

2023 年中考数学复习探究性试题汇编之分式的混合运算

一. 选择题 (共 2 小题)

1. (2022•两江新区模拟) 阅读材料: 在处理分数和分式的问题时, 有时由于分子大于分母, 或分子的次数高于分母的次数, 在实际运算时难度较大, 这时, 我们可将分数(分式) 拆分成一个整数(整式) 与一个真分数(真分式) 的和(差) 的形式, 通过对它的简单分析来解决问题, 我们称这种方法为分离常数法, 此法在处理分式或整除问题时颇为有效. 将分式分离常数可类比假分数变形带分数的方法进行.

如: $\frac{a^2-2a+3}{a-1} = \frac{a(a-1)+a-2a+3}{a-1} = a + \frac{-(a-1)+2}{a-1} = a - 1 + \frac{2}{a-1}$, 这样, 分式就拆分成一个分式 $\frac{2}{a-1}$ 与一个整式 $a - 1$ 的和的形式, 下列说法正确的有 () 个.

① 若 x 为整数, $\frac{x+4}{x+2}$ 为负整数, 则 $x = -3$;

② $6 < \frac{6x^2+18}{x^2+2} \leq 9$;

③ 若分式 $\frac{5x^2+9x-3}{x+2}$ 拆分成一个整式与一个真分式(分子为整数) 的和(差) 的形式为:

$5m - 11 + \frac{1}{n-6}$ (整式部分对应等于 $5m - 11$, 真分式部分对应等于 $\frac{1}{n-6}$), 则 m^2+n^2+mn 的最小值为 27.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

2. (2021 秋•丛台区校级期末) 规定一种新的运算 “ $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ ”, 其中 A 和 B 是关于 x 的多项式. 当 A 的次数小于 B 的次数时, $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B} = 0$; 当 A 的次数等于 B 的次数时, $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 的值为 A 、 B 的最高次项的系数的商. 当 A 的次数大于 B 的次数时, $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 不存在.

例: $JQx \rightarrow +\infty \frac{2}{x-1} = 0$, $JQx \rightarrow +\infty \frac{x^2+2}{2x^2+3x-1} = \frac{1}{2}$.

若 $\frac{A}{B} = (2 - \frac{3}{x-1}) \div \frac{6x^2-15x}{x^2-1}$, 则 $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 的值为 ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 不存在

二. 填空题 (共 2 小题)

3. (2022 秋•长沙期末) 如果 a, b, c 是正数, 且满足 $a+b+c=6$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2}{3}$,

则 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的值为 _____.

4. 已知 m, n 满足 $m^2+n^2=t$. 若 $\frac{1}{m^2+2} + \frac{1}{n^2+2}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 则 $t=$ _____.

三. 解答题 (共 11 小题)

5. (2022 春·庐阳区校级月考) 知识与方法上的类比是探索发展重要途径, 是发现新问题、结论的重要方法. 阅读材料: 利用整体思想解题, 运用代数式的恒等变形, 使不少依照常规思路难以解决的问题找到简便解决方法, 常用的途径有:

- (1) 整体观察;
- (2) 整体设元;
- (3) 整体代入;
- (4) 整体求和等.

例 1: 分解因式 $(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$;

解: 将 “ x^2+2x ” 看成一个整体, 令 $x^2+2x=y$;

原式 $=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+2x+1)^2=(x+1)^4$;

例 2: 已知 $ab=1$, 求 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$ 的值.

解: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b} = 1$;

请根据阅读材料利用整体思想解答下列问题:

(1) 根据材料, 请你模仿例 1 尝试对多项式 $(x^2-6x+8)(x^2-6x+10)+1$ 进行因式分解;

(2) 计算: $(1-2-3-\dots-2021) \times (2+3+\dots+2022) - (1-2-3-\dots-2022) \times (2+3+\dots+2021) =$ _____.

(3) ① 已知 $ab=1$, 求 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ 的值;

② 若 $abc=1$, 直接写出 $\frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1}$ 的值.

6. (2022·雨花区校级开学) 我们定义: 如果两个数或式子 A 与 B 的和为常数, 且这个常数为正数, 则称 A, B 互为 “ H 式”, 这个常数称为 A 与 B 的 “ H 值”. 如 $A+B=1>0$, 则 A, B 互为 “ H 式”, A 与 B 的 “ H 值” 为 1.

(1) 判断 C, D 是否互为 “ H 式”. (在括号内填 “是” 或 “不是”)

① $C=2x-4, D=3-2x$, _____;

② $C=\frac{1}{x-2}, D=\frac{2x^2-x-10}{x^2-4}$, _____;

③ $C = \sqrt{1-2x}$, $D = 2 + \sqrt{2x-1}$, _____;

(2) 已知分式 $M = \frac{(x-2a)(x-3)}{x}$, $N = \frac{(x-b)(2-x)}{x}$ (a, b 为整数), M, N 互为 H 式”,

且 M, N 的 “ H 值” 是 1, 求 $a+b$ 的值.

(3) 设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22}$ 是从 1, 0, -1 这三个数中取值的一列数, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = 3$, $(a_1+1)^2 + (a_2+1)^2 + \dots + (a_{22}+1)^2 = 35$, 则:

① $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22}$ 中 0 的个数有几个?

② $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22}$ 中两两互为 “ H 式” 的组数是多少?

7. (2022 春·姜堰区期中) [探究思考]

探究一: 观察分式 $\frac{x-1}{x}$ 的变形过程和结果, $\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

填空: 若 x 为小于 10 的正整数, 则当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值最大.

探究二: 观察分式 $\frac{a^2+2a-2}{a-1}$ 的变形过程和结果,

$$\frac{a^2+2a-2}{a-1} = \frac{(a-1)^2+4a-3}{a-1} = \frac{(a-1)^2+4(a-1)+1}{a-1} = a-1+4+\frac{1}{a-1} = a+3+\frac{1}{a-1}$$

模仿以上分式的变形过程和结果求出分式 $\frac{x^2+2x-1}{x-1}$ 的变形结果.

[问题解决]

当 $-2 < x \leq 1$ 时, 求分式 $\frac{x^2-2|x|-1}{|x|-2}$ 的最小值.

8. (2021 秋·仓山区校级期末) 阅读理解

材料: 为了研究分式 $\frac{1}{x}$ 与分母 x 的变化关系, 小明制作了表格, 并得到如下数据:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$\frac{1}{x}$	...	-0.25	-0.3	-0.5	-1	无意义	1	0.5	0.3	0.25	...

从表格数据观察, 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{1}{x}$ 的值随之减小, 并无限接近 0; 当 $x < 0$

时, 随着 x 的增大, $\frac{1}{x}$ 的值也随之减小.

材料 2: 对于一个分子、分母都是多项式的分式, 当分母的次数高于分子的次数时, 我们把这个分式叫做真分式. 当分母的次数不高于分子的次数时, 我们把这个分式叫做假分式. 有时候, 需要把一个假分式化成整式和真分式的代数和, 像这种恒等变形, 称为将

分式化为部分分式. 如: $\frac{2x+1}{x-4} = \frac{2x-8+8+1}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} + \frac{8+1}{x-4} = 2 + \frac{9}{x-4}$.

