2023年中考数学复习探究性试题汇编之因式分解

一．解答题（共15小题）

1．（2022秋•上海期末）阅读材料：

在代数式中，将一个多项式添上某些项，使添项后的多项式中的一部分成为一个完全平方式，这种方法叫做配方法．如果我们能将多项式通过配方，使其成为A^2-B^2的形式，那么继续利用平方差公式就能把这个多项式因式分解．例如，分解因式：x^4+4．

解：原式$=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

即原式$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

请按照阅读材料提供的方法，解决下列问题．

分解因式：（1）$4x^4+1$；

（2）x^4+x^2+1．

2．（2022秋•鼓楼区校级期末）阅读：在分式中，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”，例如：$\frac{x-1}{x+1}$，$\frac{x^2}{x+2}$这样的分式就是假分式；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”，例如：$\frac{1}{x+1}$，$-\frac{2x}{x^2-1}$这样的分式就是真分式，我们知道，假分数可以化为带分数，例如：$\frac{8}{3}=\frac{3\times2+2}{3}=3\frac{2}{3}$．类似地，假分式也可以化为“带分式”，即整式与真分式的和的形式，例如：$\frac{x^2+2x-1}{x+2}=\frac{x(x+2)-1}{x+2}=x-\frac{1}{x+2}$；$\frac{x^2}{x+2}=\frac{(x^2+2x)-2x}{x+2}=\frac{x(x+2)-2x-4+4}{x+2}=\frac{x(x+2)-2(x+2)+4}{x+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$．

请根据上述材料，解答下列问题：

（1）填空：①分式$\frac{2}{x+2}$是 ________分式（填“真”或“假”）．

②把下列假分式化成一个整式与一个真分式的和（差）的形式：$\frac{x^2-3x+5}{x-3}=$ +________．

（2）把分式$\frac{x^2+2x-13}{x-3}$化成一个整式与一个真分式的和（差）的形式，并求x取何整数时，这个分式的值为整数．

（3）一个三位数m，个位数字是百位数字的两倍．另一个两位数n，十位数字与m的百位数字相同，个位数字与m的十位数字相同．若这个三位数的平方能被这个两位数整除，求满足条件的两位数n．

3．（2022秋•万州区期末）阅读下列材料，解答问题：

若一个自然数能被13整除，则称这个自然数为“一生数”．若一个四位自然数，百位数字为1，个位数字为4，则称这个四位数为“一世数”．若一个四位自然数既是“一生数”，又是“一世数”，则称这个数为“一生一世数”．

例如：因为4134÷13＝318，318为整数，所以4134是“一生数”；因为4134是四位数，且百位数字为1，个位数字为4，所以4134为“一世数”；因为4134既是“一生数”，又是“一世数”，所以4134为“一生一世数”．

（1）求证：任意一个“一世数”加上千位数字与十位数字3倍的和一定是“一生数”；

（2）若一个四位自然数m是“一生一世数”，记$F(m)=\frac{m}{13}$，求F（m）的最大值与最小值之差．

4．（2022秋•新余期末）我们已经学过将一个多项式分解因式的方法有提公因式法和公式法，其实分解因式方法还有分组分解法、拆项法等等．

（1）分组分解法：将一个多项式适当分组后，可提公因式或运用公式继续分解的方法．请阅读以下例题：

例1．$ax+by+bx+ay$＝（$ax+bx$）+（$ay+by$）＝x（$a+b$）+y（$a+b$）＝（$a+b$）（$x+y$）

例2.$2xy+y^2-1+x^2$＝$x^2+2xy+y^2-1$＝（$x+y$）$^2-1$＝（$x+y+1$）（$x+y-1$）

（2）拆项法：将一个多项式的某一项拆成两项后，可提公因式或运用公式继续分解的方法．请阅读以下例题：

例1．x^2+2x-3＝$x^2+2x+1-4$＝（$x+1$）$^2-2^2$＝（$x+1+2$）（$x+1-2$）＝（$x+3$）（$x-1$）

请你仿照以上例题的方法，解决下列问题：

（1）分解因式：①x^2-n^2+x-n；②$x^2-2xy-9+y^2$

（2）分解因式：a^2+4a+3．

（3）若多项式$ax^2-9y^2+bx+3y$利用分组分解法可分解为（$2x+3y$）（$2x-3y+1$），请求出a，b的值．

5．（2022秋•江北区校级期末）若一个四位正整数$t=\overline{abcd}$，其千位数字的5倍与后三位组成的数的和得到的数称为t的“知行数”，记为K（t），“知行数”百位数字的5倍与后两位组成的数的和得到的数称为t的“合一数”，记为P（t），例如：3521的“知行数”为K（3521）＝3×5+521＝536，3521的“合一数”P（3521）＝5×5+36＝61．

