 且使 $BA' = BA$, 连接 PA' 、 QA' , 证 $\triangle ABP \cong \triangle A'BP$ (SAS), 得 $\angle BAP = \angle BA'P$, $AP = A'P$, 同理 $\triangle CBQ \cong \triangle A'BQ$ (SAS), 得 $\angle BCQ = \angle BA'Q$, $CQ = A'Q$, 再证 $\angle EAP + \angle FCQ = 90^\circ$, 然后证 $\angle BAP + \angle BCQ = 270^\circ$, 则 $\angle BA'P + \angle BA'Q = 270^\circ$, 即可解决问题;

(3) 分三种情况, ① $BP = BQ$ 时, 作 $\angle PBA' = \angle PBA$, 且使 $BA' = BA$, 连接 PA' 、 QA' , 证 $AP = AB = 2$, 同理 $CQ = CB = 2$, 再证 $\triangle PA'Q$ 是等腰直角三角形, 即可解决问题;

② $PB = PQ$ 时, 过 P 作 $PG \perp BE$ 于点 G , 过 Q 作 $QK \perp BF$ 于点 K , GP 与 KQ 交于点 H , 由一线三直角全等模型可知, $\triangle BGP \cong \triangle PHQ$ (AAS), 得 $BG = PH$, $PG = QH$, 设 $AG = x$, $CK = y$, 则 $PG = QH = x$, $QK = y$, $KH = x + y$, $PH = BG = x + 2$, $BK = y + 2$, 联立方程组求出 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 即可解决问题;

③ $PQ = BQ$ 时, 解法同②.

【解答】解: (1) $AP + CQ = PQ$, 理由如下:

如图 1, 延长 DA 至 E 使 $AE = CQ$, 连接 BE ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = CB$, $\angle ABC = \angle BAD = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ = \angle C$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBQ$ (SAS),

$$\begin{aligned}
&\therefore BE=BQ, \quad \angle ABE=\angle CBQ, \\
&\therefore \angle ABE+\angle ABQ=\angle CBQ+\angle ABQ=\angle ABC=90^\circ, \\
&\text{即 } \angle EBQ=90^\circ, \\
&\because \angle MBN=45^\circ, \\
&\therefore \angle PBE=\angle EBQ-\angle MBN=90^\circ-45^\circ=45^\circ, \\
&\therefore \angle PBE=\angle PBQ, \\
&\text{又 } PB=PB, \\
&\therefore \triangle PBE\cong\triangle PBQ \text{ (SAS)}, \\
&\therefore PE=PQ, \\
&\because AP+AE=PE, \\
&\therefore AP+CQ=PQ;
\end{aligned}$$

(2) 以 AP , CQ , PQ 为边长可以构成一个直角三角形, 证明如下:

如图 2, 作 $\angle PBA'=\angle PBA$, 且使 $BA'=BA$, 连接 PA' 、 QA' ,

$$\begin{aligned}
&\because AB=BC, \\
&\therefore BA'=BC, \\
&\because \angle MBN=\frac{1}{2}\angle ABC, \\
&\therefore \angle PBA+\angle CBQ=\frac{1}{2}\angle MBN=\angle PBA'+\angle QBA', \\
&\therefore \angle CBQ=\angle QBA', \\
&\because AB=A'B, \quad BP=BP, \\
&\therefore \triangle ABP\cong\triangle A'BP \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle BAP=\angle BA'P, \quad AP=A'P, \\
&\text{同理 } \triangle CBQ\cong\triangle A'BQ \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle BCQ=\angle BA'Q, \quad CQ=A'Q, \\
&\because \angle ABC+\angle ADC=180^\circ, \\
&\therefore \angle BAD+\angle BCD=360^\circ-180^\circ=180^\circ, \\
&\therefore \angle DAE+\angle DCF=360^\circ-180^\circ=180^\circ, \\
&\because AP \text{ 平分 } \angle DAE, \quad CQ \text{ 平分 } \angle DCF, \\
&\therefore \angle EAP+\angle FCQ=\frac{1}{2}(\angle DAE+\angle DCF)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ,
\end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAP + \angle BCQ = 180^\circ + 180^\circ - (\angle EAP + \angle FCQ) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ,$$

$$\therefore \angle BA'P + \angle BA'Q = 270^\circ,$$

$$\therefore \angle PA'Q = 360^\circ - (\angle BA'P + \angle BA'Q) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PA'Q$ 是直角三角形,

即以 AP , CQ , PQ 为边长可以构成一个直角三角形;

(3) 分三种情况:

①如图 3, $BP=BQ$ 时, 作 $\angle PBA' = \angle PBA$, 且使 $BA' = BA$, 连接 PA' 、 QA' ,

由 (2) 可知, $A'P = AP$, $A'Q = CQ$, $\triangle PA'Q$ 是直角三角形,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ, AB = BC = 2,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\because \angle MBN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP + \angle CBQ = 45^\circ,$$

由正方形和等腰三角形的对称性可知, $\angle ABP = \angle CBQ = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ$,

$\because AP$ 平分 $\angle DAE$, CQ 平分 $\angle DCF$,

$$\therefore \angle PAE = \frac{1}{2} \angle DAE = 45^\circ, \angle QCF = \frac{1}{2} \angle DCF = 45^\circ,$$

$$\because \angle PAE = \angle ABP + \angle APB,$$

$$\therefore \angle APB = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP,$$

$$\therefore AP = AB = 2,$$

同理 $CQ = CB = 2$,

$$\therefore A'P = A'Q = 2,$$

$\therefore \triangle PA'Q$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore PQ = \sqrt{2}A'P = 2\sqrt{2};$$

②如图 4, $PB=PQ$ 时, 过 P 作 $PG \perp BE$ 于点 G , 过 Q 作 $QK \perp BF$ 于点 K , GP 与 KQ 交于点 H ,

则四边形 $BGHK$ 是矩形,

$$\therefore GH = BK, BG = KH,$$

由一线三直角全等模型可知, $\triangle BGP \cong \triangle PHQ$ (AAS),

$$\therefore BG=PH, PG=QH,$$

设 $AG=x$, $CK=y$, 则 $PG=QH=x$, $QK=y$, $KH=x+y$, $PH=BG=x+2$, $BK=y+2$,

$$\therefore GH=PG+PH=2x+2,$$

$$\therefore \begin{cases} 2x+2=y+2 \\ x+2=x+y \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases},$$

$$\therefore PH=3, QH=1,$$

在 $\text{Rt}\triangle PHQ$ 中, 由勾股定理得: $PQ=\sqrt{PH^2+QH^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$;

③如图 5, $PQ=BQ$ 时, 同②得: $PQ=\sqrt{10}$;

综上所述, 当 $\triangle PBQ$ 是等腰三角形时 PQ 的长度为 $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{10}$.