根据上述材料完成下列问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增大, $1 + \frac{1}{x}$ 的值 _____ (增大或减小);

当 $x < 0$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{x+2}{x}$ 的值 _____ (增大或减小);

(2) 当 $x > 1$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{2x+2}{x-1}$ 的值无限接近一个数, 请求出这个数;

(3) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求代数式 $\frac{5x-2}{x-3}$ 值的范围.

9. (2022 春·雨花区校级月考) 解答下列问题:

(1) 已知对任意的正整数 n , 下面的等式恒成立: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$.

若 $\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}$, 求正整数 n .

(2) 若不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} < a - 2021\frac{1}{4}$ 对任意正整数 n 都成立, 且 a 是正整数, 求 a 的最小值.

(3) 现有数列 3, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, ..., 它的各项均为 3 或 5, 首项为 3, 且在第 k 个 3 和第 $k+1$ 个 3 之间有 2^{k-1} 个 5, 求此数列的前 2021 项的和.

10. (2020 秋·南平期末) 甲、乙两位同学同时从学校沿同一路线到离学校 2 千米的户外拓展中心参加活动. 甲同学有一半路程以 a (千米/时) 的速度行走, 另一半路程以 b (千米/时) 的速度行走; 乙同学有一半时间以 a (千米/时) 的速度行走, 另一半时间以 b (千米/时) 的速度行走, 其中 $a \neq b$.

(1) 设甲、乙两位同学从学校走到户外拓展中心的时间分别为 $t_{\text{甲}}$, $t_{\text{乙}}$, 用含 a , b 的式子分别表示 $t_{\text{甲}}$, $t_{\text{乙}}$;

(2) 设甲、乙两位同学从学校走到户外拓展中心的平均速度分别为 $V_{\text{甲}}$, $V_{\text{乙}}$, 用含 a , b 的式子分别表示 $V_{\text{甲}}$, $V_{\text{乙}}$;

(3) 请你判断哪位同学先到达户外拓展中心? 请说明理由.

11. (1) 计算: $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+1}$;

(2) 若 $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$, 试求 a , b 的值;

(3) ①若 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ 对任意自然数 n 都成立, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

②计算： $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{19 \times 21}$.

12. (2022 秋·石景山区期末) 将分式的分母因式分解后, 可以把一个分式表示成两个分式

的和或差. 观察下列各式, 解答下面问题: $\frac{1}{x+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\frac{1}{x+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x+7x+12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

...

(1) $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{(\quad)} - \frac{1}{(\quad)}$;

(2) 计算: $\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35}$.

13. (2022 秋·张店区期中) 【阅读学习】阅读下面的解题过程:

已知: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 3$,

所以 $\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$, 故 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{7}$.

【类比探究】

(1) 上题的解叫做“倒数法”, 请你利用“倒数法”解决下面的题目: 已知 $\frac{x}{x^2-3x+1} = -2$,

求 $\frac{x^2}{x^4+5x^2+1}$ 的值.

【拓展延伸】

(2) 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$, 求 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ 的值.

14. (2022 秋·零陵区校级月考) 观察下面的变化规律, 解答下列问题:

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$$

(1) 若 n 为正整数, 猜想 $\frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$, 并且验证你的猜想;

(2) 解方程 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{4x}$;

(3) 计算: $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15}$.

15. (2021 秋·宁远县期末) 阅读下列解题过程:

已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 3$.

$$\therefore \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$\therefore \frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为7的倒数, 即 $\frac{1}{7}$.

以上解法中先将已知等式的两边“取倒数”, 然后求出待求式子倒数的值, 我们把此题的

这种解法叫做“倒数法”, 请你利用“倒数法”解决下面问题:

(1) 已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{7}$, 求 $\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ 的值.

(3) 已知 $\frac{xy}{x+y} = 2$, $\frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}$, $\frac{zx}{z+x} = \frac{4}{3}$, 求 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值.

2023 年中考数学复习探究性试题汇编之分式的混合运算

参考答案与试题解析

一. 选择题（共 2 小题）

1. （2022•两江新区模拟）阅读材料：在处理分数和分式的问题时，有时由于分子大于分母，或分子的次数高于分母的次数，在实际运算时难度较大，这时，我们可将分数（分式）拆分成一个整数（整式）与一个真分数（真分式）的和（差）的形式，通过对它的简单分析来解决问题，我们称这种方法为分离常数法，此法在处理分式或整除问题时颇为有效．将分式分离常数可类比假分数变形带分数的方法进行．

如： $\frac{a^2-2a+3}{a-1} = \frac{a(a-1)+a-2a+3}{a-1} = a + \frac{-(a-1)+2}{a-1} = a - 1 + \frac{2}{a-1}$ ，这样，分式就拆分成一个分式 $\frac{2}{a-1}$ 与一个整式 $a - 1$ 的和的形式，下列说法正确的有（ ）个．

①若 x 为整数， $\frac{x+4}{x+2}$ 为负整数，则 $x = -3$ ；

② $6 < \frac{6x^2+18}{x^2+2} \leq 9$ ；

③若分式 $\frac{5x^2+9x-3}{x+2}$ 拆分成一个整式与一个真分式（分子为整数）的和（差）的形式为：

$5m - 11 + \frac{1}{n-6}$ （整式部分对应等于 $5m - 11$ ，真分式部分对应等于 $\frac{1}{n-6}$ ），则 m^2+n^2+mn 的最小值为 27．

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【考点】分式的加减法；整式的加减；分式的基本性质．

【专题】阅读型；整式；分式；运算能力．

【分析】（1）利用题干中的方法将分式拆分成一个整式与一个真分式的和（差）的形式，利用整数或整式的性质对没结论进行判断即可．

【解答】解：∵ $\frac{x+4}{x+2}$ 为负整数，

$$\therefore \frac{x+4}{x+2} < 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x+4 > 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+4 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases},$$

解第一个不等式组得： $-4 < x < -2$ ，

解第二个不等式组得：无解，

$$\therefore -4 < x < -2,$$

$\because x$ 为整数,

$$\therefore x = -3,$$

故①的结论正确;

$$\therefore \frac{6x^2+18}{x^2+2} = \frac{6(x^2+2)+6}{x^2+2} = 6 + \frac{6}{x^2+2},$$

又 $x^2 \geq 0$,

$$\therefore \frac{6}{x^2+2} > 0, \text{ 且 } x^2+2 \text{ 有最小值 } 2,$$

$$\therefore \frac{6}{x^2+2} \text{ 由最大值 } 3,$$

$$\therefore 6 < 6 + \frac{6}{x^2+2} \leq 9,$$

$\therefore$ ②的结论正确;

$$\therefore \frac{5x^2+9x-3}{x+2} = \frac{5(x+2)^2-11(x+2)-1}{x+2} = 5(x+2) - 11 - \frac{1}{x+2},$$

$$\therefore m = x+2, \quad n - 6 = -\frac{1}{x+2},$$

$$\therefore m = x+2, \quad n = 4 - x.$$

$$\therefore m^2+n^2+mn$$

$$= (m+n)^2 - mn$$

$$= 36 - (-x^2+2x+8)$$

$$= x^2 - 2x + 28$$

$$= (x-1)^2 + 27,$$

$$\therefore (x-1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore m^2+n^2+mn \text{ 有最小值为 } 27,$$

$\therefore$ ③的结论正确,

故选: D.

