2023年中考数学复习探究性试题汇编之勾股定理

一．解答题（共15小题）

1．（2021春•祁阳县期末）如图1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解：在下列四边形中，①正方形；②矩形；③菱形；④平行四边形．是垂美四边形的是：_____（填写序号）；

（2）性质探究：如图1，垂美四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，垂足为O，试猜想：两组对边AB，CD与BC，AD之间的数量关系，并说明理由；

（3）问题解决：如图2，分别以Rt△ACB的直角边AC和斜边AB为边向外作正方形$ACFG$和正方形$ABDE$，连接CE，BG，GE，已知$BC=6$，$AB=10$，求GE长．

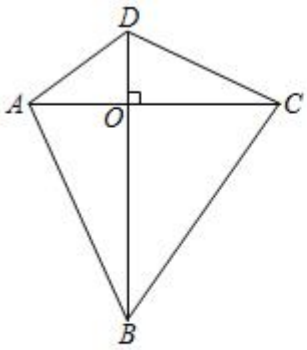


图1

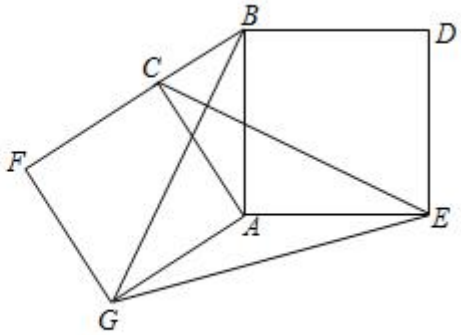


图2

2．（2019秋•南岗区校级期中）概念理解：对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形

（1）性质探究：如图1，四边形$ABCD$是垂美四边形，直接写出AB^2、CD^2、AD^2、BC^2的数量关系：_____．

（2）解决问题：如图2，分别以Rt△ACB的直角边AC和斜边AB为边向外作正方形$ACFG$和正方形$ABDE$，连接CE、BG、GE．若$AC=4$，$AB=5$，求GE的长（可直接利用（1）中性质）

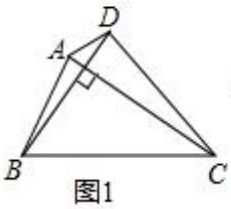


图1

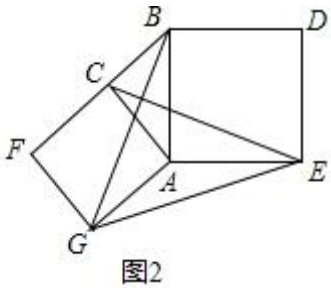


图2

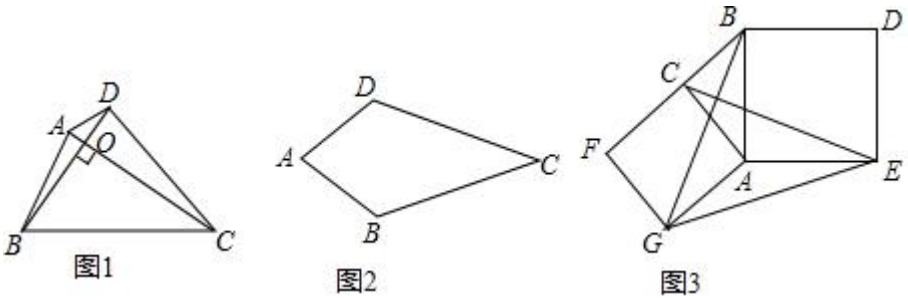
3．（2019春•曾都区校级期中）【知识感知】我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美边形．

（1）【概念理解】如图2，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形$ABCD$是

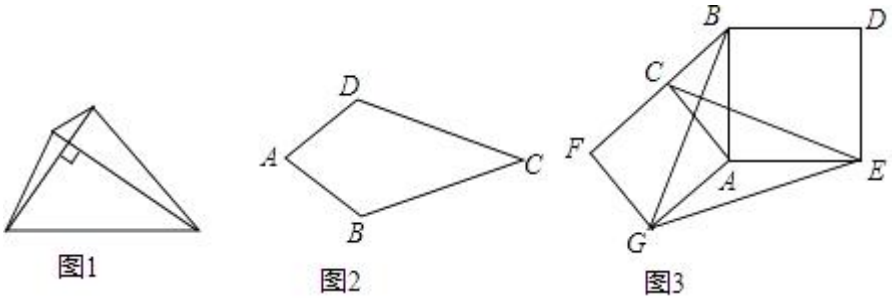
垂美四边形吗？请说明理由．

（2）【性质探究】如图 1，试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，并证明你的猜想．

（3）【性质应用】如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 AC＝8，AB＝10，求 GE 长．



4．（2018 春•大石桥市期末）我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形

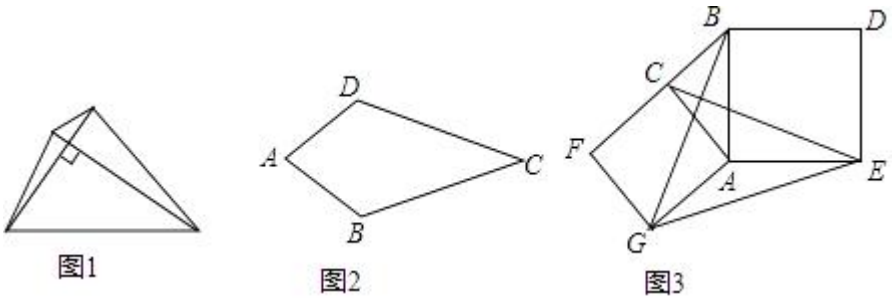


（1）【概念理解】在平行四边形、矩形、菱形、正方形中，一定是垂美四边形的是 ____

（2）【性质探究】如图 2，试探索垂美四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，写出证明过程．

（3）【问题解决】如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 AC= $\sqrt{3}$，BC＝1，求 GE 的长．

5．（2018•邵阳模拟）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．



（1）概念理解：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，AB＝AD，CB＝CD，问四边形 $ABCD$ 是垂

美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系．

猜想结论：（要求用文字语言叙述）垂美四边形两组对边的平方和相等．

写出证明过程（先画出图形，写出已知、求证）．

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 长．

6．（2018 春•阳谷县期末）如图，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．（如图 1）

（1）概念理解：在平行四边形，矩形，菱形，正方形中，一定是垂美四边形的是 _____；

（2）性质证明：如图 1，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（3）问题解决：如图 2，分别以 Rt△ABC 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，联结 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 的长．

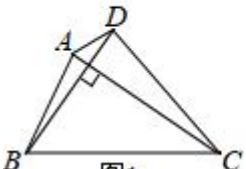


图1

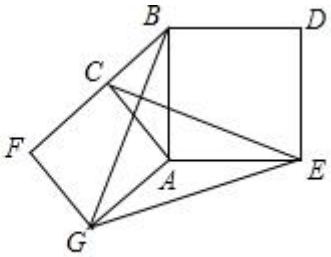


图 2

7．（2017 春•城区校级期中）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

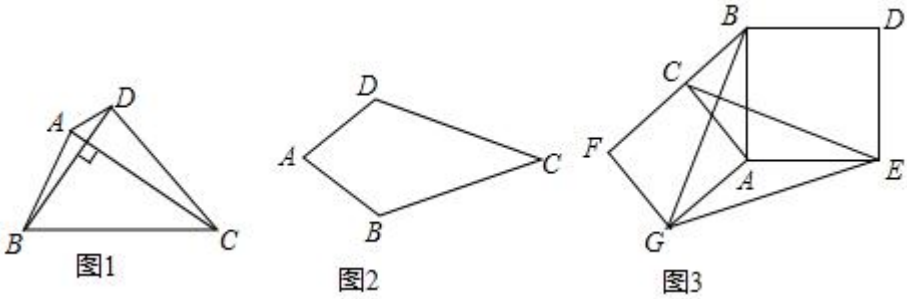
（1）概念理解：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：请利用图 1 探究下列问题