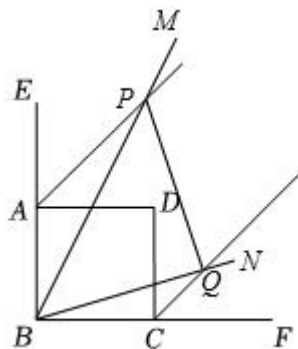


图 5

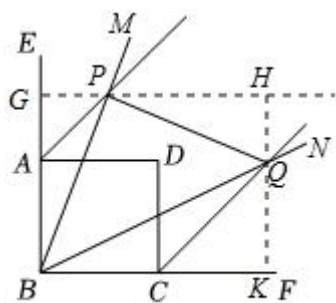


图 4

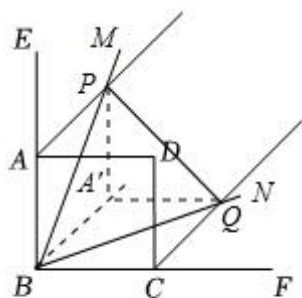


图 3

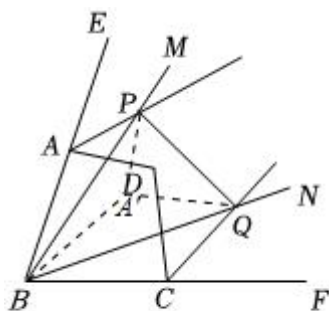


图2

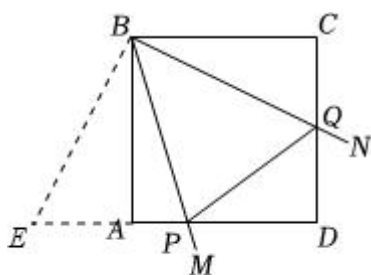


图1

【点评】本题是四边形综合题目，考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、矩形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、四边形内角和定理以及分类讨论等知识，本题综合性强，有一定难度，熟练掌握正方形的性质，证明三角形全等是解题的关键，属于中考常考题型。

8. (2022 秋•皇姑区校级月考) 思维启迪：

(1) 如图 1，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AB 的中点，过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交边 AC 于点 G ，过点 G 作 $GE \perp BC$ 于点 E ，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 60° ，得到线段 DF ，连接 AF 。

①求证： $\triangle ADG$ 是等边三角形；

②求证： $AF \perp AB$ 。

思维探索：

(2) 在等边 $\triangle ABC$ 中， $BC=8$ ，点 D 是边 AB 的中点，点 E 在直线 BC 上，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 DF ，连接 EF 。

①如图 2，当 $DF \perp BC$ 时，直接写出线段 EF 的长；

②当 $AF = \frac{7}{2}$ 时，直接写出线段 FC 的长。

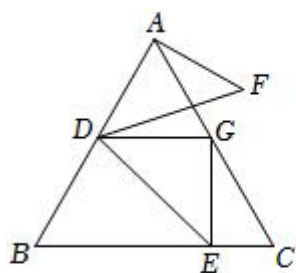


图1

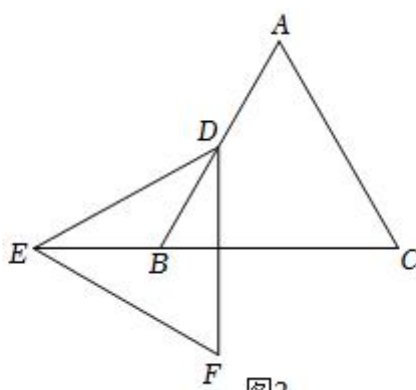
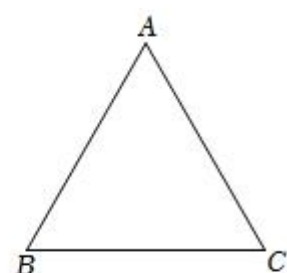


图2



备用图

【考点】几何变换综合题.

【专题】几何综合题；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；平移、旋转与对称；运算能力；推理能力.

【分析】(1) ①证明 $\angle A = \angle ADG = \angle AGD = 60^\circ$ ，进而求得结论；

②可证得 $\angle DAF = \angle DGE = 90^\circ$ ，进而得出 $AF \perp AB$ ；

(2) ①设 DF 交 BC 于 G ，解直角三角形 BDG 求得 $DG = 2\sqrt{3}$ ，进而求得 EF 的值；

②取 AC 的中点 G ，连接 DG ，作 $GN \perp BC$ 于 N ，作 $DH \perp BC$ 于 H ，作 $FT \perp BC$ 于 T ，将 $\triangle DHE$ 逆时针旋转 60° 至 $\triangle DRF$ ，作 $RM \perp DH$ 于 M ，交 FT 于 Q ，求得 $EG = AF = \frac{7}{2}$ ，

解 $\text{Rt}\triangle GCN$ 得 $GN = 2\sqrt{3}$ ， $CN = 2$ ，解 $\text{Rt}\triangle EGN$ ，求得 $EN = \frac{1}{2}$ ，从而得出 $FR = \frac{7}{2}$ ，

解 $\text{Rt}\triangle DMR$ ，求得 $DM = \sqrt{3}$ ， $MR = 3$ ，从而 $QT = \sqrt{3}$ ，可证得 $\triangle DRM \sim \triangle RFQ$ ，从而得出 $RQ = \frac{7}{4}$ ， $FQ = \frac{7}{4}\sqrt{3}$ ， $MQ = \frac{19}{4}$ ， $FT = \frac{11\sqrt{3}}{4}$ ，进而在 $\text{Rt}\triangle FCT$ 中求得结果，同样方法求得另一种情形.

【解答】(1) ①证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\because DG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle B = 60^\circ, \angle AGD = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADG = \angle AGD,$$

$$\therefore AD = AG = DG,$$

即： $\triangle ADG$ 是等边三角形；

②证明： $\because DG \perp BC$ ， $DG \parallel BC$ ，

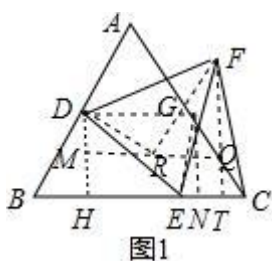
$$\therefore DG \perp EG,$$

$$\therefore \angle DGE = 90^\circ,$$

$\because \angle EDF = \angle ADG = 60^\circ$,
 $\therefore \angle EDF - \angle FDG = \angle ADG - \angle FDG$,
 即: $\angle ADF = \angle EDG$,
 $\because AD = DG, DF = DE$,
 $\therefore \triangle ADF \cong \triangle GDF$ (SAS),
 $\therefore \angle DAF = \angle DGE = 90^\circ$,
 $\therefore AF \perp AB$;

(2) 解: ① 设 DF 交 BC 于 G ,
 $\because DF \perp BC$,
 $\therefore \angle DGE = 90^\circ$,
 $\because \angle ABC = 60^\circ$, $BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = 4$,
 $\therefore DG = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$,
 $\because \triangle DEF$ 是等边三角形,
 $\therefore EF = DF = 2DG = 4\sqrt{3}$;

② 如图 1,



取 AC 的中点 G , 连接 DG , 作 $GN \perp BC$ 于 N , 作 $DH \perp BC$ 于 H , 作 $FT \perp BC$ 于 T , 将 $\triangle DHE$ 逆时针旋转 60° 至 $\triangle DRF$, 作 $RM \perp DH$ 于 M , 交 FT 于 Q ,

由②知: $EG = AF = \frac{7}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle GCN$ 中,

$$GN = \frac{\sqrt{3}}{2}CG = 2\sqrt{3}, \quad CN = \frac{1}{2}CG = 2,$$

同理可得: $DR = DH = 2\sqrt{3}$, $BH = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle EGN$ 中,

$$EN = \sqrt{EG^2 - GN^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore FR = EH = BC - BH - CN = EN, \quad 8 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle DMR$ 中,

$$DM = \frac{1}{2}DR = \sqrt{3}, \quad MR = \frac{\sqrt{3}}{2}DR = 3,$$

$$\therefore QT = MH = DH - DM = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

由 $\triangle DRM \sim \triangle RFQ$ 得,

$$\frac{DM}{RQ} = \frac{RM}{FQ} = \frac{DR}{FR},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{RQ} = \frac{3}{FQ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{7}{2}},$$

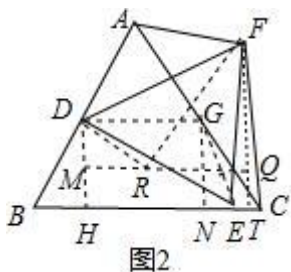
$$\therefore RQ = \frac{7}{4}, \quad FQ = \frac{7}{4}\sqrt{3},$$

$$\therefore MQ = RM + RQ = 3 + \frac{7}{4} = \frac{19}{4}, \quad FT = FQ + QT = \frac{7\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{11\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle FCT \text{ 中, } CT = BC - BH - HT = BC - BH - MQ = 8 - 2 - \frac{19}{4} = \frac{5}{4}, \quad FT = \frac{11\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore CF = \sqrt{CT^2 + FT^2} = \frac{\sqrt{97}}{2},$$