【点评】 本题主要考查了分式的加减法, 整式的加减法, 本题是阅读型题目, 理解并熟练应用题干中的方法是解题的关键.

2. (2021 秋·丛台区校级期末) 规定一种新的运算 “ $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ ”, 其中 A 和 B 是关于 x 的多项式. 当 A 的次数小于 B 的次数时, $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B} = 0$; 当 A 的次数等于 B 的次数时,

$JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 的值为 A 、 B 的最高次项的系数的商. 当 A 的次数大于 B 的次数时, $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 不存在.

例: $JQx \rightarrow +\infty \frac{2}{x-1} = 0$, $JQx \rightarrow +\infty \frac{x^2+2}{2x^2+3x-1} = \frac{1}{2}$.

若 $\frac{A}{B} = (2 - \frac{3}{x-1}) \div \frac{6x^2-15x}{x^2-1}$, 则 $JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B}$ 的值为 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 不存在

【考点】分式的乘法; 有理数的混合运算; 多项式; 分式的值为零的条件.

【专题】分式; 运算能力.

【分析】先对 $\frac{A}{B} = (2 - \frac{3}{x-1}) \div \frac{6x^2-15x}{x^2-1}$ 进行计算, 然后再根据规定的新运算, 解答即可.

【解答】解: $\frac{A}{B} = (2 - \frac{3}{x-1}) \div \frac{6x^2-15x}{x^2-1}$
 $= \frac{2(x-1)-3}{x-1} \div \frac{3x(2x-5)}{(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{2x-5}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{3x(2x-5)}$
 $= \frac{x+1}{3x},$

$\therefore A$ 的次数等于 B 的次数,

$\therefore JQx \rightarrow +\infty \frac{A}{B} = \frac{1}{3},$

故选: C.

【点评】本题考查了分式的乘法, 有理数的混合运算, 多项式, 分式的值为 0 的条件, 理解已知规定的新运算是解题的关键.

二. 填空题 (共 2 小题)

3. (2022 秋•长沙期末) 如果 a, b, c 是正数, 且满足 $a+b+c=6$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2}{3}$,

则 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的值为 1.

【考点】分式的化简求值.

【专题】分式; 运算能力.

【分析】把已知等式变形后代入所求分式中, 再利用整体思想将分式化简求值即可.

【解答】解: $\because a+b+c=6$,

$$\therefore a=6-(b+c), b=6-(a+c), c=6-(a+b),$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{6-(b+c)}{b+c} + \frac{6-(a+c)}{c+a} + \frac{6-(a+b)}{a+b} \\ &= \frac{6}{b+c} - 1 + \frac{6}{c+a} - 1 + \frac{6}{a+b} - 1 \\ &= 6 \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3, \\ & \therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2}{3}, \\ & \therefore \text{原式} = 6 \times \frac{2}{3} - 3 = 1. \end{aligned}$$

故答案为：1.

【点评】 本题考查了分式的化简求值，解决本题的关键是灵活进行分式的变形以及整体思想的运用.

4. 已知 m, n 满足 $m^2+n^2=t$. 若 $\frac{1}{m^2+2} + \frac{1}{n^2+2}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 则 $t = \underline{4}$.

【考点】 分式函数的最值.

【专题】 分式；运算能力；应用意识.

【分析】 见到 $\frac{1}{m^2+2} + \frac{1}{n^2+2}$, 构造 $m^2+2+n^2+2=t+4$. 设 $m^2+2=a$, $n^2+2=b$, 用完全平方知识将 ab 转化为 $a+b$ 来表示即可求出 t .

【解答】 解: $\because m^2+n^2=t$,

$$\therefore m^2+2+n^2+2=t+4.$$

设 $m^2+2=a>0$, $n^2+2=b>0$,

$$\text{则 } \frac{1}{m^2+2} + \frac{1}{n^2+2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,$$

$$\therefore (a+b)^2 \geq 4ab, \text{ 即 } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4},$$

$$\therefore \frac{a+b}{ab} \geq \frac{a+b}{\frac{(a+b)^2}{4}},$$

$$\therefore \frac{a+b}{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{4}{a+b} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a+b=8,$$

$$\therefore t+4=8,$$

$$\therefore t=4.$$

故答案为：4.

【点评】本题主要考查了分式的化简求值，完全平方公式，构造 $m^2+2+n^2+2=t+4$ 以及 $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ 是解决此题的关键.

三. 解答题（共 11 小题）

5. （2022 春•庐阳区校级月考）知识与方法上的类比是探索发展重要途径，是发现新问题、结论的重要方法. 阅读材料：利用整体思想解题，运用代数式的恒等变形，使不少依照常规思路难以解决的问题找到简便解决方法，常用的途径有：

- （1）整体观察；
- （2）整体设元；
- （3）整体代入；
- （4）整体求和等.

例 1：分解因式 $(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$ ；

解：将“ x^2+2x ”看成一个整体，令 $x^2+2x=y$ ；

$$\text{原式} = y(y+2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 = (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4;$$

例 2：已知 $ab=1$ ，求 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$ 的值.

$$\text{解：} \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b} = 1;$$

请根据阅读材料利用整体思想解答下列问题：

（1）根据材料，请你模仿例 1 尝试对多项式 $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 10) + 1$ 进行因式分解；

（2）计算： $(1 - 2 - 3 - \dots - 2021) \times (2 + 3 + \dots + 2022) - (1 - 2 - 3 - \dots - 2022) \times (2 + 3 + \dots + 2021) = \underline{\quad 2022 \quad}.$

（3）①已知 $ab=1$ ，求 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ 的值；

②若 $abc=1$ ，直接写出 $\frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1}$ 的值.

【考点】因式分解 - 十字相乘法等；解二元一次方程组；提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】计算题；整式；分式；运算能力；应用意识；创新意识.

【分析】（1）读懂例 1，整体设元，分解因式；

(2) 读懂例 1，整体设元，分解因式，代入化简再求值；

(3) ①认真读懂例 2，整体代入化简求值；

②认真读懂例 2，整体代入化简求值.

【解答】解：(1) $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 10) + 1$,

设 $x^2 - 6x = y$,

$$\text{原式} = (y + 8)(y + 10) + 1$$

$$= y^2 + 10y + 8y + 80 + 1$$

$$= y^2 + 18y + 81$$

$$= (y + 9)^2,$$

$$= (x^2 - 6x + 9)^2$$

$$= [(x - 3)^2]^2$$

$$= (x - 3)^4;$$

$$(2) (1 - 2 - 3 - \dots - 2021) \times (2 + 3 + \dots + 2022) - (1 - 2 - 3 - \dots - 2022) \times (2 + 3 + \dots + 2021),$$

$$\text{令 } 1 - 2 - 3 - \dots - 2021 = a, \quad 2 + 3 + \dots + 2022 = b,$$

$$\therefore a + b = 1 + 2022,$$

$$\text{原式} = ab - (a - 2022)(b - 2022)$$

$$= ab - (ab - 2022a - 2022b + 2022^2)$$

$$= ab - ab + 2022a + 2022b - 2022^2$$

$$= 2022(a + b - 2022)$$

$$= 2022 \times (1 + 2022 - 2022)$$

$$= 2022;$$

$$(3) \text{①} \because ab = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$$

$$= \frac{ab}{ab+a^2} + \frac{ab}{ab+b^2}$$

$$= \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{a+b}{a+b}$$

$$= 1;$$

$$\textcircled{2} \because abc=1,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1} \\ &= \frac{5a}{ab+a+abc} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1} \\ &= \frac{5}{b+1+bc} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1} \\ &= \frac{5+5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1}, \\ &= \frac{5+5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+abc} \\ &= \frac{5+5b}{bc+b+1} + \frac{5}{a+1+ab} \\ &= \frac{5+5b}{bc+b+1} + \frac{5abc}{a+abc+ab} \\ &= \frac{5+5b}{bc+b+1} + \frac{5bc}{1+bc+b} \\ &= \frac{5+5b+5bc}{bc+b+1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

【点评】本题考查了分式、整式混合运算的新定义，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算和整式的混合运算.