①试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，猜想结论：_____，并写出证明过程．

②试探究垂美四边形 $ABCD$ 的面积公式为 _____（用 AC 和 BD 表示，直接写出，不必证明）

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{3}$，求 GE 的长．



8．（2016•衢州）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

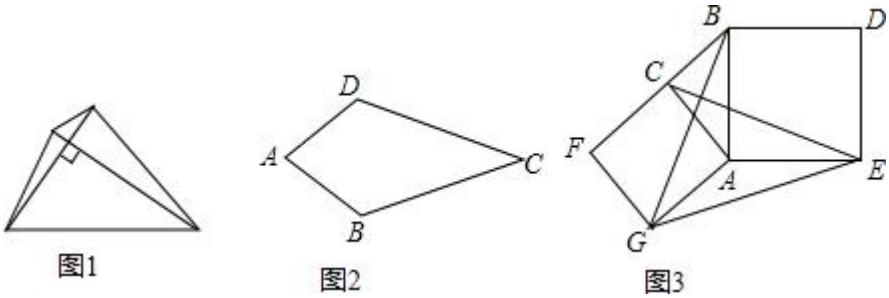
（1）概念理解：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系．

猜想结论：（要求用文字语言叙述） _____

写出证明过程（先画出图形，写出已知、求证）．

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 长．



9．（2023 春•涟水县校级月考）定义：我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形；性质：垂美四边形的对角线互相垂直．

（1）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，接 $ACBD$，对角线相交于 O，AC 垂直于 BD，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由；

（2）如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（3）如图 3，分别以 Rt△ABC 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 的长．

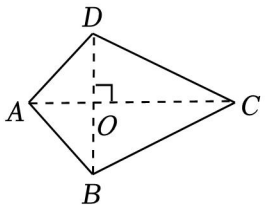


图1

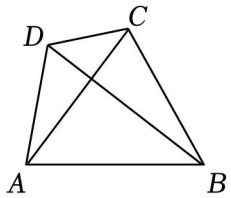


图2

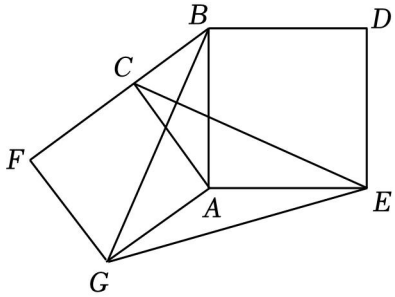


图3

10．（2023春•德城区校级月考）如图，我把对角线互相垂直的四边形叫做“垂美四边形”.

（1）性质探究：如图1，已知四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，垂足为O，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

（2）解决问题：已知$AB=5$，$BC=4$，分别以△ABC的边BC和AB向外作等腰Rt△BCQ和等腰Rt△ABP．如图2，当$\angle ACB=90°$，连接PQ，求PQ.

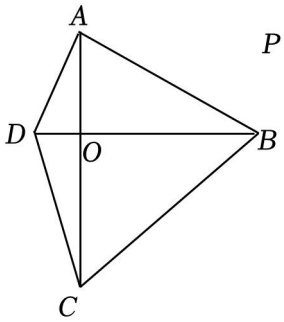


图1

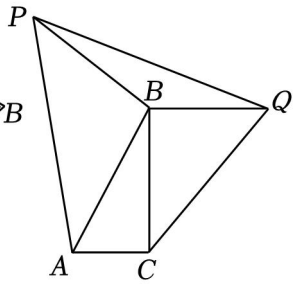


图2

11．（2022秋•武侯区校级期中）在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，$AB=CD=10$，$BC=AD=6$，$P$为射线$BC$上一点，将△$ABP$沿直线$AP$翻折至△$AEP$的位置，使点$B$落在点$E$处.

（1）若P为BC上一点.

①如图1，当点E落在边CD上时，求CE的长；

②如图2，连接CE，若$CE\parallel AP$，则BP与BC有何数量关系？请说明理由；

（2）如果点P在BC的延长线上，当△PEC为直角三角形时，求PB的长.

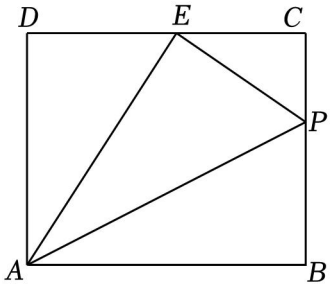


图1

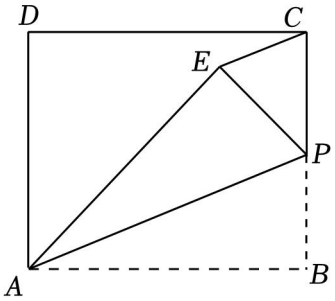


图2

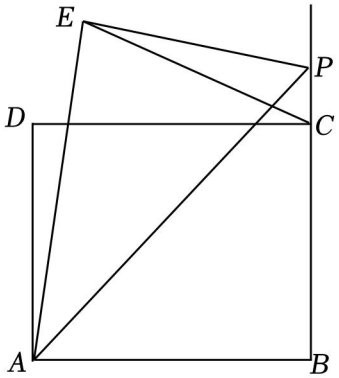


图3

12．（2022春•海安市月考）如图1，我们把对角线相互垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解，在四边形 $ABCD$ 中，以下是垂美四边形的是 _____．

①平行四边形；②矩形；③菱形；④$AB=AD$，$CB=CD$．

（2）性质探究，小美同学猜想“垂美四边形两组对边的平方和相等”，即，如图1，在四边形 $ABCD$ 中，若 $AC\perp BD$，则 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$．请判断小美同学的猜想是否正确，并说明理由．

（3）问题解决：如图2．在△ABC 中，$BC=3$，$AC=4$，D、E 分别是 AC、BC 的中点，连接 AE、BD．有 $AE\perp BD$，求 AB．

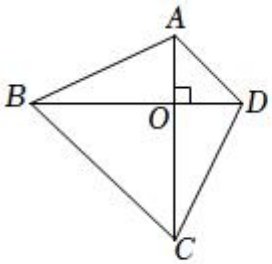


图1

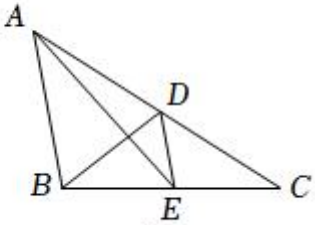


图2

13．（2022春•海珠区校级期中）定义，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

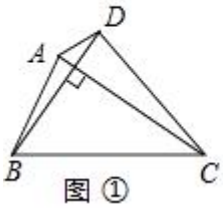
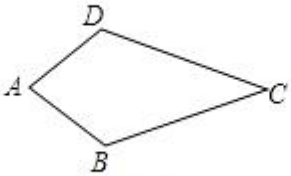
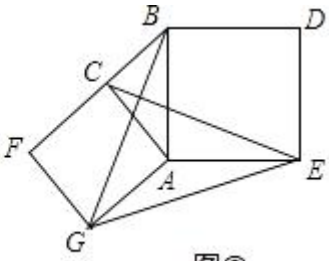


图 ①



图②



图③

概念理解：如图②，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB=AD$，$CB=CD$，那么四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由．

性质探究：如图①，垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB、CD 与 BC、AD 之间有怎样的数量

关系？写出你的猜想，并给出证明．

问题解决：如图③，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE、BG、GE．若 AC＝2，AB＝5，则

①求证：△AGB≌△ACE

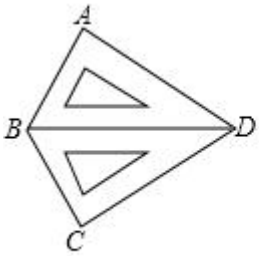
②GE＝_____．

14．（2022 春•建平县期末）[定义]有一组对角是直角的四边形是垂美四边形．

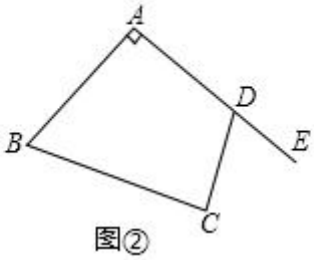
[理解]如图①，将一对相同的直角三角尺按如图所示的方式拼成四边形 $ABCD$，每个三角尺三个内角的度数都是 30°、60°和 90°．四边形 $ABCD$ 是 _____四边形，∠ABC+∠ADC＝_____度；

[探究]如图②，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．∠A＝90°．∠B＝80°，E 是边 AD 延长线上一点，求∠C 和∠CDE 的度数．

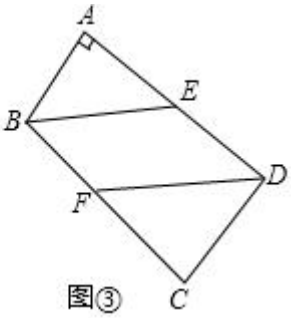
[应用]如图③，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，∠A＝90°，BE 和 DF 分别是∠ABC 和∠ADC 的平分线，交 AD、BC 于点 E、F．试说明 BE∥DF．



图①



图②



图③

15．（2021•新北区一模）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解：我们已经学习了平行四边形、菱形、矩形、正方形，在这四种图形中是垂美四边形的是 _____．