（1）K（2134）＝_______；P（2134）＝_______；

（2）若一个四位数 $t=6000+100a+40+b$（其中 $0\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$，a，b 均为整数），且满足$\frac{K(t)+P(t)}{3}$能被 11 整除，求该四位数．

6．（2022 秋•大渡口区校级期末）一个四位正整数 M 满足千位上的数字与百位上的数字之和为 9，且十位上的数字与个位上的数字之和为 5，则称 M 为“九五数”，将“九五数”M 的千位上的数字与十位上的数字交换、百位上的数字与个位上的数字交换得到一个新的四位正整数 M'，则称这个数 M'为 M 的“九五新佳数”，规定$F(M)=\frac{M-M'}{99}$.

例如：四位正整数 8123，∵$8+1=9$，$2+3=5$，∴8123 是“九五数”，此时$F(M)=\frac{8123-2381}{99}=58$；

四位正整数 6315，∵$6+3=9$，但 $1+5=6\neq 5$，∴6315 不是“九五数”．

（1）判断 7214，3550 是否是“九五数”，并说明理由；如果是，求出 F（M）；

（2）若 M 是“九五数”，且满足 F（M）能被 8 整除，求出所有符合条件的 M.

7．（2022 秋•沙坪坝区期末）一个各数位数字均不为零的四位自然数 M，它的后两位数为 m，前两位数为 n，若$\frac{m}{n}$为整数，则这个数 M 为“孪生数”．

例如：$M=1296$，∵$m=96$，$n=12$，$\frac{m}{n}=\frac{96}{12}=8$，∴1296 是“孪生数”．

又如：$M=2580$，∵$m=80$，$n=25$，$\frac{m}{n}=\frac{80}{25}=3\frac{1}{5}$，∴2580 不是“孪生数”．

（1）判断 2430，2781 是否是“孪生数”，并说明理由；

（2）四位数 M 是“孪生数”，它的千位数字为 a，百位数字为 b，记$F(M)=\frac{a+b-2}{9}$，$G(M)=\frac{m+n}{7}$．当 F（M），G（M）均是整数时，求出所有满足条件的 M.

8．（2022 秋•沙坪坝区校级期末）材料一：对于一个三位正整数，若十位数字与个位数字之和减去百位数字的差为 6，则称这个三位数为“顺心数”．例如：345，因为 $4+5-3=6$，所以 345 是“顺心数”；

材料二：若 $t=\overline{abc}$（$1\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$，$0\leqslant c\leqslant 9$，且 a、b、c 均为整数），记 F（t）$=2a-c$.

（1）216 _______“顺心数”（填“是”或“不是”）；

若$\overline{a2c}$是“顺心数”，且 F（$\overline{a2c}$）$=-1$，则 c 的值为 _______；

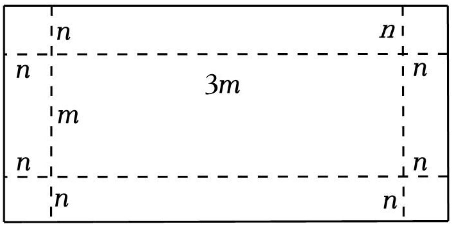
（2）已知 $t_1=\overline{xy3}$，$t_2=\overline{myn}$是两个不同的“顺心数”（$1\leqslant x\leqslant 6$，$0\leqslant n\leqslant 9$，$1\leqslant m$，$y\leqslant 9$，且 x、y、m、n 均为整数），且 $2F$（t_1）$+3F$（t_2）$-6n$ 能被 11 整除，求所有符合题意的

t_1的值．

9．（2022秋•阳泉期末）如图，将一张长方形纸板按图中虚线裁剪，制作成一个无盖的长方体盒子，其中四个小正方形的边长是 n，中间长方形的长是 $3m$，宽是 m，且 $m>n$．