6. (2022•雨花区校级开学) 我们定义：如果两个数或式子 A 与 B 的和为常数，且这个常数为正数，则称 A, B 互为“ H 式”，这个常数称为 A 与 B 的“ H 值”. 如 $A+B=1>0$ ，则 A, B 互为“ H 式”， A 与 B 的“ H 值”为 1.

(1) 判断 C, D 是否互为“ H 式”. (在括号内填“是”或“不是”)

$$\textcircled{1} C=2x-4, D=3-2x, \underline{\text{不是}};$$

$$\textcircled{2} C=\frac{1}{x-2}, D=\frac{2x^2-x-10}{x^2-4}, \underline{\text{是}};$$

$$\textcircled{3} C=\sqrt{1-2x}, D=2+\sqrt{2x-1}, \underline{\text{是}};$$

(2) 已知分式 $M=\frac{(x-2a)(x-3)}{x}$, $N=\frac{(x-b)(2-x)}{x}$ (a, b 为整数), M, N 互为 H 式,

且 M, N 的“ H 值”是 1, 求 $a+b$ 的值.

(3) 设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22}$ 是从 1, 0, -1 这三个数中取值的一列数, 若 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{22}=3$, $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\dots+(a_{22}+1)^2=35$, 则:

$$\textcircled{1} a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22} \text{ 中 } 0 \text{ 的个数有几个?}$$

$$\textcircled{2} a_1, a_2, a_3, \dots, a_{22} \text{ 中两两互为“} H \text{式”的组数是多少?}$$

【考点】算术平方根；规律型：数字的变化类.

【专题】新定义；运算能力.

【分析】(1) 分别计算 $C+D$ 的值，根据“ H 式”的定义进行判断即可；

(2) 计算 $M+N$ 的值，根据“ H 式”的定义即可求出 a, b 的值；

(3) 由条件列出方程，即可求解.

【解答】解：(1) ① $\because C+D=2x-4+3-2x=-1<0$,

$\therefore C$ 和 D 不是互为“ H 式”，

故答案为：不是；

$$\begin{aligned}\text{②} \because C+D &= \frac{1}{x-2} + \frac{2x^2-x-10}{x^2-4} \\ &= \frac{x+2+2x^2-x-10}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= 2 > 0,\end{aligned}$$

$\therefore C$ 和 D 是互为“ H 式”，

故答案为：是；

③ $\because$ 当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时， $\sqrt{1-2x}$ 有意义，当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时， $\sqrt{2x-1}$ 有意义，

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $\sqrt{1-2x}$ 和 $\sqrt{2x-1}$ 均有意义，

此时 $\sqrt{1-2x} = \sqrt{2x-1} = 0$,

$$\begin{aligned}\therefore C+D &= \sqrt{1-2x} + 2 + \sqrt{2x-1} \\ &= 0+2+0 \\ &= 2 > 0,\end{aligned}$$

$\therefore C$ 和 D 是互为“ H 式”，

故答案为：是；

(2) 由题意 $M+N=1$,

$$\therefore \frac{(x-2a)(x-3)}{x} + \frac{(x-b)(2-x)}{x} = 1,$$

整理得： $(b-2a-1)x+6a-2b=x$,

$$\therefore b-2a-1=1, \quad 6a-2b=0,$$

$$\therefore a=2, \quad b=6,$$

$$\therefore a+b=8.$$

(3) ①设这一列数有 x 个 -1 ，则有 $(x+3)$ 个 1 ，有 $22-x-(x+3)$ 个 0 ，

$$\therefore (-1+1)^2 \cdot x + (1+1)^2 \cdot (x+3) + (0+1)^2 \cdot (19-2x) = 35,$$

$$\therefore x=2,$$

$$\therefore 19-2x=15,$$

$\therefore$ 这一列数 0 的个数是 15 个.

②由①知这一列数有 2 个 -1 ， 5 个 1 ， 15 个 0 ，

其中 1 与 1 互为“ H 式”有 10 组，

0 与 1 互为“ H 式”有 75 组，

$\therefore$ 这一列数互为“ H 式”的组数是 $10+75=85$ 组.

【点评】 本题考查新概念，关键是理解新概念的涵义.

7. (2022 春·姜堰区期中) [探究思考]

探究一：观察分式 $\frac{x-1}{x}$ 的变形过程和结果， $\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

填空：若 x 为小于 10 的正整数，则当 $x = \underline{1}$ 时，分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值最大.

探究二：观察分式 $\frac{a^2+2a-2}{a-1}$ 的变形过程和结果，

$$\frac{a^2+2a-2}{a-1} = \frac{(a-1)^2+4a-3}{a-1} = \frac{(a-1)^2+4(a-1)+1}{a-1} = a-1+4+\frac{1}{a-1} = a+3+\frac{1}{a-1}$$

模仿以上分式的变形过程和结果求出分式 $\frac{x^2+2x-1}{x-1}$ 的变形结果.

[问题解决]

当 $-2 < x \leq 1$ 时，求分式 $\frac{x^2-2|x|-1}{|x|-2}$ 的最小值.

【考点】 分式函数的最值；分式的基本性质；分式的加减法.

【专题】 计算题；运算能力.

【分析】 第一问可以利用探究一求出；

第二问可以利用探究二解决；

第三问可以利用第一二问解决.

【解答】 解：[探究思考]

探究一： $\because \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$,

$\therefore x$ 为小于 10 的正整数，

∴当 $x=1$ 时，分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值最大；

故答案为：1.

$$\text{探究二：} \frac{x^2+2x-1}{x-1} = \frac{x^2-x+3x-1}{x-1} = x + \frac{3x-3+2}{x-1} = x+3 + \frac{2}{x-1};$$

[问题解决]

$$\text{当 } -2 < x \leq 0 \text{ 时，原式} = \frac{x^2+2x-1}{-x-2} = -x + \frac{1}{x+2},$$

∴当 $x=0$ 时，原分式有最小值为 $\frac{1}{2}$ ；

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时，原式} = \frac{x^2-2x-1}{x-2} = x - \frac{1}{x-2} = x + \frac{1}{2-x},$$

∴当 $x=0$ 时，原分式有最小值为 $\frac{1}{2}$.

∴当 $-2 < x \leq 1$ 时，分式 $\frac{x^2-2|x|-1}{|x|-2}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题主要考查了分式的复杂运算，综合性比较强，对于学生的能力要求比较高.