（2）性质探究：如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，试探究其两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，并写出证明过程．

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，CE 交 AB 于点 M，已知 AC＝4，AB＝5，求 GE 的长．

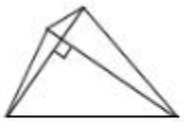


图1

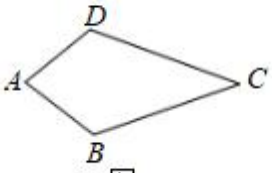


图2

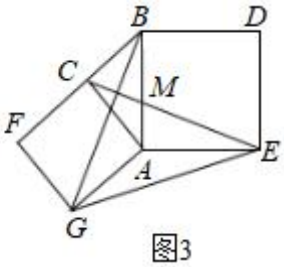


图3

2023年中考数学复习探究性试题汇编之勾股定理

参考答案与试题解析

一．解答题（共15小题）

1．（2021春•祁阳县期末）如图1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解：在下列四边形中，①正方形；②矩形；③菱形；④平行四边形．是垂美四边形的是：__①③__（填写序号）；

（2）性质探究：如图1，垂美四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，垂足为O，试猜想：两组对边AB，CD与BC，AD之间的数量关系，并说明理由；

（3）问题解决：如图2，分别以Rt△ACB的直角边AC和斜边AB为边向外作正方形$ACFG$和正方形$ABDE$，连接CE，BG，GE，已知$BC=6$，$AB=10$，求GE长．

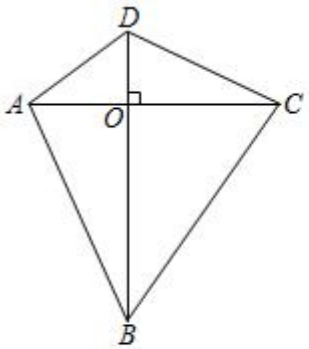


图1

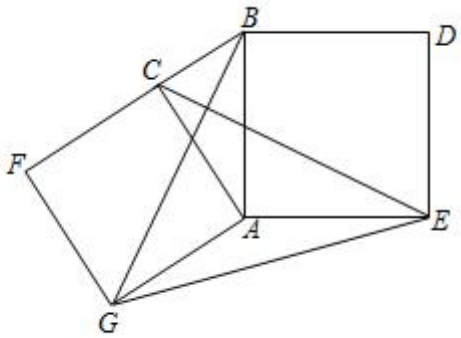


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】（1）根据垂美四边形的定义判断即可；

（2）根据垂直的定义和勾股定理得出$AD^2+BC^2=AO^2+DO^2+BO^2+CO^2$，$AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$，即可得出结论；

（3）先由SAS证明△GAB≌△CAE，得出∠ABG=∠AEC，进而证出$CE\perp BG$，再根据勾股定理、结合（2）的结论计算，即可得出结果．

【解答】解：（1）∵正方形，菱形的对角线互相垂直，

∴正方形，菱形是垂美四边形，

故答案为：①③．

（2）结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

理由：∵四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，

∴$AC\perp BD$，

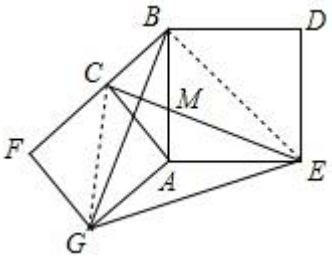
∴$\angle AOD=\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AO^2+DO^2+BO^2+CO^2$，

$AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

（3）连接 CG、BE，



∵$\angle CAG=\angle BAE=90^\circ$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

∵$AG=AC$，$\angle GAB=\angle CAE$，$AB=AE$，

∴$\triangle GAB\cong\triangle CAE$（$SAS$），

∴$\angle ABG=\angle AEC$，

又$\angle AEC+\angle AME=90^\circ$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90^\circ$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

∴$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$BC=6$，$AB=10$，$\angle ACB=90^\circ$，

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∴$CG=8\sqrt{2}$，$BE=10\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=292$，

∴$GE=2\sqrt{73}$.

【点评】本题属于四边形综合题，主要考查正方形的性质，垂美四边形，勾股定理等知识，解题的关键是理解新定义，并熟练运用及全等三角形的判定与性质、直角三角形的性质、矩形的判定等知识点.

2．（2019秋•南岗区校级期中）概念理解：对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形

（1）性质探究：如图1，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，直接写出 AB^2、CD^2、AD^2、BC^2 的数量关系：__$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$__．

（2）解决问题：如图2，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE、BG、GE．若 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 的长（可直接利用（1）中性质）

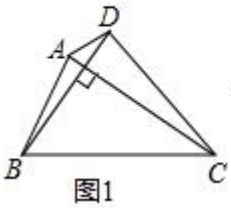


图1

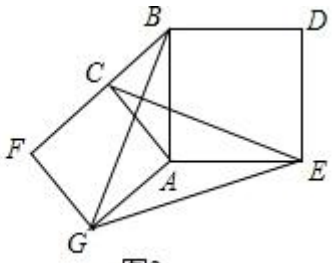


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；应用意识．

【分析】（1）利用勾股定理即可得出结论；

（2）先判断出 $CE\perp BG$，得出四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，借助（1）的结论即可得出结论．

【解答】解：（1）结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$，

如图1中，设 BD 交 AC 于 E．

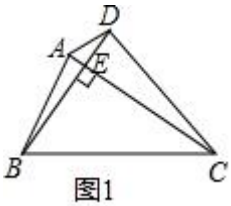


图1

∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

故答案为：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

（2）连接 CG、BE，

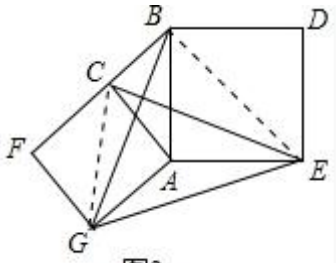


图2

∵∠CAG＝∠BAE＝90°，

∴∠CAG+∠BAC＝∠BAE+∠BAC，即∠GAB＝∠CAE，

在△GAB 和△CAE 中，

$$\begin{cases} AG = AC \\ \angle GAB = \angle CAE, \\ AB = AE \end{cases}$$

∴△GAB≌△CAE（SAS），

∴∠ABG＝∠AEC，又∠AEC+∠AME＝90°，

∴∠ABG+∠AME＝90°，即 CE⊥BG，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵AC＝4，AB＝5，

∴BC＝3，$CG=4\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

【点评】此题是四边形综合题，主要考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键.

3.（2019 春•曾都区校级期中）【知识感知】我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美边形.

（1）【概念理解】如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，AB＝AD，CB＝CD，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由.

（2）【性质探究】如图 1，试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，并证明你的猜想.

（3）【性质应用】如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 AC＝8，AB＝10，求 GE 长.

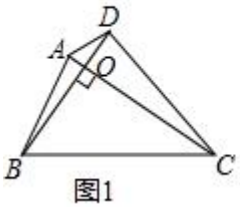


图1

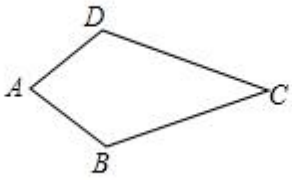


图2

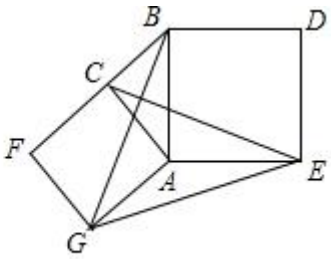


图3

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；应用意识．

【分析】（1）根据垂直平分线的判定定理证明即可；

（2）根据垂直的定义和勾股定理解答即可；

（3）根据垂美四边形的性质、勾股定理、结合（2）的结论计算．

【解答】解：（1）如图 2，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

证明：连接 AC、BD 交于点 E，

∵$AB=AD$，

∴点 A 在线段 BD 的垂直平分线上，

∵$CB=CD$，

∴点 C 在线段 BD 的垂直平分线上，

∴直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线，

∴$AC\perp BD$，即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形；

（2）猜想结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

如图 2，已知四边形 $ABCD$ 中，∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

（3）如图 3，连接 CG、BE，

∵$\angle CAG=\angle BAE=90^\circ$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，

$\begin{cases} AG = AC \\ \angle GAB = \angle CAE, \\ AB = AE \end{cases}$

∴△GAB≌△CAE（SAS），

∴∠ABG＝∠AEC，

又∠AEC+∠AME＝90°，

∴∠ABG+∠BMN＝90°，

∴∠BNC＝90°，即 CE⊥BG，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵AC＝8，AB＝10，

∴BC＝6，$CG=8\sqrt{2}$，$BE=10\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=(8\sqrt{2})^2+(10\sqrt{2})^2-6^2=292$，

∴$GE=\sqrt{292}=2\sqrt{73}$.