如图 2,



$$\text{同样方法求得: } FR = EH = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore RQ = \frac{9}{4}, \quad FQ = \frac{9}{4}\sqrt{3},$$

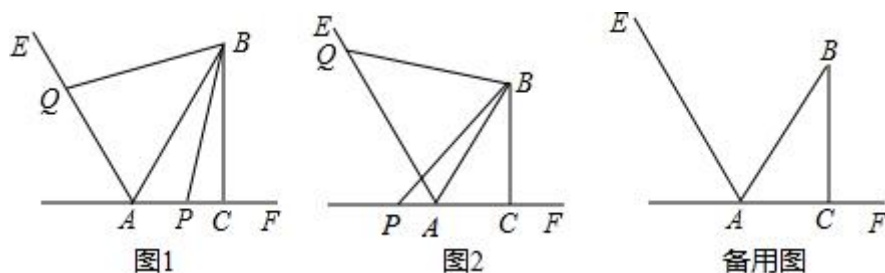
$$\therefore MQ = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}, \quad FT = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{13\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore CF = \sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2 + \left(\frac{13\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{274}}{2}$$

综上所述: CF 的长为: $\frac{\sqrt{97}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{274}}{2}$.

【点评】 本题考查了等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 解决问题的关键是作辅助线, 构造相似三角形.

9. (2022 秋•古冶区期中) 如图：在 $\angle EAF$ 的平分线上取点 B 作 $BC \perp AF$ 于点 C ，在直线 AC 上取一动点 P 。在直线 AE 上取点 Q 使得 $BQ = BP$ 。



(1) 如图 1，当点 P 在线段 AC 上时， $\angle BQA + \angle BPA = \underline{180}^\circ$ ；

(2) 如图 2，当点 P 在 CA 延长线上时，探究 AQ 、 AP 、 AC 三条线段之间的数量关系，说明理由；

(3) 在满足 (1) 的结论条件下，当点 P 运动到在射线 AC 上时，直接写出 AQ 、 AP 、 PC 三条线段之间的数量关系为： $\underline{AQ - AP = 2PC \text{ 或 } AP - AQ = 2PC}$ 。

【考点】三角形综合题。

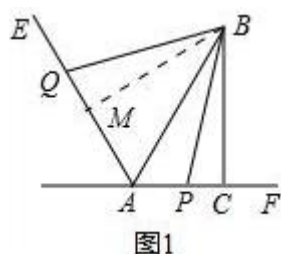
【专题】几何综合题；三角形；推理能力；应用意识。

【分析】(1) 作 $BM \perp AE$ 于点 M ，根据角平分线的性质得到 $BM = BC$ ，证明 $\text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BPC$ (HL)，进而证明 $\angle BQA = \angle BPC$ 即可得出答案；

(2) 作 $BM \perp AE$ 于点 M ，证明 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC$ (HL)，得到 $\angle ABM = \angle ABC$ ， $AM = AC$ ， $BM = BC$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BCP$ (HL)，从而得出 $PC = QM$ 即可；

(3) 分两种情况进行讨论， P 在线段 AC 上或 P 在线段 AC 的延长线上，作出图后，由 $\triangle QBM \cong \triangle PBC$ (AAS)，得 $\angle QBC = \angle PBC$ ， $QM = PC$ ， $BM = BC$ ，结合 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC$ (HL)，得出 $AM = AC$ ，利用线段和差计算即可。

【解答】解：(1) 作 $BM \perp AE$ 于点 M ，



$\because AB$ 平分 $\angle EAF$ ， $BC \perp AF$ ，

$\therefore BM = BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BMQ$ 和 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中，

$$\begin{cases} BQ = BP \\ BM = BC' \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BPC \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle BQA = \angle BPC,$$

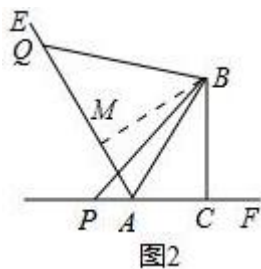
$$\text{又} \because \angle BPC + \angle BPA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ,$$

故答案为：180；

(2) $AQ - AP = 2AC$ ，理由如下，

作 $BM \perp AE$ 于点 M ，



$$\because AB \text{ 平分 } \angle EAF, BC \perp AF,$$

$$\therefore BM = BC, \angle BMA = \angle BCA = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle ABM = \angle ABC, AM = AC,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMQ$ 和 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中，

$$\begin{cases} BQ = BP \\ BM = BC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BCP \text{ (HL)},$$

$$\therefore PC = QM,$$

$$\therefore AQ - QP = (AM + QM) - (PC - AC) = AM + AC = 2AC;$$

(3) 当点 P 在线段 AC 上时，如图， $AQ - AP = 2PC$ ，

作 $BM \perp AE$ 于点 M ，

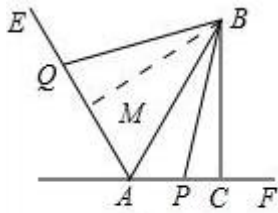


图1

$\because BC \perp AF,$

$\therefore \angle BMA = \angle BCA = 90^\circ,$

$\because \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ, \angle BPC + \angle BPA = 180^\circ,$

$\therefore \angle BPC = \angle BQM,$

在 $\triangle QBM$ 和 $\triangle PBC$ 中,

$$\begin{cases} \angle BMQ = \angle BCP \\ \angle BQM = \angle BPC, \\ QB = PB \end{cases}$$

$\therefore \triangle QBM \cong \triangle PBC \text{ (AAS)},$

$\therefore \angle QBC = \angle PBC, QM = PC, BM = BC,$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases},$$

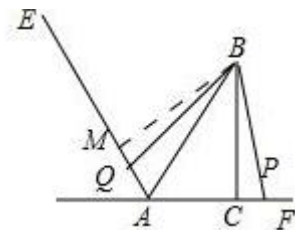
$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC \text{ (HL)},$

$\therefore AM = AC,$

$\therefore AQ - AP = AM + QM - (AC - PC) = QM + PC = 2PC;$

当 P 在线段 AC 的延长线上, 如图, $AP - AQ = 2PC,$

作 $BM \perp AE$ 于点 $M,$



$\because BC \perp AF,$

$\therefore \angle BMA = \angle BCA = 90^\circ,$

$\because \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ, \angle BQM + \angle BQA = 180^\circ,$

$\therefore \angle BPC = \angle BQM,$

在 $\triangle QBM$ 和 $\triangle PBC$ 中,

$$\begin{cases} \angle BMQ = \angle BCP \\ \angle BQM = \angle BPC, \\ QB = PB \end{cases}$$

$\therefore \triangle QBM \cong \triangle PBC$ (AAS),

$\therefore \angle QBC = \angle PBC, QM = PC, BM = BC,$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC$ (HL),

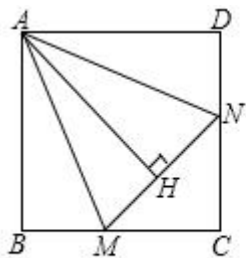
$\therefore AM = AC,$

$\therefore AP - AQ = AC + CP - (AM - QM) = MQ + PC = 2PC.$

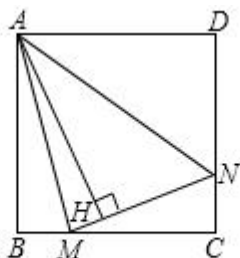
故答案为: $AQ - AP = 2PC$ 或 $AP - AQ = 2PC.$

【点评】 本题考查了三角形的综合应用, 做题关键要掌握角平分线性质, 三角形全等的判定.