8. (2021 秋·仓山区校级期末) 阅读理解

材料：为了研究分式 $\frac{1}{x}$ 与分母 x 的变化关系，小明制作了表格，并得到如下数据：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$\frac{1}{x}$	...	-0.25	-0.3	-0.5	-1	无意义	1	0.5	0.3	0.25	...

从表格数据观察，当 $x > 0$ 时，随着 x 的增大， $\frac{1}{x}$ 的值随之减小，并无限接近 0；当 $x < 0$ 时，随着 x 的增大， $\frac{1}{x}$ 的值也随之减小.

材料 2：对于一个分子、分母都是多项式的分式，当分母的次数高于分子的次数时，我们把这个分式叫做真分式. 当分母的次数不高于分子的次数时，我们把这个分式叫做假分式. 有时候，需要把一个假分式化成整式和真分式的代数和，像这种恒等变形，称为将

分式化为部分分式. 如： $\frac{2x+1}{x-4} = \frac{2x-8+8+1}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} + \frac{8+1}{x-4} = 2 + \frac{9}{x-4}.$

根据上述材料完成下列问题：

(1) 当 $x > 0$ 时，随着 x 的增大， $1 + \frac{1}{x}$ 的值 减小 (增大或减小)；

当 $x < 0$ 时，随着 x 的增大， $\frac{x+2}{x}$ 的值 减小 (增大或减小)；

(2) 当 $x > 1$ 时, 随着 x 的增大, $\frac{2x+2}{x-1}$ 的值无限接近一个数, 请求出这个数;

(3) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求代数式 $\frac{5x-2}{x-3}$ 值的范围.

【考点】 分式的基本性质; 多项式; 分式的定义.

【专题】 分式; 运算能力.

【分析】 (1) 由 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{2}{x}$ 的变化情况, 判断 $1 + \frac{1}{x}$ 、 $1 + \frac{2}{x}$ 的变化情况即可;

(2) 由 $\frac{2x+2}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$, 即可求解;

(3) 由 $\frac{5x-2}{x-3} = 2 + \frac{4}{x-1}$, 再结合 x 的取值范围即可求解.

【解答】 解: (1) $\because$ 当 $x > 0$ 时 $\frac{1}{x}$ 随着 x 的增大而减小,

$\therefore$ 随着 x 的增大, $1 + \frac{1}{x}$ 的值减小;

$\because$ 当 $x < 0$ 时 $\frac{2}{x}$ 随着 x 的增大而减小,

$$\therefore \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x},$$

$\therefore$ 随着 x 的增大, $\frac{x+2}{x}$ 的值减小,

故答案为: 减小, 减小;

$$(2) \because \frac{2x+2}{x-1} = \frac{2(x-1)+4}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1},$$

$\because$ 当 $x > 1$ 时, $\frac{4}{x-1}$ 的值无限接近 0,

$\therefore \frac{2x+2}{x-1}$ 的值无限接近 2;

$$(3) \because \frac{5x-2}{x-3} = \frac{5(x-3)+13}{x-3} = 5 + \frac{13}{x-3},$$

又 $\because 0 \leq x \leq 2$,

$$\therefore -13 \leq \frac{13}{x-3} \leq -\frac{13}{3},$$

$$\therefore -8 \leq \frac{5x-2}{x-3} \leq \frac{2}{3}.$$

【点评】 本题考查分式的性质, 熟练掌握分式的基本性质, 理解题中的变量分离的方法是解题的关键.

9. (2022 春·雨花区校级月考) 解答下列问题:

(1) 已知对任意的正整数 n , 下面的等式恒成立: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$.

若 $\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3} = \frac{199}{242}$, 求正整数 n .

(2) 若不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < a - 2021\frac{1}{4}$ 对任意正整数 n 都成立, 且 a 是正整数, 求 a 的最小值.

(3) 现有数列 3, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, $\cdots$, 它的各项均为 3 或 5, 首项为 3, 且在第 k 个 3 和第 $k+1$ 个 3 之间有 2^{k-1} 个 5, 求此数列的前 2021 项的和.

【考点】 分式的加减法; 解一元一次不等式.

【专题】 计算题; 分式; 运算能力; 推理能力.

【分析】 (1) 直接用给定的公式, 换数求值即可;

(2) 先利用错位相差法, 得到第 n 个式子的最大值, 求得前 n 项和, 然后求不等式的解;

(3) 算出第 2021 项在第几组, 那么每个 3, 先看成 5, 则有 2021 个 5 的和, 再减去多加的 k 个 2 即可.

【解答】 解: (1) $\because 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$,

$$\therefore \frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3} = \frac{199}{242},$$

$$\therefore 1 + \frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3} = \frac{199}{242} + 1,$$

$$\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+(2n)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3} = \frac{441}{242},$$

$$\frac{(1+2+3+\cdots+2n)^2}{2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)} = \frac{441}{242},$$

$$\frac{(1+2+3+\cdots+2n)^2}{2^3(1+2+3+\cdots+n)^2} = \frac{441}{242},$$

$$\frac{[\frac{2n(2n+1)}{2}]^2}{[\frac{n(n+1)}{2}]^2} = \frac{441 \times 8}{242},$$

$$[\frac{4n^2+2n}{n^2+n}]^2 = \frac{441 \times 4}{121},$$

$$\frac{4n^2+2n}{n^2+n} = \pm \frac{21 \times 2}{11},$$

$\because n$ 是正整数,

$$\therefore \frac{4n^2+2n}{n^2+n} = \frac{42}{11},$$

$$(4n^2+2n) \times 11 = (n^2+n) \times 42$$

整理, 得: $n^2 - 10n = 0$,

解, 得 $n_1 = 0$, $n_2 = 10$,

$\because n$ 是正整数,

$\therefore n=10$.

(2) 设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+3},$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0.$$

$\therefore a_n$ 值随 n 的增大而减少,

$\therefore$ 当 $n=1$ 时, 有最大值 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$,

$$\therefore \frac{5}{6} < a - 2021 \frac{1}{4},$$

$$\therefore a > 2022 \frac{1}{12},$$

$\therefore a$ 最小的整数是 2023.

(3) 把第 k 个 3 和它后面的 2^{k-1} 个 5 这 $2^{k-1}+1$ 项称为一组, 设第 2021 项在第 k 组, 则 k 是满足:

$$k+1+2+3+\cdots+2^{k-1} \geq 2021$$

的最小正整数. 求得 $k \geq 11$, (也就是 2021 位, 在这至少 11 组所有位数内).

所以把 $k=11$ 组中的 3 也看成 5, 所以每个数大了 2,

$$\text{故 } S_{2021} = 2021 \times 5 - (5-3) \times 11 = 10083.$$

【点评】 本题考查的是数列相关的题目, 关键是会变形, 得到相应的公式, 最后一题要知道第 2021 项, 里面有几个 3. 一般中考考的不多了.

10. (2020 秋·南平期末) 甲、乙两位同学同时从学校沿同一路线到离学校 2 千米的户外拓展中心参加活动. 甲同学有一半路程以 a (千米/时) 的速度行走, 另一半路程以 b (千米/时) 的速度行走; 乙同学有一半时间以 a (千米/时) 的速度行走, 另一半时间以 b (千米/时) 的速度行走, 其中 $a \neq b$.