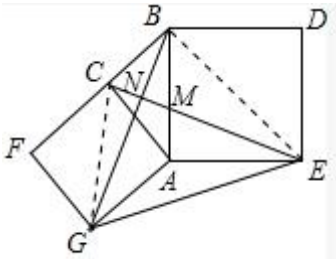


图3

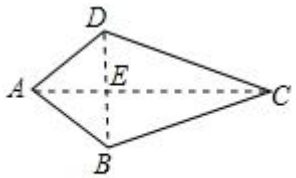


图2

【点评】本题是四边形的综合题，考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键.

4.（2018 春•大石桥市期末）我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形

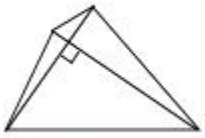


图1

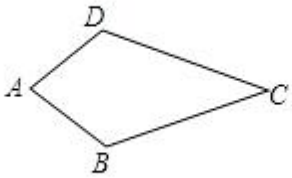


图2

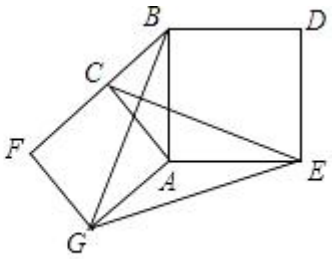


图3

（1）【概念理解】在平行四边形、矩形、菱形、正方形中，一定是垂美四边形的是 <u>菱形和正方形</u>

（2）【性质探究】如图 2，试探索垂美四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，写出证明过程.

（3）【问题解决】如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=\sqrt{3}$，$BC=1$，求 GE 的长.

【考点】四边形综合题.

【专题】多边形与平行四边形.

【分析】（1）根据垂美四边形的定义即可判断；

（2）猜想：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．利用勾股定理即可证明；

（3）首先证明四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，利用（2）中结论即可解决问题；

【解答】解：（1）∵菱形、正方形的对角线垂直，

∴菱形、正方形都是垂美四边形.

故答案为菱形和正方形.

（2）猜想：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

理由：连接 AC，BD 交于点 E，

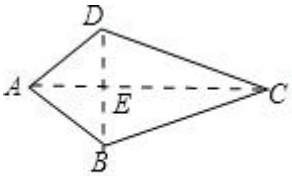


图2

∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理，得 $AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

（3）连接 CG，BE，设 AB 与 CE 的交点为 M.

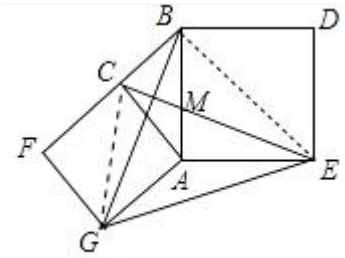


图3

∵$\angle CAG=\angle BAE=90°$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

又∵$AG=AC$，$AB=AE$

∴$\triangle GAB\cong\triangle CAE$（$SAS$）

∴$\angle ABG=\angle AEC$，

又∵$\angle AEC+\angle AME=90°$，

∴$\angle ABG+\angle CMB=90°$ 即 $CE\perp BG$

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=\sqrt{3}$，$BC=1$∴$AB=2$

∴$BE^2=8$，$CG^2=6$，

∴$6+8=1+GE^2$，

∴$GE=\sqrt{13}$.

【点评】本题考查四边形综合题、正方形的性质、勾股定理、垂美四边形的定义等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

5.（2018•邵阳模拟）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.

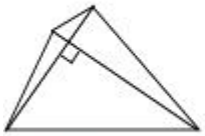


图1

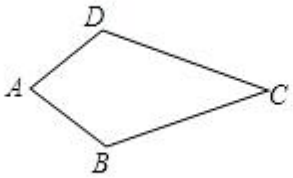


图2

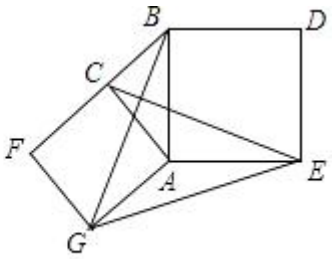


图3

（1）概念理解：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系．

猜想结论：（要求用文字语言叙述）垂美四边形两组对边的平方和相等．

写出证明过程（先画出图形，写出已知、求证）．

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 长．

【考点】四边形综合题．

【专题】综合题．

【分析】（1）根据垂直平分线的判定定理证明即可；

（2）根据垂直的定义和勾股定理解答即可；

（3）先判断出△GAB≌△CAE，得出∠ABG＝∠AEC，进而根据垂美四边形的性质、勾股定理、结合（2）的结论计算．

【解答】（1）解：四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

证明：∵$AB=AD$，

∴点 A 在线段 BD 的垂直平分线上，

∵$CB=CD$，

∴点 C 在线段 BD 的垂直平分线上，

∴直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线，

∴$AC\perp BD$，即：四边形 $ABCD$ 是垂美四边形

（2）解：猜想结论：垂美四边形的两组对边的平方和相等．

如图 2，已知四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，垂足为 E，

求证：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$

证明：连接 BD，AC 相交于 E，

∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90°$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$

（3）解：如图 3，连接 CG、BE，

∵$\angle CAG=\angle BAE=90°$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，$\begin{cases}AG=AC\\ \angle GAB=\angle CAE\\ AB=AE\end{cases}$，

∴△GAB≌△CAE，

∴$\angle ABG=\angle AEC$，又$\angle AEC+\angle AME=90°$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90°$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

在 Rt△ABC 中，$AC=4$，$AB=5$，根据勾股定理得，$BC=3$，

∵CG 和 BE 分别是正方形 $ACFG$ 和 $ABDG$ 的对角线，

∴$CG=4\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

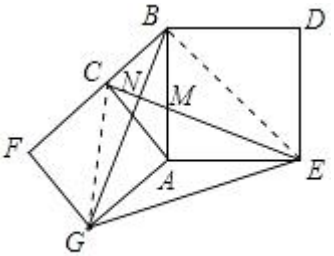


图3

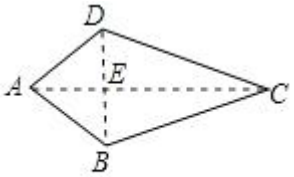


图2

【点评】此题是四边形综合题，主要考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键．

6.（2018春•阳谷县期末）如图，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．（如图1）

（1）概念理解：在平行四边形，矩形，菱形，正方形中，一定是垂美四边形的是 <u>菱形，正方形</u>；

（2）性质证明：如图1，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（3）问题解决：如图2，分别以 Rt△ABC 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，联结 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 的长．

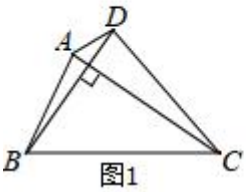


图1

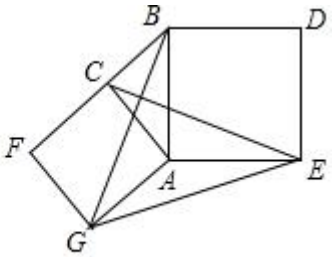


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】综合题．

【分析】（1）由平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质即可得出结论；

（2）利用勾股定理即可得出结论；

（3）先判断出 $CE\perp BG$，得出四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，借助（2）的结论即可得出结论．

【解答】解：（1）∵在平行四边形、矩形、菱形、正方形中，两条对角线互相垂直的四边形是菱形、正方形，

∴菱形和正方形一定是垂美四边形，

故答案为：菱形、正方形；

（2）如图 1，∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90°$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

故答案为：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$，

（3）如图 2，设 AB 与 CE 相交于点 M，连接 CG、BE，

∵$\angle CAG=\angle BAE=90°$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，

$$\begin{cases}AG=AC\\ \angle GAB=\angle CAE,\\ AB=AE\end{cases}$$

∴△GAB≌△CAE（SAS），

∴$\angle ABG=\angle AEC$，又$\angle AEC+\angle AME=90°$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90°$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=4$，$AB=5$，

∴$BC=3$，$CG=4\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

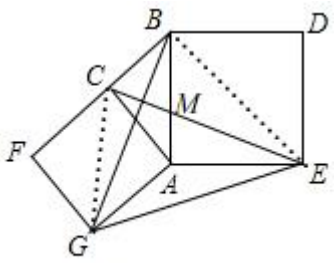


图 2

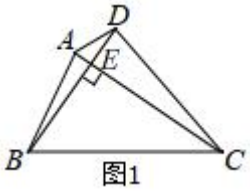


图1

【点评】此题是四边形综合题，主要考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键．

7．（2017春•城区校级期中）如图1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解：如图2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：请利用图1探究下列问题