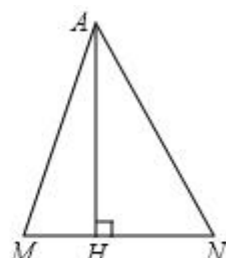
10. (2022•集贤县模拟) 已知正方形 $ABCD$ 中, $\angle MAN = 45^\circ$, $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转, 它的两边分别交 CB , DC (或它们的延长线) 于点 M , N , $AH \perp MN$ 于点 H .



图①



图②



图③

(1) 如图①, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时, 请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系: $AB = AH$;

(2) 如图②, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时, (1)中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗? 如果不成立请写出理由, 如果成立请证明;

(3) 如图③, 已知 $\angle MAN = 45^\circ$, $AH \perp MN$ 于点 H , 且 $MH = 2$, $AH = 6$, 求 NH 的长. (可利用(2)得到的结论)

【考点】 四边形综合题.

【专题】 图形的全等; 矩形 菱形 正方形; 推理能力; 应用意识.

【分析】 (1) 由 $BM = DN$ 可得 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ADN$, 从而可证 $\angle BAM = \angle MAH = 22.5^\circ$,

$\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle AHM$ ，即可得 $AB=AH$ ；

(2) 延长 CB 至 E ，使 $BE=DN$ ，由 $\text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AND$ 得 $AE=AN$ ， $\angle EAB=\angle NAD$ ，从而可证 $\triangle AEM \cong \triangle ANM$ ，根据全等三角形对应边上的高相等即可得 $AB=AH$ ；

(3) 分别沿 AM ， AN 翻折 $\triangle AMH$ 和 $\triangle ANH$ ，得到 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AND$ ，分别延长 BM 和 DN 交于点 C ，可证四边形 $ABCD$ 是正方形，设 $NH=x$ ，在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中，由勾股定理列方程即可得答案。

【解答】解：(1) $\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB=AD, \angle B=\angle D=\angle BAD=90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle B=\angle D, \\ BM=DN \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ADN \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAM=\angle DAN, AM=AN,$$

$$\because \angle MAN=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM+\angle DAN=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM=\angle DAN=22.5^\circ,$$

$$\because \angle MAN=45^\circ, AM=AN, AH \perp MN$$

$$\therefore \angle MAH=\angle NAH=22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM=\angle MAH,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle AHM$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAM=\angle MAH \\ \angle B=\angle AHM \\ AM=AM \end{cases},$$

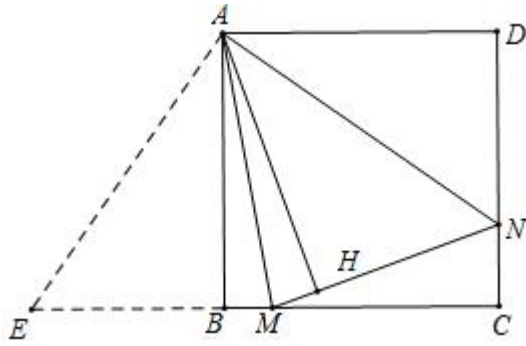
$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle AHM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AB=AH,$$

故答案为： $AB=AH$ ；

(2) $AB=AH$ 成立，理由如下：

延长 CB 至 E ，使 $BE=DN$ ，如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB=AD, \angle D=\angle ABE=90^\circ$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AND$ (SAS),

$\therefore AE=AN, \angle EAB=\angle NAD$,

$\because \angle DAN+\angle BAM=45^\circ$,

$\therefore \angle EAB+\angle BAM=45^\circ$,

$\therefore \angle EAM=45^\circ$,

$\therefore \angle EAM=\angle NAM=45^\circ$,

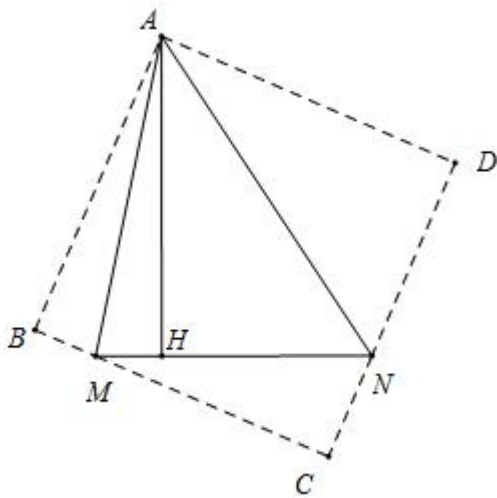
又 $AM=AM$,

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM$ (SAS),

$\because AB, AH$ 是 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ANM$ 对应边上的高,

$\therefore AB=AH$.

(3) 分别沿 AM, AN 翻折 $\triangle AMH$ 和 $\triangle ANH$, 得到 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AND$, 分别延长 BM 和 DN 交于点 C , 如图:



$\because$ 沿 AM, AN 翻折 $\triangle AMH$ 和 $\triangle ANH$, 得到 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AND$,

$\therefore AB=AH=AD=6$, $\angle BAD=2\angle MAN=90^\circ$, $\angle B=\angle AHM=90^\circ=\angle AHN=\angle D$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AH=AB=BC=CD=AD=6$.

由 (2) 可知, 设 $NH=x$, 则 $MC=BC-BM=BC-HM=4$, $NC=CD-DN=CD-NH=6-x$,

在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中, 由勾股定理, 得 $MN^2=MC^2+NC^2$,

$\therefore (2+x)^2=4^2+(6-x)^2$,

解得 $x=3$,

$\therefore NH=3$.

【点评】 本题考查正方形性质及应用, 涉及全等三角形判定与性质、勾股定理等知识, 解题的关键是作辅助线, 构造全等三角形.

11. (2022 春·椒江区校级期中) 我们规定: 有一组邻边相等, 且这组邻边的夹角为 60° 的凸四边形叫做“准筝形”.

(1) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A+\angle C=270^\circ$, $\angle D=30^\circ$, $AB=CB$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是“准筝形”;

(2) 小军同学研究“准筝形”时, 思索这样一道题: 如图 2, “准筝形” $ABCD$, $AD=BD$, $\angle BAD=\angle BCD=60^\circ$, $BC=5$, $CD=3$, 求 AC 的长.

小军研究后发现, 可以 CD 为边向外作等边三角形, 构造手拉手全等模型, 用转化的思想来求 AC . 请你按照小军的思路求 AC 的长.

(3) 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=45^\circ$, $\angle ABC=120^\circ$, $BC=2\sqrt{3}$, 设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 当四边形 $ABCD$ 是“准筝形”时, 请直接写出四边形 $ABCD$ 的面积.

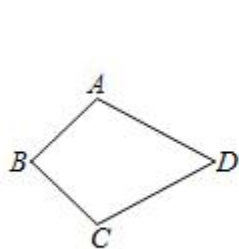


图 1

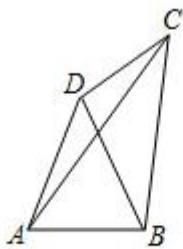


图 2

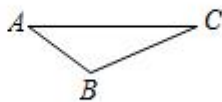
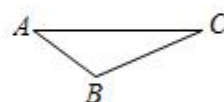


图 3



备用图

【考点】 四边形综合题.

【专题】 几何综合题; 推理能力.