(1) 设甲、乙两位同学从学校走到户外拓展中心的时间分别为 $t_{\text{甲}}$, $t_{\text{乙}}$, 用含 a , b 的式子分别表示 $t_{\text{甲}}$, $t_{\text{乙}}$;

(2) 设甲、乙两位同学从学校走到户外拓展中心的平均速度分别为 $V_{\text{甲}}$, $V_{\text{乙}}$, 用含 a , b 的式子分别表示 $V_{\text{甲}}$, $V_{\text{乙}}$;

(3) 请你判断哪位同学先到达户外拓展中心? 请说明理由.

【考点】整式的加减.

【专题】分式；运算能力.

【分析】(1) 认真读懂题意，根据题意直接列出式子.

(2) 认真读懂题意，根据题意直接列出式子.

(3) 利用前面解题的结果判断，甲、乙二人时间差与零的大小比较，从而得出甲、乙的大小.

【解答】解：(1) $t_{\text{甲}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$,

$$t_{\text{乙}} = \frac{4}{a+b},$$

$$(2) v_{\text{甲}} = \frac{2}{t_{\text{甲}}} = \frac{2ab}{a+b},$$

$$v_{\text{乙}} = \frac{2}{t_{\text{乙}}} = \frac{a+b}{2},$$

$$(3) t_{\text{甲}} - t_{\text{乙}} = \frac{a+b}{ab} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)},$$

$$\because a \neq b \text{ 且 } a > 0, b > 0,$$

$$\therefore (a-b)^2 > 0,$$

$$ab(a+b) > 0,$$

$$\therefore t_{\text{甲}} - t_{\text{乙}} = \frac{a+b}{ab} - \frac{4}{a+b} > 0,$$

$$\therefore t_{\text{甲}} > t_{\text{乙}},$$

$\therefore$ 乙同学先到达户外拓展中心.

【点评】本题考查了分式的应用，关键要掌握分式加减运算时分式的通分和利用公式进行化简.

11. (1) 计算: $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+1}$;

(2) 若 $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$, 试求 a, b 的值;

(3) ① 若 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ 对任意自然数 n 都成立, 则 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$;

② 计算: $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{19 \times 21}$.

【考点】分式的加减法；有理数的混合运算；规律型：数字的变化类.

【专题】规律型；实数；分式；运算能力.

【分析】(1) 利用异分母分式的加法法则运算即可；

(2) 先利用异分母分式的加法法则对等式的左边进行运算，再利用恒等式的性质解答即可；

(3) ①利用(2)中的方法解答即可；

②利用裂项法用两个分数的差表示每一个分数，再化简运算即可．

$$\begin{aligned}\text{【解答】解：(1) 原式} &= \frac{x+1}{(x+2)(x+1)} + \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \\&= \frac{x+1+2x+4}{(x+2)(x+1)} \\&= \frac{3x+5}{(x+2)(x+1)} \\&= \frac{3x+5}{x^2+3x+2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \because \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} \\&= \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\&= \frac{(a+b)x+a-2b}{(x+1)(x-2)},\end{aligned}$$

$$\text{又} \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1},$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=1 \\ a-2b=4 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

$$\therefore a=2, b=-1.$$

$$\begin{aligned}(3) \text{ ①} \because \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} \\&= \frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \\&= \frac{2n(a+b)+a-b}{(2n+1)(2n-1)},\end{aligned}$$

$$\text{又} \because \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} \text{ 对任意自然数 } n \text{ 都成立,}$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}.$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{故答案为：} \frac{1}{2}; -\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} \text{原式} &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21}\right) \\
&= \frac{10}{21}.
\end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查了分式的加减法，有理数的混合运算，数字的变形规律，恒等变形，利用异分母分式的加法法则运算是解题的关键。

12. (2022 秋·石景山区期末) 将分式的分母因式分解后，可以把一个分式表示成两个分式

的和或差. 观察下列各式，解答下面问题： $\frac{1}{x+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\frac{1}{x+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x+7x+12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

...

$$(1) \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{(\quad)} - \frac{1}{(\quad)};$$

$$(2) \text{计算: } \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35}.$$

【考点】 分式的加减法；规律型：数字的变化类；分式的基本性质。

【专题】 计算题；分式；运算能力。

【分析】 读懂题意，利用分式的基本性质变形，计算即可。

$$\text{【解答】解: (1) } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1};$$

$$\begin{aligned}
(2) & \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35} \\
&= \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} \right) \\
&= \frac{3}{x^2+8x+7}.
\end{aligned}$$

【点评】 本题考查了分式的加减运算，分式的基本性质，解题的关键是掌握分式的基本

性质.

13. (2022 秋·张店区期中)【阅读学习】阅读下面的解题过程:

已知: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 3$,

所以 $\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$, 故 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{7}$.

【类比探究】

(1) 上题的解叫做“倒数法”, 请你利用“倒数法”解决下面的题目: 已知 $\frac{x}{x^2-3x+1} = -2$,

求 $\frac{x^2}{x^4+5x^2+1}$ 的值.

【拓展延伸】

(2) 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$, 求 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ 的值.

【考点】倒数.

【专题】阅读型; 分式; 运算能力.

【分析】(1) 利用“倒数法”取已知等式的倒数, 整理得到 $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$; 将所求分式取倒

数, 利用配方法和整体代入的方法求得式子的值, 最后取倒数即可得出结论;

(2) 将已知三个等式的左右两边分别相加得到 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值, 将所求的分式取倒数计算出结果, 利用(1)中的方法即可得出结论.

【解答】(1) 由 $\frac{x}{x^2-3x+1} = -2$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2-3x+1}{x} = -\frac{1}{2}$,

即: $x + \frac{1}{x} - 3 = -\frac{1}{2}$.

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \frac{x^4+5x^2+1}{x^2}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 5$$

$$= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 + 5$$

$$= (\frac{5}{2})^2 - 2 + 5$$

$$= \frac{37}{4}.$$

故 $\frac{x^2}{x^4+5x^2+1}$ 的值为 $\frac{4}{37}$.

(2) $\because abc \neq 0$,

$$\therefore \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{31}{60}.$$

$$\therefore \frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{60}{31}.$$

【点评】 本题主要考查了分式的加减法，倒数的意义，分式的乘除法，配方法，本题是阅读型题目，理解并熟练运用题干中的解题思想与方法是解题的关键.

14. (2022 秋·零陵区校级月考) 观察下面的变化规律，解答下列问题：

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$$

(1) 若 n 为正整数，猜想 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ，并且验证你的猜想；

$$(2) \text{ 解方程 } \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{4x};$$

$$(3) \text{ 计算: } \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15}.$$

【考点】 解分式方程；有理数的混合运算.

【专题】 阅读型；实数；整式；分式方程及应用；运算能力.

【分析】 (1) 利用题干中的方法求得结论，再利用分式的减法法则解答即可；

(2) 利用 (1) 中的结论将方程左边的每个分式拆成两个分式的差，合并后利用解分式方程分方法解答即可；

(3) 利用 (1) 中的结论将每个分数拆成两个分数的差后，再利用分数的减法法则运算即可.