①试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，猜想结论：$\underline{AD^2+BC^2=AB^2+CD^2.\quad}$，并写出证明过程．

②试探究垂美四边形 $ABCD$ 的面积公式为 $\underline{\ \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\ }$（用 AC 和 BD 表示，直接写出，不必证明）

（3）问题解决：如图3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{3}$，求 GE 的长．

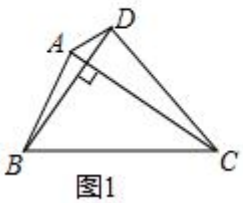


图1

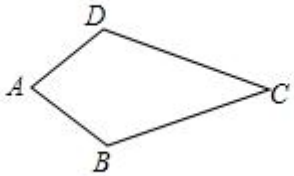


图2

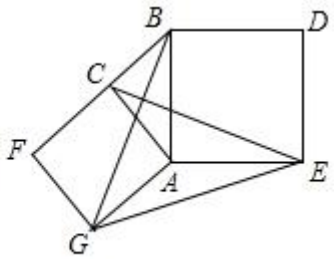


图3

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题．

【分析】（1）如图2中，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，根据线段的垂直平分线的判定即可解决问题；

（2）①如图1中，设 AC 交 BD 于 E．结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．利用勾股定理即可证明；

②结论：垂美四边形 $ABCD$ 的面积公式为 $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$．根据 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$ 计

算即可；

（3）连接 CG、BE，只要证明四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，利用（2）中结论即可解决问题；

【解答】解：（1）如图 2 中，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，

理由如下：连接 AC、BD．

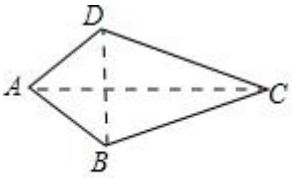


图2

∵$AB=AD$，

∴点 A 在线段 BD 的垂直平分线上，

∵$CB=CD$，

∴点 C 在线段 BD 的垂直平分线上，

∴直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线，

∴$AC\perp BD$，即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

（2）①如图 1 中，设 AC 交 BD 于 E．结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

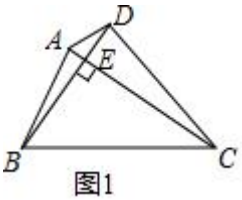


图1

理由：∵四边形 $ABCD$ 是垂美四边形

∴$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

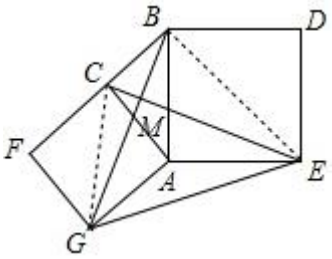
故答案为 $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．

②结论：垂美四边形 $ABCD$ 的面积公式为$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$.

理由：∵$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot$（$BE+ED$）$=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$.

故答案为$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$.

（3）连接 CG、BE，设 AC 与 BG 交于 M



∵$\angle CAG=\angle BAE=90°$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

∵在$\triangle GAB$ 和$\triangle CAE$ 中，$AG=AC$，$\angle GAB=\angle CAE$，$AB=AE$，

∴$\triangle GAB\cong\triangle CAE$，

∴$\angle ABG=\angle AEC$，

又$\angle AEC+\angle AME=90°$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90°$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

∴$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{3}$，

∴$BC=1$，$CG=2$，$BE=\sqrt{6}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=9$，

∴$GE=3$.

【点评】本题主要考查四边形综合题、正方形的性质、勾股定理、线段的垂直平分线的判定和性质、全等三角形的判定和性质、三角形的面积等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，根据直角三角形解决问题，属于中考压轴题.

8.（2016•衢州）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.

（1）概念理解：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂

美四边形吗？请说明理由．

（2）性质探究：试探索垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系．

猜想结论：（要求用文字语言叙述）　<u>垂美四边形两组对边的平方和相等</u>

写出证明过程（先画出图形，写出已知、求证）．

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 长．

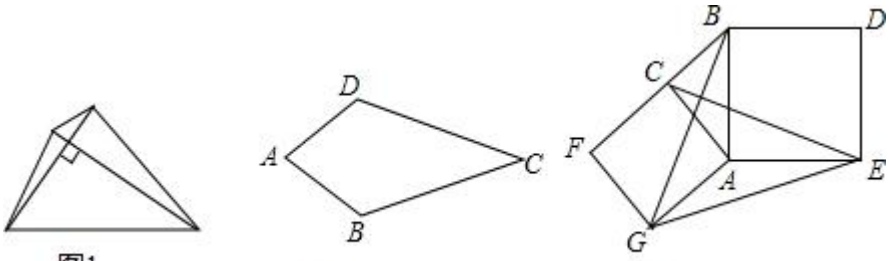


图1　　图2　　图3

【考点】四边形综合题．

【分析】（1）根据垂直平分线的判定定理证明即可；

（2）根据垂直的定义和勾股定理解答即可；

（3）根据垂美四边形的性质、勾股定理、结合（2）的结论计算．

【解答】解：（1）四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

证明：∵$AB=AD$，

∴点 A 在线段 BD 的垂直平分线上，

∵$CB=CD$，

∴点 C 在线段 BD 的垂直平分线上，

∴直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线，

∴$AC\perp BD$，即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形；

（2）猜想结论：垂美四边形的两组对边的平方和相等．

如图 2，已知四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，垂足为 E，

求证：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$

证明：∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

（3）连接 CG、BE，

∵$\angle CAG=\angle BAE=90°$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，

$$\begin{cases} AG=AC \\ \angle GAB=\angle CAE, \\ AB=AE \end{cases}$$

∴△GAB≌△CAE，

∴$\angle ABG=\angle AEC$，又$\angle AEC+\angle AME=90°$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90°$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=4$，$AB=5$，

∴$BC=3$，$CG=4\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

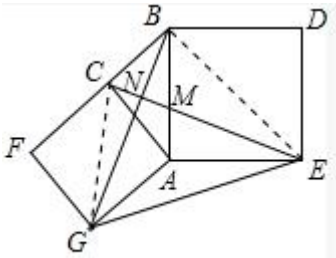


图3

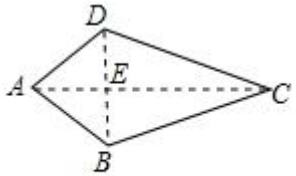


图2

【点评】本题考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键.

9.（2023 春•涟水县校级月考）定义：我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形；性质：垂美四边形的对角线互相垂直.

（1）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，接 $ACBD$，对角线相交于 O，AC 垂直于 BD，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由；

（2）如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（3）如图 3，分别以 Rt△ABC 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，已知 $AC=4$，$AB=5$，求 GE 的长．

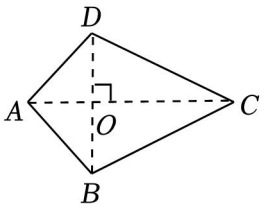


图1

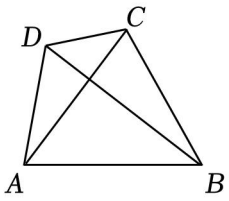


图2

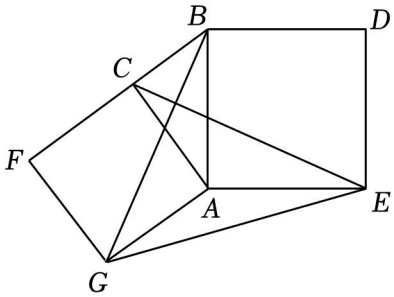


图3

【考点】四边形综合题．

【专题】综合题；推理能力．

【分析】（1）依据垂美四边形定义，即可判定；

（2）利用勾股定理即可得出结论；

（3）先判断出 $CE\perp BG$，得出四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，借助（2）的结论即可得出结论．

【解答】（1）解：四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

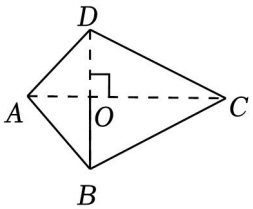


图1

∵四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$，

∴四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．

（2）证明：设 BD 与 AC 相交于点 E，

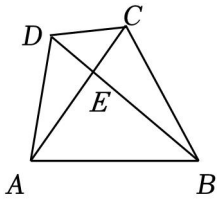


图2

∵已知四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，

∴$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90^\circ$，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

（3）如图 3，设 AB 与 CE 相交于点 M，连接 CG、BE，

∵$\angle CAG=\angle BAE=90^\circ$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，

$$\begin{cases}AG=AC\\ \angle GAB=\angle CAE\\ AB=AE\end{cases},$$

∴△GAB≌△CAE（SAS），

∴$\angle ABG=\angle AEC$，

又$\angle AEC+\angle AME=90^\circ$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90^\circ$，即 $CE\perp BG$，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=4$，$AB=5$，

∴$BC=3$，$CG=4\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

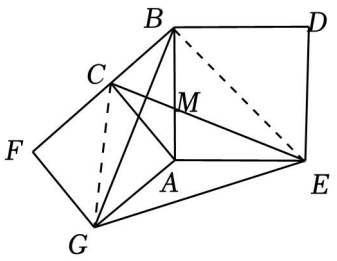


图3

【点评】（1）四边形 $ABCD$ 是垂美四边形；理由解解析过程；

（2）证明见解析过程；

（3）$GE=\sqrt{73}$.