【分析】 (1) 由四边形内角和定理求出 $\angle B=60^\circ$, 由 $AB=CB$, 即可得出结论;

(2) 以 CD 为边作等边 $\triangle CDE$, 连接 BE , 过点 E 作 $EF \perp BC$ 于 F , 证 $\triangle ADC \cong \triangle BDE$

(SAS), 得 $AC=BE$, 求出 $\angle CEF=30^\circ$, 由直角三角形的性质得出 $CF=\frac{1}{2}CE=\frac{3}{2}$, 由勾股定理求出 $EF=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 再由勾股定理即可得出答案;

(3) 过点 C 作 $CH \perp AB$, 交 AB 延长线于 H , 设 $BH=x$, 求出 $\angle BCH=30^\circ$, 由直角三角形的性质得出 $HC=x$, $BC=2BH=2x$, 构建方程求出 x , 进而得出 AC 的长, 分三种情况, 分别求解即可.

【解答】(1) 证明: 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$,

$$\because \angle A + \angle C = 270^\circ, \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 360^\circ - (\angle A + \angle C + \angle D) = 360^\circ - (270^\circ + 30^\circ) = 60^\circ,$$

$$\because AB = CB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“准筝形”;

(2) 解: 以 CD 为边作等边 $\triangle CDE$, 连接 BE , 过点 E 作 $EF \perp BC$ 于 F , 如图 2 所示:

则 $DE=DC=CE=3$, $\angle CDE = \angle DCE = 60^\circ$,

$$\because AB = AD, \angle BAD = \angle BCD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ADB = 60^\circ, AD = BD,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle BDC = \angle CDE + \angle BDC,$$

即 $\angle ADC = \angle BDE$,

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDE$ 中,

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADC = \angle BDE \\ DC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AC = BE,$$

$$\because \angle BCD = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\because \angle EFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = 30^\circ,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2},$$

$$\text{由勾股定理得: } EF = \sqrt{EC^2 - CF^2} = \sqrt{3^2 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$BF = BC + CF = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEF \text{ 中, 由勾股定理得: } BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{(\frac{13}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} = 7,$$

$$\therefore AC = BE = 7.$$

(3) 解: 过点 C 作 $CH \perp AB$, 交 AB 延长线于 H , 如图 3 所示:

设 $BH = x$,

$\because \angle ABC = 120^\circ$, CH 是 $\triangle ABC$ 的高线,

$\therefore \angle BCH = 30^\circ$,

$$\therefore HC = \sqrt{3}x, BC = 2BH = 2x = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore x = \sqrt{3},$$

又 $\because \angle A = 45^\circ$,

$\therefore \triangle HAC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore HA = HC = 3, AB = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}HC = 3\sqrt{2},$$

当 $AB = AD = 3 - \sqrt{3}$, $\angle BAD = 60^\circ$ 时,

连接 BD , 过点 C 作 $CG \perp BD$, 交 BD 延长线于点 G , 过点 A 作 $AK \perp BD$, 如图 4 所示:

$$\text{则 } BD = 3 - \sqrt{3}, \angle ABD = 60^\circ, BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}),$$

$\because \angle ABC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle CBG = 60^\circ = \angle CBH,$$

在 $\triangle CBG$ 和 $\triangle CBH$ 中,

$$\begin{cases} \angle CGB = \angle CHB = 90^\circ \\ \angle CBG = \angle CBH \\ BC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CBG \cong \triangle CBH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore GC = HC = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABK \text{ 中, 由勾股定理得: } AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2 - [\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})]^2} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AK = \frac{1}{2} \times (3 - \sqrt{3}) \times \frac{3\sqrt{3}-3}{2} = \frac{6\sqrt{3}-9}{2}, \quad S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot CG = \frac{1}{2} \times (3 - \sqrt{3}) \times 3 = \frac{9-3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{6\sqrt{3}-9}{2} + \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

②当 $BC=CD=2\sqrt{3}$, $\angle BCD=60^\circ$ 时,

连接 BD , 作 $CG \perp BD$ 于点 G , $AK \perp BD$ 于 K , 如图 5 所示:

$$\text{则 } BD = 2\sqrt{3}, \quad CG = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3, \quad AK = \frac{3\sqrt{3}-3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CG = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}, \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AK = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3}-3}{2} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 3\sqrt{3} + \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{9+3\sqrt{3}}{2};$$

③当 $AD=CD=AC=3\sqrt{2}$, $\angle ADC=60^\circ$ 时,

作 $DM \perp AC$ 于 M , 如图 6 所示:

$$\text{则 } DM = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \times (3 - \sqrt{3}) \times 3 = \frac{9-3\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DM = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{3},$$

综上所述, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{9}{2} + 3\sqrt{3}$.

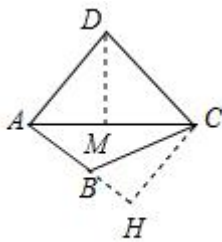


图 6

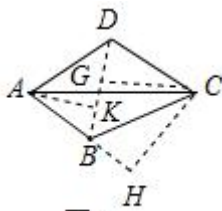


图 5

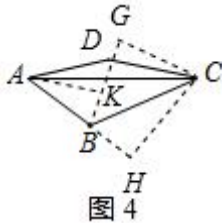


图 4

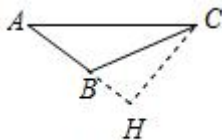


图 3

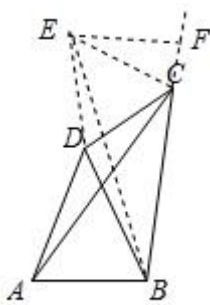


图 2

【点评】本题是四边形综合题目，考查了“准筝形”的判定与性质、四边形内角和定理、全等三角形的判定与性质含 30° 角的直角三角形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理、三角形面积等知识；本题综合性强，熟练掌握准筝形的判定与性质和直角三角形的性质，证明三角形全等是解题的关键。

12. (2022 秋•西城区校级期中) (1) 问题背景.

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle B+\angle D=180^\circ$ ， E 、 F 分别是线段 BC 、线段 CD 上的点. 若 $\angle BAD=2\angle EAF$ ，试探究线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系.

小明同学探究此问题的方法是，延长 FD 到点 G ，使 $DG=BE$. 连接 AG ，先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$. 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，可得出结论，他的结论应是 $EF=BE+DF$.

(2) 猜想论证.

如图 2，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle B+\angle ADC=180^\circ$ ， E 在线段 BC 上、 F 在线段 CD 延长线上. 若 $\angle BAD=2\angle EAF$ ，上述结论是否依然成立？若成立说明理由；若不成立，试写出相应的结论并给出你的证明.

(3) 拓展应用.

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BDC=45^\circ$ ，连接 BC 、 AD ， $AB:AC:BC=3:4:5$ ，

$AD=4$, 且 $\angle ABD+\angle CBD=180^\circ$. 则 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{8}{3}$.

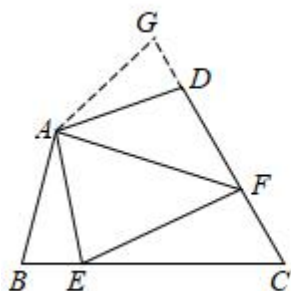


图1

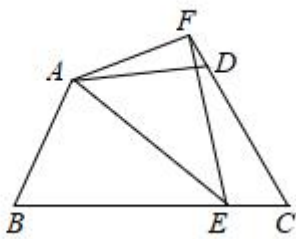


图2

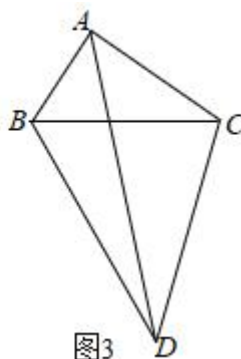


图3

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；应用意识.

【分析】(1) 延长 FD 到点 G , 使 $DG=BE$. 连接 AG , 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS), 可得 $AE=AG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SAS), 可得 $EF=FG$, 即可解题;

(2) 在 BE 上截取 BG , 使 $BG=DF$, 连接 AG . 根据 (1) 的证法, 我们可得出 $DF=BG$, $GE=EF$, 那么 $EF=GE=BE-BG=BE-DF$.