【解答】 解：(1) 猜想 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

验证：右边 $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

=左边,

∴猜想成立;

(2) 原方程就是:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{4x},$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{4x},$$

去分母得:

$$4x(x+3) - 4x \cdot x = 3x(x+3),$$

整理得:

$$x^2 - x = 0,$$

$$\therefore x(x-1) = 0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=1.$$

经检验: $x=0$ 是原方程的增根, $x=1$ 是原方程的根,

∴原方程的根为 $x=1$;

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{15}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{14}{15} \\ &= \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查了分式的减法, 解分式方程, 有理数的混合运算, 本题是阅读型题目, 利用题干中的方法将分式或分数拆成两个分式或分数的差的形式是解题的关键.

15. (2021 秋•宁远县期末) 阅读下列解题过程:

已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 3$.

$$\therefore \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4+1} \text{ 的值为 } 7 \text{ 的倒数, 即 } \frac{1}{7}.$$

以上解法中先将已知等式的两边“取倒数”，然后求出待求式子倒数的值，我们把此题的这种解法叫做“倒数法”，请你利用“倒数法”解决下面问题：

(1) 已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{7}$, 求 $\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ 的值.

(3) 已知 $\frac{xy}{x+y} = 2$, $\frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}$, $\frac{zx}{z+x} = \frac{4}{3}$, 求 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值.

【考点】 分式的加减法；倒数.

【专题】 分式；运算能力.

【分析】 (1) 把已知等式变形求出 $x + \frac{1}{x}$ 的值，再把所求的式子变形后计算即可；

(2) 把已知等式变形求出 $x + \frac{1}{x}$ 的值，再把所求的式子变形后计算即可；

(3) 把已知三个等式变形后相加可以求出 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 的值，再把所求的式子变形后计算即可.

【解答】 解：(1) 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 知 $x \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{x^2+1}{x} = 2,$$

$$\text{即 } x + \frac{1}{x} = 2,$$

$$\therefore \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= 2^2 - 2$$

$$= 2,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4+1} \text{ 的值为 } 2 \text{ 的倒数, 即 } \frac{1}{2};$$

(2) 由 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{7}$, 知 $x \neq 0$,

$$\text{所以: } \frac{x^2-x+1}{x} = 7,$$

$$\therefore x - 1 + \frac{1}{x} = 7,$$

$$\text{即 } x + \frac{1}{x} = 8,$$

$$\therefore \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3$$

$$= 8^2 - 3$$

$$= 61,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \text{ 的值为 } 61 \text{ 的倒数, 即 } \frac{1}{61};$$

$$(3) \text{ 由 } \frac{xy}{x+y} = 2, \text{ 知 } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\therefore \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\text{由 } \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \text{ 知 } y \neq 0, z \neq 0,$$

$$\therefore \frac{y+z}{yz} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \text{ ②},$$

$$\text{由 } \frac{zx}{z+x} = \frac{4}{3}, \text{ 知 } z \neq 0, x \neq 0,$$

$$\therefore \frac{z+x}{zx} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4} \text{ ③},$$

①+②+③得:

$$2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

$$\therefore \frac{xyz}{xy+yz+zx} \text{ 的值为 } 1 \text{ 的倒数, 即 } 1.$$

【点评】 本题考查了分式的加减法, 倒数, 理解例题的思路是解题的关键.

考点卡片

1. 倒数

(1) 倒数：乘积是 1 的两数互为倒数.

一般地， $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$)，就说 a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$.

(2) 方法指引：

① 倒数是除法运算与乘法运算转化的“桥梁”和“渡船”. 正像减法转化为加法及相反数一样，非常重要. 倒数是伴随着除法运算而产生的.

② 正数的倒数是正数，负数的倒数是负数，而 0 没有倒数，这与相反数不同.

【规律方法】求相反数、倒数的方法

求一个数的相反数	求一个数的相反数时，只需在这个数前面加上“-”即可
求一个数的倒数	求一个整数的倒数，就是写成这个整数分之一
	求一个分数的倒数，就是调换分子和分母的位置

注意：0 没有倒数.

2. 有理数的混合运算

(1) 有理数混合运算顺序：先算乘方，再算乘除，最后算加减；同级运算，应按从左到右的顺序进行计算；如果有括号，要先做括号内的运算.

(2) 进行有理数的混合运算时，注意各个运算律的运用，使运算过程得到简化.

【规律方法】有理数混合运算的四种运算技巧

1. 转化法：一是将除法转化为乘法，二是将乘方转化为乘法，三是在乘除混合运算中，通常将小数转化为分数进行约分计算.

2. 凑整法：在加减混合运算中，通常将和为零的两个数，分母相同的两个数，和为整数的两个数，乘积为整数的两个数分别结合为一组求解.

3. 分拆法：先将带分数分拆成一个整数与一个真分数的和的形式，然后进行计算.

4. 巧用运算律：在计算中巧妙运用加法运算律或乘法运算律往往使计算更简便.

3. 算术平方根

(1) 算术平方根的概念：一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2 = a$ ，那么这个正数

x 叫做 a 的算术平方根. 记为 $\sqrt{a}$.

(2) 非负数 a 的算术平方根 a 有双重非负性: ①被开方数 a 是非负数; ②算术平方根 a 本身是非负数.

(3) 求一个非负数的算术平方根与求一个数的平方互为逆运算, 在求一个非负数的算术平方根时, 可以借助乘方运算来寻找.

4. 规律型: 数字的变化类

探究题是近几年中考命题的亮点, 尤其是与数列有关的命题更是层出不穷, 形式多样, 它要求在已有知识的基础上去探究, 观察思考发现规律.

(1) 探寻数列规律: 认真观察、仔细思考, 善用联想是解决这类问题的方法, 通常将数字与序号建立数量关系或者与前后数字进行简单运算, 从而得出通项公式.

(2) 利用方程解决问题. 当问题中有多个未知数时, 可先设出其中一个为 x , 再利用它们之间的关系, 设出其他未知数, 然后列方程.

5. 多项式

(1) 几个单项式的和叫做多项式, 每个单项式叫做多项式的项, 其中不含字母的项叫做常数项. 多项式中次数最高的项的次数叫做多项式的次数.

(2) 多项式的组成元素的单项式, 即多项式的每一项都是一个单项式, 单项式的个数就是多项式的项数, 如果一个多项式含有 a 个单项式, 次数是 b , 那么这个多项式就叫 b 次 a 项式.

6. 整式的加减

(1) 几个整式相加减, 通常用括号把每一个整式括起来, 再用加减号连接; 然后去括号、合并同类项.

(2) 整式的加减实质上就是合并同类项.

(3) 整式加减的应用:

①认真审题, 弄清已知和未知的关系;

②根据题意列出算式;

③计算结果, 根据结果解答实际问题.

【规律方法】整式的加减步骤及注意问题

1. 整式的加减的实质就是去括号、合并同类项. 一般步骤是: 先去括号, 然后合并同类项.

2. 去括号时, 要注意两个方面: 一是括号外的数字因数要乘括号内的每一项; 二是当括号

外是“-”时，去括号后括号内的各项都要改变符号.

7. 提公因式法与公式法的综合运用

提公因式法与公式法的综合运用.

8. 因式分解-十字相乘法等

借助画十字交叉线分解系数，从而帮助我们把二次三项式分解因式的方法，通常叫做十字相乘法.

① $x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子的因式分解.