10.（2023 春•德城区校级月考）如图，我把对角线互相垂直的四边形叫做“垂美四边形”.

（1）性质探究：如图 1，已知四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，垂足为 O，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

（2）解决问题：已知 $AB=5$，$BC=4$，分别以△ABC 的边 BC 和 AB 向外作等腰 Rt△BCQ 和等腰 Rt△ABP．如图 2，当∠$ACB=90°$，连接 PQ，求 PQ.

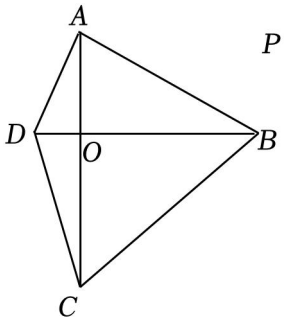


图1

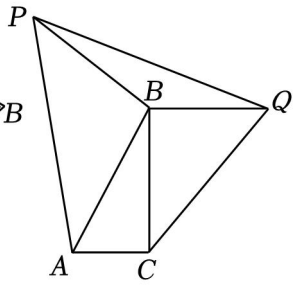


图2

【考点】全等三角形的判定与性质；勾股定理；等腰直角三角形.

【专题】等腰三角形与直角三角形；推理能力.

【分析】（1）运用勾股定理可得：$AB^2=OA^2+OB^2$，$CD^2=OC^2+OD^2$，$AD^2=OA^2+OD^2$，$BC^2=OB^2+OC^2$，即可证得结论；

（2）如图 2，过点 P 作 $PD\perp BQ$，交 QB 的延长线于点 D，利用勾股定理可得 $AC=3$，再证得△ABC≌△PBD（AAS），得出：$PD=AC=3$，$BD=BC=4$，$DQ=BD+BQ=8$，运用勾股定理即可求得答案.

【解答】（1）证明：∵$AC\perp BD$，垂足为 O，如图 1，

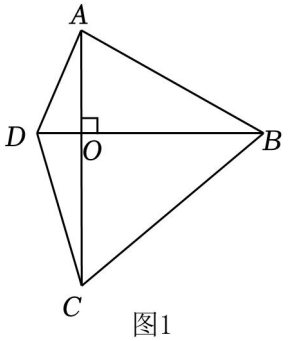


图1

∴$AB^2=OA^2+OB^2$，$CD^2=OC^2+OD^2$，$AD^2=OA^2+OD^2$，$BC^2=OB^2+OC^2$，

∴$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$，$AD^2+BC^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$，

∴$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

（2）解：如图 2，过点 P 作 $PD\perp BQ$，交 QB 的延长线于点 D，

则∠BDP＝90°，

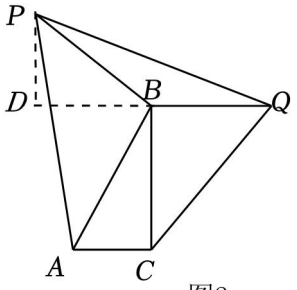


图2

∵∠ACB＝90°，

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∵△BCQ 和△ABP 都是等腰直角三角形，

∴∠CBQ＝∠ABP＝90°，BQ＝BC＝4，BP＝BA，

∴∠CBD＝180°﹣∠CBQ＝180°﹣90°＝90°，

∴∠ABC+∠ABD＝90°，

∵∠PBD+∠ABD＝90°，

∴∠ABC＝∠PBD，

∵∠ACB＝∠PDB＝90°，

∴△ABC≌△PBD（AAS），

∴PD＝AC＝3，BD＝BC＝4，

∴DQ＝BD+BQ＝4+4＝8，

在 Rt△PQD 中，$PQ=\sqrt{PD^2+DQ^2}=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$.

【点评】本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形性质，勾股定理，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键．

11．（2022秋•武侯区校级期中）在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$，$AB=CD=10$，$BC=AD=6$，$P$ 为射线 BC 上一点，将△ABP 沿直线 AP 翻折至△AEP 的位置，使点 B 落在点 E 处．

（1）若 P 为 BC 上一点．

①如图1，当点 E 落在边 CD 上时，求 CE 的长；

②如图2，连接 CE，若 $CE\parallel AP$，则 BP 与 BC 有何数量关系？请说明理由；

（2）如果点 P 在 BC 的延长线上，当△PEC 为直角三角形时，求 PB 的长．

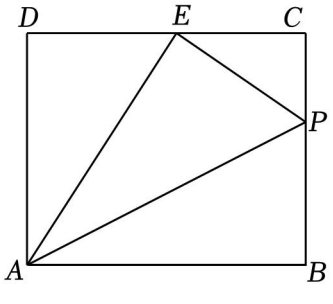


图1

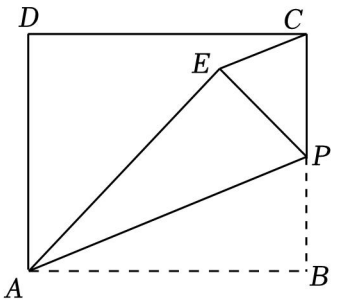


图2

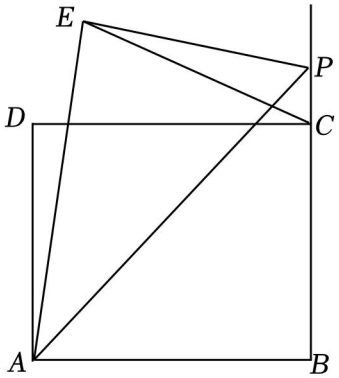


图3

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；分类讨论；几何直观．

【分析】（1）①以点 A 为圆心，AB 为半径交 CD 于点 E，利用勾股定理求出 DE 的长即可；

②根据平行线的性质和翻折的性质可证 $EP=CP$，$BP=PE$，从而 $BP=PC$；

（2）由△PEC 是直角三角形，当 $\angle EPC=90^\circ$ 时，则四边形 $ABPE$ 是正方形，得 $PB=AB=10$；当 $\angle ECP=90^\circ$ 时，设 $BP=x$，则 $PC=x-6$，在 Rt△ECP 中，利用勾股定理列方程即可求解，当 $\angle PEC=90^\circ$ 时，点 P 在线段 BC 上，不符合题意，舍去．