(3) 如图 3 中, 如图 3 中, 过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 AB 的延长线于 H , $DK \perp AC$ 交 AC 的延长线于 K , $DJ \perp BC$ 于 J . 证明四边形 $AHDK$ 是正方形即可解决问题.

【解答】解: 延长 FD 到点 G . 使 $DG=BE$, 连接 AG ,

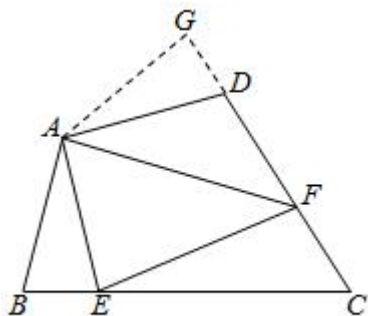


图 1

$\because \angle B + \angle ADF = 180^\circ$, $\angle ADF + \angle ADG = 180^\circ$,

$\therefore \angle ADG = \angle B$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} BE = DG \\ \angle B = \angle ADG, \\ AB = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS),

$\therefore AE = AG$, $\angle BAE = \angle DAG$,

$$\because \angle BAD = 2\angle EAF,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF = \angle BAD - \angle EAF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = FG,$$

$$\because FG = DG + DF = BE + DF,$$

$$\therefore EF = BE + DF;$$

故答案为: $EF = BE + DF$.

(2) 结论 $EF = BE + FD$ 不成立, 结论: $EF = BE - FD$.

理由如下: 证明: 如图 2 中, 在 BE 上截取 BG , 使 $BG = DF$, 连接 AG .

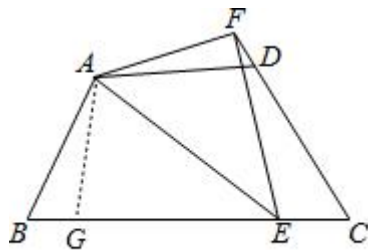


图 2

$$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF.$$

$\because$ 在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABG = \angle ADF, \\ BG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, \quad AG = AF.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAG + \angle GAD = \angle DAF + \angle GAD = \angle GAF.$$

$$\because \angle BAD = 2\angle EAF,$$

$$\therefore \angle GAF = 2\angle EAF,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

$$\because AE=AE,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore EG=EF$$

$$\because EG=BE-BG$$

$$\therefore EF=BE-FD.$$

(3) 如图3中，如图3中，过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 AB 的延长线于 H ， $DK \perp AC$ 交 AC 的延长线于 K ， $DJ \perp BC$ 于 J 。

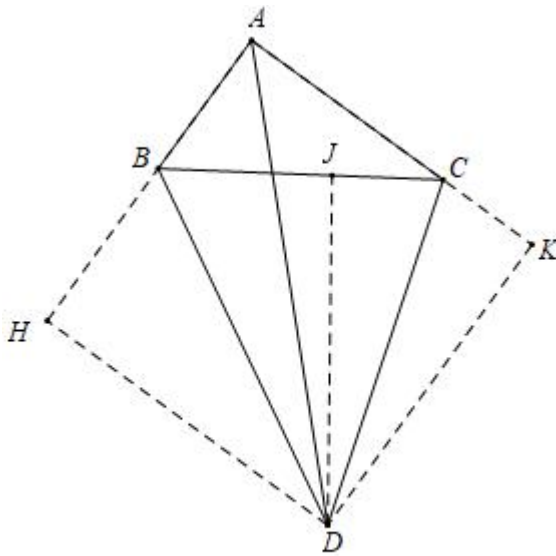


图3

$$\because AB: AC: BC=3: 4: 5,$$

$$\therefore \text{可以假设 } AB=3k, AC=4k, BC=5k,$$

$$\therefore AB^2+AC^2=BC^2,$$

$$\therefore \angle BAC=90^\circ,$$

$$\because \angle H=\angle K=90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } AHDK \text{ 是矩形},$$

$$\therefore \angle HDK=90^\circ,$$

$$\because \angle BDC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH+\angle CDK=45^\circ,$$

$$\because \angle ABD+\angle CBD=180^\circ, \angle ABD+\angle DBH=180^\circ,$$

$$\therefore \angle DBH=\angle DBC,$$

$\because \angle H = \angle DJB = 90^\circ$, $DB = DB$,
 $\therefore \triangle BDH \cong \triangle BDJ$ (AAS),
 $\therefore DH = DJ$, $\angle BDH = \angle BDJ$, $BH = BJ$,
 $\because \angle BDJ + \angle CDJ = 45^\circ$, $\angle BHH + \angle CDK = \angle BDJ + \angle CDK = 45^\circ$,
 $\therefore \angle CDJ = \angle CDK$,
 $\because \angle K = \angle DJC = 90^\circ$, $CD = CD$,
 $\therefore \triangle CDK \cong \triangle CDJ$ (AAS),
 $\therefore DJ = DK$, $CJ = CK$,
 $\therefore DH = DK$,
 $\therefore$ 四边形 $AHDK$ 是正方形,
 $\therefore BH + CK = BJ + CJ = 5k$,
 $\therefore AH + AK = 12k$,
 $\therefore AK = KD = 6k$,
 $\because AD = 4$,
 $\therefore AK = DK = 2\sqrt{2} = 6k$,
 $\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
 $\therefore AC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$,
 $\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}$.
 故答案为 $\frac{8}{3}$.

【点评】 本题考查了四边形综合题，三角形全等的判定和性质；本题中通过全等三角形来实现线段的转换是解题的关键，没有明确的全等三角形时，要通过辅助线来构建与已知和所求条件相关联全等三角形.

13. (2022•十堰模拟) (1) 如图 1, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一直线上, 连接 BE .

- ① $\angle AEB$ 的度数为 60° ;
 ② 线段 AD, BE 之间的数量关系为 $AD = BE$;

(2) 如图 2, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 A, D, E 在同一直线上, CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高, 连接 BE , 请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段

CM , AE , BE 之间的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 如图 3, 在正方形 $ABCD$ 中, $CD = \sqrt{3}$, 若点 P 满足 $PD = 1$, 且 $\angle BPD = 90^\circ$, 请直接写出点 A 到 BP 的距离为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

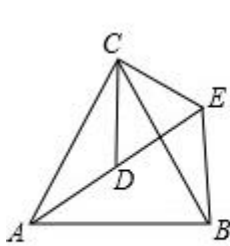


图1

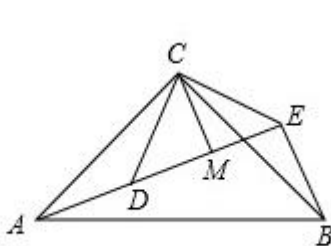


图2

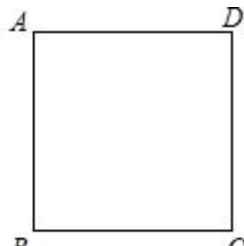


图3

【考点】 四边形综合题.

【专题】 几何综合题; 几何直观; 推理能力.

【分析】 (1) 由条件易证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$, 从而得到: $AD = BE$, $\angle ADC = \angle BEC$. 由点 A , D , E 在同一直线上可求出 $\angle ADC$, 从而可以求出 $\angle AEB$ 的度数.

(2) 仿照 (1) 中的解法可求出 $\angle AEB$ 的度数, 证出 $AD = BE$; 由 $\triangle DCE$ 为等腰直角三角形及 CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高可得 $CM = DM = ME$, 从而证到 $AE = 2CH + BE$.