这类二次三项式的特点是：二次项的系数是 1；常数项是两个数的积；

可以直接将某些二次项的系数是 1 的二次三项式因式分解：

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$$

② ax^2+bx+c ($a \neq 0$) 型的式子的因式分解

这种方法的关键是把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1, a_2 的积 $a_1 \cdot a_2$,

把常数项 c 分解成两个因数 c_1, c_2 的积 $c_1 \cdot c_2$, 并使 $a_1c_2+a_2c_1$ 正好是一

次项 b , 那么可以直接写成结果： $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

9. 分式的定义

(1) 分式的概念：一般地，如果 A, B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式.

(2) 因为 0 不能做除数，所以分式的分母不能为 0.

(3) 分式是两个整式相除的商，分子就是被除式，分母就是除式，而分数线可以理解为除号，还兼有括号的作用.

(4) 分式的分母必须含有字母，而分子可以含字母，也可以不含字母，亦即从形式上看是 $\frac{A}{B}$ 的形式，从本质上看分母必须含有字母，同时，分母不等于零，且只看初始状态，不要化简.

(5) 分式是一种表达形式，如 $x+\frac{1}{x}+2$ 是分式，如果形式都不是 $\frac{A}{B}$ 的形式，那就不能算是分式了，如： $(x+1) \div (x+2)$ ，它只表示一种除法运算，而不能称之为分式，但如果用负指数次幂表示的某些代数式如 $(a+b)^{-2}, y^{-1}$ ，则为分式，因为 $y^{-1}=\frac{1}{y}$ 仅是一种数学上的规定，而非一种运算形式.

10. 分式的值为零的条件

分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零.

注意：“分母不为零”这个条件不能少.

11. 分式的基本性质

(1) 分式的基本性质:

分式的分子与分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式, 分式的值不变.

(2) 分式中的符号法则:

分子、分母、分式本身同时改变两处的符号, 分式的值不变.

【方法技巧】利用分式的基本性质可解决的问题

1. 分式中的系数化整问题: 当分子、分母的系数为分数或小数时, 应用分数的性质将分式的分子、分母中的系数化为整数.

2. 解决分式中的变号问题: 分式的分子、分母及分式本身的三个符号, 改变其中的任何两个, 分式的值不变, 注意分子、分母是多项式时, 分子、分母应为一个整体, 改变符号是指改变分子、分母中各项的符号.

3. 处理分式中的恒等变形问题: 分式的约分、通分都是利用分式的基本性质变形的.

12. 分式的乘除法

(1) 分式的乘法法则: 分式乘分式, 用分子的积作积的分子, 分母的积作积的分母.

(2) 分式的除法法则: 分式除以分式, 把除式的分子、分母颠倒位置后, 与被除式相乘.

(3) 分式的乘方法则: 把分子、分母分别乘方.

(4) 分式的乘、除、乘方混合运算. 运算顺序应先把各个分式进行乘方运算, 再进行分式的乘除运算, 即“先乘方, 再乘除”.

(5) 规律方法总结:

①分式乘除法的运算, 归根到底是乘法的运算, 当分子和分母是多项式时, 一般应先进行因式分解, 再约分.

②整式和分式进行运算时, 可以把整式看成分母为 1 的分式.

③做分式乘除混合运算时, 要注意运算顺序, 乘除法是同级运算, 要严格按照由左到右的顺序进行运算, 切不可打乱这个运算顺序.

13. 分式的加减法

(1) 同分母分式加减法法则: 同分母的分式相加减, 分母不变, 把分子相加减.

(2) 异分母分式加减法法则: 把分母不相同的几个分式化成分母相同的分式, 叫做通分,

经过通分，异分母分式的加减就转化为同分母分式的加减.

说明:

①分式的通分必须注意整个分子和整个分母，分母是多项式时，必须先分解因式，分子是多项式时，要把分母所乘的相同式子与这个多项式相乘，而不能只同其中某一项相乘.

②通分是和约分是相反的一种变换. 约分是把分子和分母的所有公因式约去，将分式化为较简单的形式；通分是分别把每一个分式的分子分母同乘以相同的因式，使几个较简单的分式变成分母相同的较复杂的形式. 约分是对一个分式而言的；通分则是对两个或两个以上的分式来说的.

14. 分式的化简求值

先把分式化简后，再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值.

在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分，注意运算的结果要化成最简分式或整式.

【规律方法】分式化简求值时需注意的问题

1. 化简求值，一般是先化简为最简分式或整式，再代入求值. 化简时不能跨度太大，而缺少必要的步骤，代入求值的模式一般为“当…时，原式=…”.
2. 代入求值时，有直接代入法，整体代入法等常用方法. 解题时可根据题目的具体条件选择合适的方法. 当未知数的值没有明确给出时，所选取的未知数的值必须使原式中的各分式都有意义，且除数不能为0.

15. 解二元一次方程组

(1) 用代入法解二元一次方程组的一般步骤：①从方程组中选一个系数比较简单的方程，将这个方程组中的一个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来. ②将变形后的关系式代入另一个方程，消去一个未知数，得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程，求出 x (或 y)的值. ④将求得的未知数的值代入变形后的关系式中，求出另一个未知数的值. ⑤把求得的 x 、 y 的值用“{”联立起来，就是方程组的解.

(2) 用加减法解二元一次方程组的一般步骤：①方程组的两个方程中，如果同一个未知数的系数既不相等又不互为相反数，就用适当的数去乘方程的两边，使某一个未知数的系数相等或互为相反数. ②把两个方程的两边分别相减或相加，消去一个未知数，得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程，求得未知数的值. ④将求出的未知数的值代入原方程组的任意一个方程中，求出另一个未知数的值. ⑤把所求得两个未知数的值写在一起，

就得到原方程组的解，用 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 的形式表示.

16. 解分式方程

(1) 解分式方程的步骤：①去分母；②求出整式方程的解；③检验；④得出结论.

(2) 解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中的分母为 0，所以应如下检验：

①将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解.

②将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值 0，则整式方程的解不是原分式方程的解.

所以解分式方程时，一定要检验.

17. 解一元一次不等式

根据不等式的性质解一元一次不等式

基本操作方法与解一元一次方程基本相同，都有如下步骤：①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤化系数为 1.

以上步骤中，只有①去分母和⑤化系数为 1 可能用到性质 3，即可能变不等号方向，其他都不会改变不等号方向.

注意：符号“ $\geq$ ”和“ $\leq$ ”分别比“ $>$ ”和“ $<$ ”各多了一层相等的含义，它们是不等号与等号合写形式.

18. 分式函数的最值

分式函数的最值. 最简单的分式函数 $y=\frac{k}{x}$ ，又称反比例函数；

$k>0$ 时，函数在 $x\neq 0$ 的所有区间递减； $k<0$ 时，函数在 $x\neq 0$ 的所有区间内递增

$y=\frac{ax+d}{bx+c}$ 类分式函数，需要化为 $y=k+\frac{m}{bx+c}$ 的形式，其中 k 与 m 都为常数，由 $kb=a$ 求得 k ，

再由 $kc+m=d$ 求得 m ；

$y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 类分式函数，我们通常把它转化为 $(ay-d)x^2+(by-e)x+cy-f=0$ 的关于 x

的一元二次方程的形式，通过根的判别式 $\Delta\geq 0$ ，来求得 y 的取值范围.