【解答】解：（1）①如图：以点 A 为圆心，AB 为半径交 CD 于点 E，

∵$AE=AB=10$，$AD=6$，$\angle D=90^\circ$，

∴$DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∴$CE=DC-DE=10-8=2$；

②$BC=2BP$，理由如下：

∵将△ABP 沿直线 AP 翻折至△AEP 的位置，

∴∠APB＝∠APE，$PE=BP$，

∵$CE\parallel AP$，

∴∠CEP＝∠APE，∠ECP＝∠APB，

∴∠PEC＝∠ECP，

∴$EP=CP$，

∴$BP=BC$，

∴$BC=2BP$；

（2）∵△PEC 是直角三角形，

当∠EPC＝90°时，

∵∠EPC＝∠AEP＝∠B＝90°，且 $EP=BP$，

∴四边形 $ABPE$ 是正方形，

∴$PB=AB=10$；

当∠ECP＝90°时，

则∠ECP＝∠B＝90°，

∴$EC\parallel AB$，

∵$DC\parallel AB$，

∴点 E、D、C 三点共线，

由翻折知 $AE=AB=10$，根据勾股定理得 $DE=8$，

∴$EC=18$，

设 $BP=x$，则 $PC=x-6$，

在 Rt△ECP 中，由勾股定理得：$18^2+(x-6)^2=x^2$，

解得 $x=30$，

∴PB＝30；

当∠PEC＝90°时，点 P 在线段 BC 上，不符合题意，舍去，

综上：BP＝10 或 30．

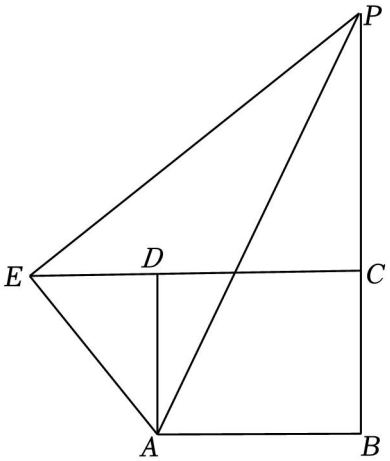


图3

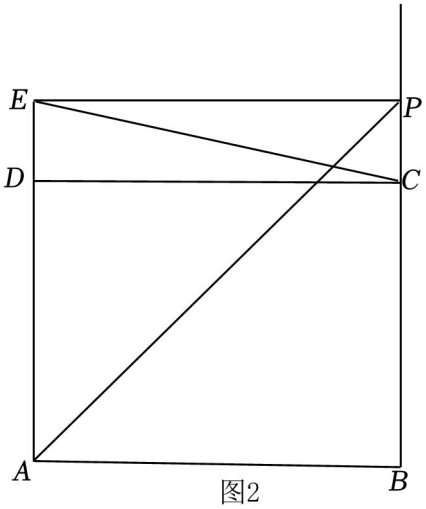


图2

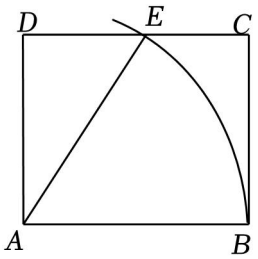


图1

【点评】本题属于几何变换综合题，考查了矩形的性质，翻折变换，勾股定理等知识，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题，学会利用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题．

12．（2022 春•海安市月考）如图 1，我们把对角线相互垂直的四边形叫做垂美四边形．

（1）概念理解，在四边形 $ABCD$ 中，以下是垂美四边形的是 ___③④___．

①平行四边形；②矩形；③菱形；④$AB=AD$，$CB=CD$．

（2）性质探究，小美同学猜想“垂美四边形两组对边的平方和相等”，即，如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，若 $AC\perp BD$，则 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$．请判断小美同学的猜想是否正确，并说明理由．

（3）问题解决：如图 2．在△ABC 中，$BC=3$，$AC=4$，D、E 分别是 AC、BC 的中点，连接 AE、BD．有 $AE\perp BD$，求 AB．

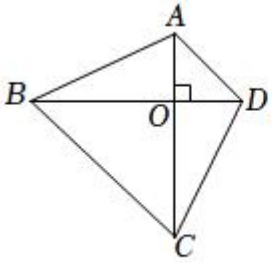


图1

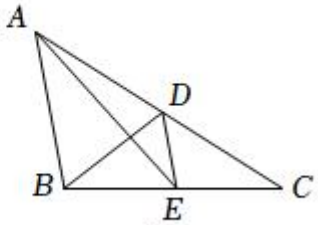


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；推理能力．

【分析】（1）利用垂美四边形的定义依次判断，可求解；

（2）由勾股定理可得结论；

（3）由三角形中位线定理可得 $AD=\frac{1}{2}AC=2$，$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$，$DE=\frac{1}{2}AB$，由垂美四边形的性质可求解．

【解答】解：（1）∵菱形的对角线互相垂直，

∴菱形是垂美四边形，

∵$AB=AD$，$CB=CD$，

∴$AC\perp BD$，

∴当 $AB=AD$，$CB=CD$ 的四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，

故答案为：③④；

（2）猜想正确，理由如下：

∵四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，

∴$\angle AOB=\angle COD=\angle BOC=\angle AOD=90^\circ$，

∴$AB^2=OA^2+OB^2$，$CD^2=OC^2+OD^2$，$BC^2=OB^2+OC^2$，$AD^2=OA^2+OD^2$，

∴$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$，$BC^2+AD^2=OB^2+OC^2+OA^2+OD^2$，

∴$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（3）∵$BC=3$，$AC=4$，D、E 分别是 AC、BC 的中点，

∴$AD=\frac{1}{2}AC=2$，$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$，$DE=\frac{1}{2}AB$，

∵$AE\perp BD$，

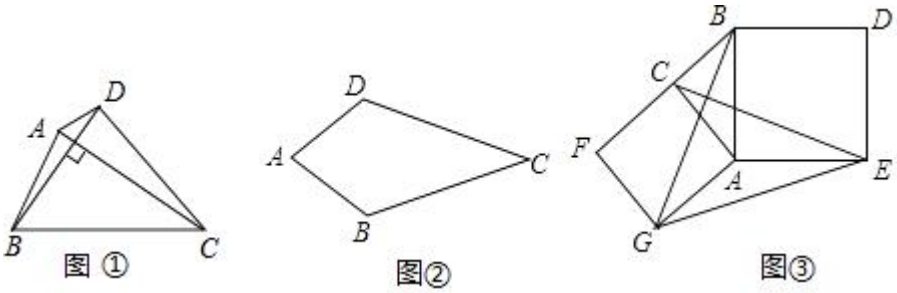
∴$AB^2+ED^2=AD^2+BE^2$，

∴$\frac{5}{4}AB^2=4+\frac{9}{4}$，

∴$AB=\sqrt{5}$.

【点评】本题为四边形综合题，主要考查的是菱形的性质，垂直的定义，勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键.

13.（2022 春•海珠区校级期中）定义，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.



概念理解：如图②，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB=AD$，$CB=CD$，那么四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由.

性质探究：如图①，垂美四边形 $ABCD$ 两组对边 AB、CD 与 BC、AD 之间有怎样的数量关系？写出你的猜想，并给出证明.

问题解决：如图③，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE、BG、GE．若 $AC=2$，$AB=5$，则

①求证：△AGB≌△ACE

②$GE=$__$\sqrt{37}$__.

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；图形的全等；矩形 菱形 正方形.

【分析】概念理解：根据垂直平分线的判定定理证明即可；

性质探究：根据垂直的定义和勾股定理解答即可；

问题解决：①连接 CG，BE，由∠CAG=∠BAE=90°知∠GAB=∠CAE，结合 $AG=AC$ 与 $AB=AE$ 即可得证；

②由△GAB≌△CAE 得出∠ABG＝∠AEC，进而根据垂美四边形的性质、勾股定理、结合（2）的结论计算．

【解答】解：概念理解：四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．理由如下：

∵AB＝AD，

∴点 A 在线段 BD 的垂直平分线上，

∵CB＝CD，

∴点 C 在线段 BD 的垂直平分线上，

∴直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线，

∴AC⊥BD，即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形；

性质探究：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．理由如下：

如图 1，已知四边形 $ABCD$ 中，AC⊥BD，垂足为 E，

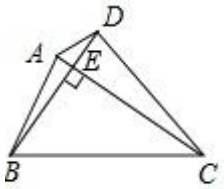


图 1

∵AC⊥BD，

∴∠AED＝∠AEB＝∠BEC＝∠CED＝90°，

由勾股定理得，$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$，

$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

问题解决：①连接 CG，BE，如图 2 所示：

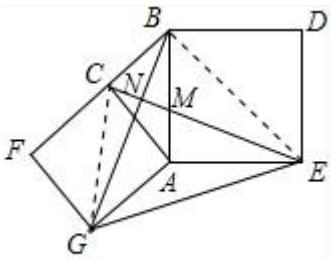


图 2

∵∠CAG＝∠BAE＝90°，

∴∠CAG+∠BAC＝∠BAE+∠BAC，即∠GAB＝∠CAE，

在△AGB 和△ACE 中，

∵$\begin{cases} AG = AC \\ \angle GAB = \angle CAE \\ AB = AE \end{cases}$，

∴△AGB≌△ACE（SAS）；

②∵△AGB≌△ACE，

∴∠ABG＝∠AEC，

又∠AEC+∠AME＝90°，

∴∠ABG+∠AME＝90°，即 CE⊥BG，

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）得，$CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵AC＝2，AB＝5，

∴$BC=\sqrt{21}$，$CG=2\sqrt{2}$，$BE=5\sqrt{2}$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=37$，