(3) 由 $PD = 1$ 可得: 点 P 在以点 D 为圆心, 1 为半径的圆上; 由 $\angle BPD = 90^\circ$ 可得: 点 P 在以 BD 为直径的圆上. 显然, 点 P 是这两个圆的交点, 由于两圆有两个交点, 接下来需对两个位置分别进行讨论. 然后, 添加适当的辅助线, 借助于 (2) 中的结论即可解决问题.

【解答】 解: (1) ① 如图 1,

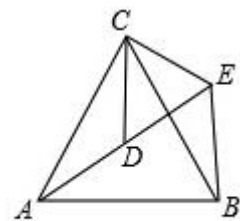


图1

$\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形,

$\therefore CA = CB$, $CD = CE$, $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$.

$\therefore \angle ACD = \angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\because \begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SAS).

$\therefore \angle ADC = \angle BEC$.

$\because \triangle DCE$ 为等边三角形,

$\therefore \angle CDE = \angle CED = 60^\circ$.

$\because$ 点 A, D, E 在同一直线上,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ$.

$\therefore \angle BEC = 120^\circ$.

$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 60^\circ$.

故答案为: 60° .

② $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$,

$\therefore AD = BE$.

故答案为: $AD = BE$.

(2) $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE + 2CM$.

理由: 如图 2,

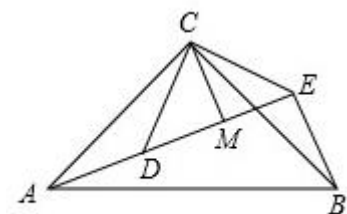


图2

$\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形,

$\therefore CA = CB$, $CD = CE$, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$.

$\therefore \angle ACD = \angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SAS).

$\therefore AD = BE$, $\angle ADC = \angle BEC$.

$\because \triangle DCE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CDE = \angle CED = 45^\circ .$$

$\because$ 点 A, D, E 在同一直线上,

$$\therefore \angle ADC = 135^\circ .$$

$$\therefore \angle BEC = 135^\circ .$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 90^\circ .$$

$\because CD = CE, CM \perp DE,$

$$\therefore DM = ME.$$

$$\because \angle DCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore DM = ME = CM.$$

$$\therefore AE = AD + DE = BE + 2CM.$$

(3) 点 A 到 BP 的距离为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

理由如下:

$$\because PD = 1,$$

$\therefore$ 点 P 在以点 D 为圆心, 1 为半径的圆上.

$$\because \angle BPD = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 点 P 在以 BD 为直径的圆上.

$\therefore$ 点 P 是这两圆的交点.

① 当点 P 在如图 3① 所示位置时,

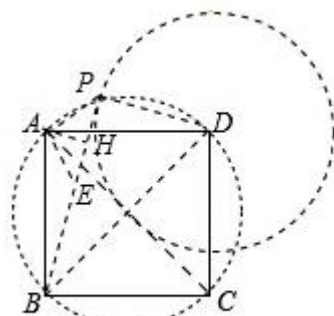


图3①

连接 $PD, PB, PA,$

作 $AH \perp BP$, 垂足为 H , 过点 A 作 $AE \perp AP$, 交 BP 于点 E ,

如图 3①. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ADB = 45^\circ . AB = AD = DC = BC = \sqrt{3}, \angle BAD = 90^\circ .$$

$$\therefore BD = \sqrt{6}.$$

$$\because DP = 1,$$

$$\therefore BP = \sqrt{5}.$$

$$\because \angle BPD = \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore A, P, D, B$ 在以 BD 为直径的圆上,

$$\therefore \angle APB = \angle ADB = 45^\circ.$$

$\therefore \triangle PAE$ 是等腰直角三角形.

又 $\because \triangle BAD$ 是等腰直角三角形, 点 B, E, P 共线, $AH \perp BP$,

$$\therefore \text{由 (2) 中的结论可得: } BP = 2AH + PD.$$

$$\therefore \sqrt{5} = 2AH + 1.$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

② 当点 P 在如图 3② 所示位置时,

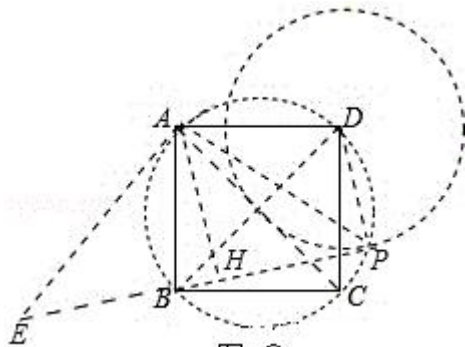


图3②

连接 PD, PB, PA , 作 $AH \perp BP$, 垂足为 H , 过点 A 作 $AE \perp AP$, 交 PB 的延长线于点 E , 如图 3②.

同理可得: $BP = 2AH - PD$.

$$\therefore \sqrt{5} = 2AH - 1.$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

综上所述: 点 A 到 BP 的距离为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

【点评】此题是四边形的综合题, 本题考查了等边三角形的性质、正方形的性质、等腰三角形的性质、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、圆周角定理、三角形全等的判定与性质等知识, 考查了运用已有的知识和经验解决问题的能力, 是体现新课程理念的一道好题. 而通过添加适当的辅助线从而能用 (2) 中的结论解决问题是解决第 (3)

的关键.

14. (2022•黄冈二模) (1) 问题发现: 如图 1, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一直线上, 连接

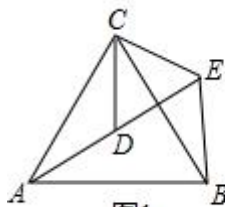


图1

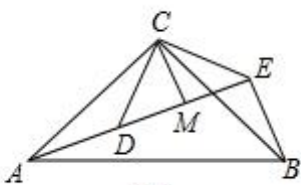


图2

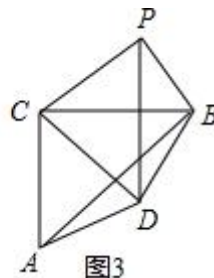


图3

BE .

填空: ① $\angle AEB$ 的度数为 60° ;

② 线段 AD, BE 之间的数量关系为 $AD=BE$;

(2) 拓展探究

如图 2, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 A, D, E 在同一直线上, CM 为 $\triangle DCE$ 中 DE 边上的高, 连接 BE , 请判断 $\angle AEB$ 的度数及线段 CM, AE, BE 之间的数量关系, 并说明理由;

(3) 解决问题

如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 5$, 平面上一动点 P 到点 B 的距离为 3, 将线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 90° , 得到线段 CD , 连 DA, DB, PB , 则 BD 是否有最大值和最小值, 若有直接写出, 若没有说明理由?

【考点】几何变换综合题.

【专题】综合题.

【分析】(1) ① 证明 $\triangle CDA \cong \triangle CEB$, 根据得到 $\angle CEB = \angle CDA = 120^\circ$, 计算即可;

② 由①知, $\triangle CDA \cong \triangle CEB$, 即可得出结论;

(2) 证明 $\triangle CDA \cong \triangle CEB$, 根据全等三角形的性质, 直角三角形的性质解答;

(3) 当 B, D, A 三点在同一条直线上时, BD 有最小值, 此时 $\angle PBC = 45^\circ$ 时, BD 的最小值为 $5\sqrt{2} - 3$ 同理可得: 如图 4, 当 B, D, A 三点在同一条直线上时, BD 的最大值为: $AB + AD = AB + BP = 5\sqrt{2} + 3$.