∴$GE=\sqrt{37}$；

故答案为：$\sqrt{37}$．

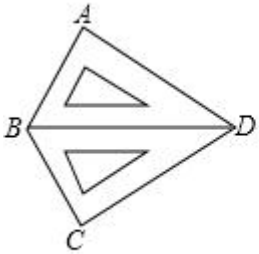
【点评】此题是四边形综合题，主要考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用，正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键．

14．（2022 春•建平县期末）[定义]有一组对角是直角的四边形是垂美四边形．

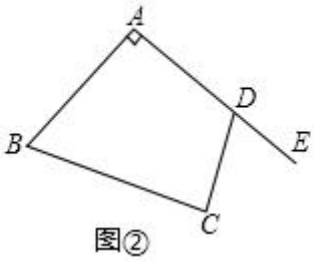
[理解]如图①，将一对相同的直角三角尺按如图所示的方式拼成四边形 $ABCD$，每个三角尺三个内角的度数都是 30°、60°和 90°．四边形 $ABCD$ 是 __垂美__ 四边形，∠ABC+∠ADC＝__180__度；

[探究]如图②，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形．∠A＝90°．∠B＝80°，E 是边 AD 延长线上一点，求∠C 和∠CDE 的度数．

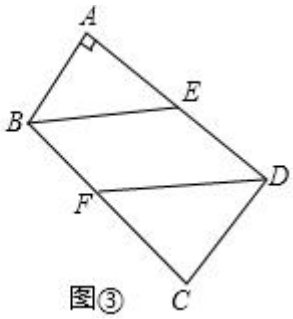
[应用]如图③，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，∠A＝90°，BE 和 DF 分别是∠ABC 和∠ADC 的平分线，交 AD、BC 于点 E、F．试说明 BE∥DF．



图①



图②



图③

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题.

【分析】[理解]根据垂美四边形的定义即可解决问题；

[探究]根据垂美四边形的定义，四边形内角和定理即可解决问题；

[应用]利用等角的余角相等，证明$\angle AEB=\angle ADF$即可解决问题；

【解答】解：[理解]如图①中，$\because \angle A=\angle C=90^\circ$，

$\therefore$四边形$ABCD$是垂美四边形，

$\therefore \angle ABC+\angle ADC=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$

故答案为垂美，180；

[探究]如图②中，$\because$四边形$ABCD$是垂美四边形，

$\therefore \angle A=\angle C=90^\circ$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle ADC=360^\circ$，且$\angle B=80^\circ$，

$\therefore \angle ADC=360^\circ-90^\circ-90^\circ-80^\circ=100^\circ$，

$\because \angle ADC+\angle CDE=180^\circ$，

$\therefore \angle CDE=80^\circ$，

[应用]如图③中，由探究可知，$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，

$\because BE$和DF分别是$\angle ABC$和$\angle ADC$的平分线，

$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$，

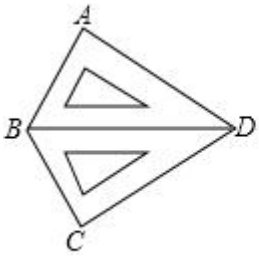
$\therefore \angle ABE+\angle ADF=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ADC)=90^\circ$，

$\because \angle A=90^\circ$，

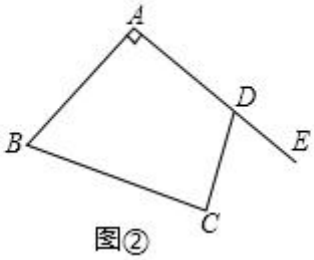
$\therefore \angle ABE+\angle AEB=90^\circ$，

∴∠AEB＝∠ADF，

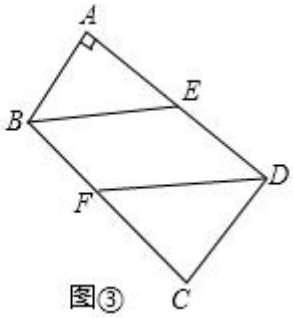
∴BE∥DF.



图①



图②



图③

【点评】本题考查四边形综合题、四边形内角和定理、垂美四边形的定义，角平分线的定义，平行线的判定等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

15.（2021•新北区一模）如图 1，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.

（1）概念理解：我们已经学习了平行四边形、菱形、矩形、正方形，在这四种图形中是垂美四边形的是 <u>菱形，正方形</u> .

（2）性质探究：如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，试探究其两组对边 AB，CD 与 BC，AD 之间的数量关系，并写出证明过程.

（3）问题解决：如图 3，分别以 Rt△ACB 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE，BG，GE，CE 交 AB 于点 M，已知 AC＝4，AB＝5，求 GE 的长.

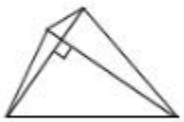


图1

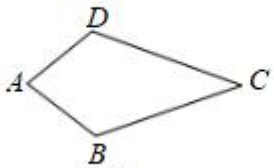


图2

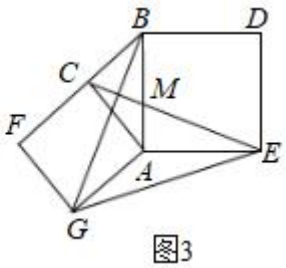


图3

【考点】四边形综合题.

【专题】图形的全等；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；推理能力.

【分析】（1）根据垂美四边形的定义即可判断；

（2）结论：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$．利用勾股定理即可证明；

（3）连接 CG、BE，只要证明四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，利用（2）中结论即可解决问题.

【解答】解：（1）∵菱形、正方形的对角线垂直，

∴菱形、正方形都是垂美四边形，

故答案为：菱形，正方形；

（2）猜想：$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

理由如下：连接 AC，BD 交于点 O，

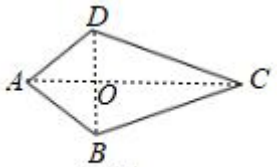


图2

∵四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，

∴$AC\perp BD$，

∴$\angle AOD=\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=90^\circ$，

由勾股定理，得 $AD^2+BC^2=AO^2+DO^2+BO^2+CO^2$，

$AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$，

∴$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

（3）连接 CG，BE，

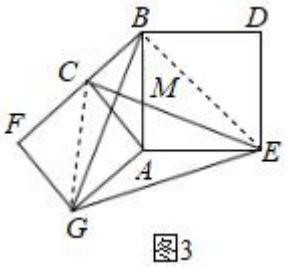


图3

∵$\angle CAG=\angle BAE=90^\circ$，

∴$\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$，即$\angle GAB=\angle CAE$，

在△GAB 和△CAE 中，$AG=AC$，$\angle GAB=\angle CAE$，$AB=AE$，

∴△GAB≌△CAE（SAS），

∴$\angle ABG=\angle AEC$，

又∵$\angle AEC+\angle AME=90^\circ$，

∴$\angle ABG+\angle AME=90^\circ$，

又∵$\angle BMC=\angle AME$，

∴$\angle ABG+\angle BMC=90^\circ$，

∴$CE\perp BG$.

∴四边形 $CGEB$ 是垂美四边形，

由（2）可知 $CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$，

∵$AC=4$，$AB=5$，

∴由勾股定理，得 $CB^2=9$，$CG^2=32$，$BE^2=50$，

∴$GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$，

∴$GE=\sqrt{73}$.

【点评】本题考查四边形综合题、正方形的性质、勾股定理、垂美四边形的定义等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

考点卡片

1．全等三角形的判定与性质

（1）全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具．在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件．

（2）在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形．

2．勾股定理

（1）勾股定理：在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方．

如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．

（2）勾股定理应用的前提条件是在直角三角形中．

（3）勾股定理公式 $a^2+b^2=c^2$ 的变形有：$a=\sqrt{c^2-b^2}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}$及 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．

（4）由于 $a^2+b^2=c^2>a^2$，所以 $c>a$，同理 $c>b$，即直角三角形的斜边大于该直角三角形中的每一条直角边．

3．等腰直角三角形

（1）两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形．

（2）等腰直角三角形是一种特殊的三角形，具有所有三角形的性质，还具备等腰三角形和直角三角形的所有性质．即：两个锐角都是 45°，斜边上中线、角平分线、斜边上的高，三线合一，等腰直角三角形斜边上的高为外接圆的半径 R，而高又为内切圆的直径（因为等腰直角三角形的两个小角均为 45°，高又垂直于斜边，所以两个小三角形均为等腰直角三角形，则两腰相等）；

（3）若设等腰直角三角形内切圆的半径 $r=1$，则外接圆的半径 $R=\sqrt{2}+1$，所以 r：$R=1$：$\sqrt{2}+1$．

4．四边形综合题

四边形综合题．