【解答】解: (1) ① $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形,

$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$, $CA = CB$, $CD = CE$,

$\therefore \angle ACD = \angle BCE$,

在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CEB$ 中, $\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$

$$\therefore \triangle CDA \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CDA = 120^\circ,$$

$$\text{又 } \angle CED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ;$$

②由①知, $\triangle CDA \cong \triangle CEB$,

$$\therefore AD = BE;$$

故答案为: 60° , $AD = BE$

(2) $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形,

$$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = BC, CD = CE,$$

$$\angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB,$$

$$\text{即 } \angle ACD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中, $\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore AD = BE, \angle BEC = \angle ADC = 135^\circ.$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ;$$

结论: $AE = 2CM + BE$,

在等腰直角三角形 DCE 中, CM 为斜边 DE 上的高,

$$\therefore CM = DM = ME,$$

$$\therefore DE = 2CM.$$

$$\therefore AE = DE + AD = 2CM + BE$$

$$\therefore AE = 2CM + BE.$$

(3) 如图3, $\because$ 点 P 到点 B 的距离是3,

∴点 P 是以点 B 为圆心，3 为半径的圆，

当 B 、 D 、 A 三点在同一条直线上时， BD 有最小值，

∵ $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle DCP = 90^\circ$ ，

∴ $\angle ACD = \angle BCP$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCP$ 中，
$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCP, \\ CD = CP \end{cases}$$

∴ $\triangle ACD \cong \triangle BCP$ (SAS)，

∴ $\angle PBC = \angle A = 45^\circ$ ， $AD = BP = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 5$ ，

∴ $AB = 5\sqrt{2}$

∴ $BD = AB - AD = 5\sqrt{2} - 3$

此时 $\angle PBC = 45^\circ$ 时， BD 的最小值为 $5\sqrt{2} - 3$ ，

同理可得：如图 4，当 B 、 D 、 A 三点在同一条直线上时，

BD 的最大值为： $AB + AD = AB + BP = 5\sqrt{2} + 3$ ，

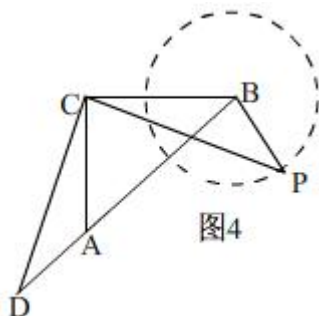


图4

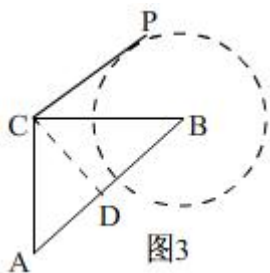


图3

【点评】此题是几何变换综合题，主要考查了考查的是全等三角形的判定和性质、直角三角形的性质、等边三角形的性质，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键。

15. (2021•武陟县模拟) 问题发现

如图 1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BED$ 中， $AB=BC$ ， $BE=BD$ ， $\angle ABC=\angle EBD=60^\circ$ 。点 D 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接 AE 。

填空：① $\frac{AE}{CD}$ 的值是 1；

② 直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 60° ；

(2) 类比探究

如图 2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBD$ 中， $\angle ABC=\angle EBD=90^\circ$ ， $\angle ACB=\angle EDB=60^\circ$ ，点 D 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接 AE 。请判断 $\frac{AE}{CD}$ 的值及直线 AE 与直线 CD 相交所成的角的度数，并说明理由。

(3) 拓展延伸

在 (2) 的条件下，若 $AC=2$ ，请直接写出当 $\triangle ACD$ 是直角三角形时 AE 的长。

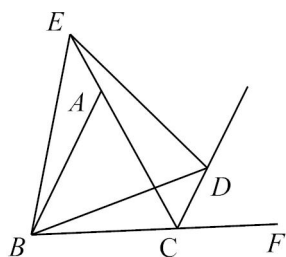


图1

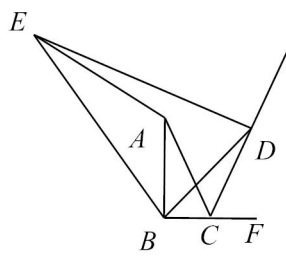
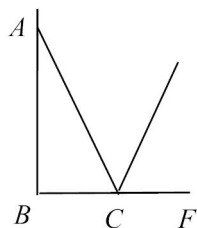


图2



备用图

【考点】三角形综合题。

【专题】几何综合题；推理能力。

【分析】(1) ① 证明 $\triangle EBA \cong \triangle DBC$ (SAS)，推出 $AE=CD$ ，可得结论；

② 证明 E, A, C 共线，推出直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 60° ；

(2) 结论： $\frac{AE}{CD} = \sqrt{3}$ ，直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 90° 。如图 2 中，

延长 EA 交 CD 于点 T ，设 BD 交 ET 于点 J 。证明 $\triangle EAB \sim \triangle DBC$ ，推出 $\frac{AE}{CD} = \frac{EB}{DB} = \sqrt{3}$ ， $\angle BEJ = \angle TDJ$ ，可得结论；

(3) 分两种情形：如图 3 - 1 中，当 $\angle ADC=90^\circ$ 时，如图 3 - 2 中，当 $\angle DAC=90^\circ$ 时，分别求解即可。

【解答】解：(1) ① 如图 1 中，

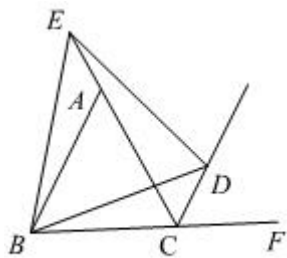


图1

$\because AB=BC, BE=BD, \angle ABC=\angle EBD=60^\circ,$

$\therefore \angle EBA=\angle DBC,$

$\therefore \triangle EBA \cong \triangle DBC \text{ (SAS)},$

$\therefore AE=CD,$

$\therefore \frac{AE}{CD}=1,$

故答案为：1；

② $\because CD$ 平分 $\angle ACF, \angle ACF=180^\circ - \angle ACB=120^\circ,$

$\therefore \angle DCF=\frac{1}{2}\angle ACF=60^\circ,$

$\therefore \angle BCD=180^\circ - 60^\circ =120^\circ,$

$\because \triangle EBA \cong \triangle DBC,$

$\therefore \angle EAB=\angle DCB=120^\circ,$

$\because \angle BAC=60^\circ,$

$\therefore \angle EAB+\angle BAC=180^\circ,$

$\therefore E, A, C$ 共线,

$\therefore$ 直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 60° .

故答案为： 60° ；

(2) 结论： $\frac{AE}{CD}=\sqrt{3}$, 直线 AE 与直线 CD 相交所成的较小角的度数是 90° .

理由：如图2中，延长 EA 交 CD 于点 T ，设 BD 交 ET 于点 J .

考点卡片

1. 三角形三边关系

(1) 三角形三边关系定理：三角形两边之和大于第三边.

(2) 在运用三角形三边关系判定三条线段能否构成三角形时并不一定要列出三个不等式，只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可判定这三条线段能构成一个三角形.

(3) 三角形的两边差小于第三边.

(4) 在涉及三角形的边长或周长的计算时，注意最后要用三边关系去检验，这是一个隐藏的定时炸弹，容易忽略.

2. 全等三角形的判定与性质

(1) 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件.

(2) 在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形.

3. 等腰直角三角形

(1) 两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形.

(2) 等腰直角三角形是一种特殊的三角形，具有所有三角形的性质，还具备等腰三角形和直角三角形的所有性质. 即：两个锐角都是 45° ，斜边上中线、角平分线、斜边上的高，三线合一，等腰直角三角形斜边上的高为外接圆的半径 R ，而高又为内切圆的直径（因为等腰直角三角形的两个小角均为 45° ，高又垂直于斜边，所以两个小三角形均为等腰直角三角形，则两腰相等）；

(3) 若设等腰直角三角形内切圆的半径 $r=1$ ，则外接圆的半径 $R=\sqrt{2}+1$ ，所以 $r: R=1: \sqrt{2}+1$.

4. 三角形综合题

三角形综合题.

5. 四边形综合题

四边形综合题.

6. 几何变换综合题

几何变换综合题.