（1)观察图形，通过计算长方形纸板的面积可以发现代数式 $3m^2+8mn+4n^2$ 可以因式分解，请直接写出因式分解的结果：$3m^2+8mn+4n^2=$______；

（2）若折成的无盖长方体的四个侧面的面积和是16，图中所有裁剪线（虚线部分）长之和是40，试求 m^2+n^2 和 $(m-n)^2$ 的值．



10．（2022秋•河西区期末）八年级课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：将 $2a-3ab-4+6b$ 因式分解．经过小组合作交流，得到了如下的解决方法：

解法一：原式 $=(2a-3ab)-(4-6b)$

$=a(2-3b)-2(2-3b)$

$=(2-3b)(a-2)$

解法二：原式 $=(2a-4)-(3ab-6b)$

$=2(a-2)-3b(a-2)$

$=(a-2)(2-3b)$

小明由此体会到，对项数较多的多项式无法直接进行因式分解时，我们可以将多项式分为若干组，再利用提公因式法、公式法等方法达到因式分解的目的．这种方法可以称为分组分解法．（温馨提示：因式分解一定要分解到不能再分解为止）

请你也试一试利用分组分解法进行因式分解：

（Ⅰ）因式分解：x^2-a^2+x+a；

（Ⅱ）因式分解：$ax+a^2-2ab-bx+b^2$．

11．（2022秋•日照期末）阅读理解并解答：

【方法呈现】

（1）我们把多项式 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 叫做完全平方式．在运用完全平方公式进行因式分解时，关键是判断这个多项式是不是一个完全平方式，同样地，把一个多项式进

行局部因式分解可以来解决代数式值的最小（或最大）问题．

例如：x^2+2x+3＝（x^2+2x+1）$+2$＝（$x+1$）$^2+2$，

∵（$x+1$）$^2\geqslant0$，

∴（$x+1$）$^2+2\geqslant2$．

则这个代数式 x^2+2x+3 的最小值是 ________，这时相应的 x 的值是 ________．

【尝试应用】

（2）求代数式 $-x^2+14x+10$ 的最小（或最大）值，并写出相应的 x 的值．

【拓展提高】

（3）已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$，且 c 是△ABC 中最长的边，求 c 的取值范围．

12．（2022 秋•嘉峪关期末）整体思想是数学解题中常见的一种思想方法：下面是某同学对多项式（x^2+2x）（x^2+2x+2）$+1$ 进行因式分解的过程．将“x^2+2x”看成一个整体，令 $x^2+2x=y$，则原式＝y（$y+2$）$+1=y^2+2y+1$＝（$y+1$）^{2}，再将“y”还原即可．解：设 $x^2+2x=y$．原式＝y（$y+2$）$+1=y^2+2y+1$＝（$y+1$）^{2}＝（x^2+2x+1）^{2}．

问题：

（1）该同学完成因式分解了吗？如果没完成，请你直接写出最后的结果 ________；

（2）请你模仿以上方法尝试对多项式（x^2-4x）（x^2-4x+8）$+16$ 进行因式分解．

13．（2022 秋•江北区校级期末）一个三位数 A 各个数位上的数字均不相等，若将 A 的个位上的数字移到最左边得到一个新的三位数 A_1，且 A_1 被 4 除余 1，再将 A_1 的个位上的数字移到最左边得到另一个新的三位数 A_2，且 A_2 被 4 除余 2，则称原数为 4 的“友谊数”．例如：三位数 $A=256$，则 $A_1=625$，且 $625\div4=156\cdots1$，$A_2=562$，且 $562\div4=140\cdots2$，所以 256 是 4 的“友谊数”．

（1）分别判断自然数 612 和 916 是否是“友谊数”，并请说明理由．

（2）若“友谊数”A 百位上的数字是 a，十位上的数字是 1，个位上的数字是 c，其中 $a<c$，重新排列各数位上的数字必可得到一个最大数和一个最小数，其最大数与最小数的差记为 F（A），若 $\frac{F(A)}{4}$ 为整数，求出所有符合条件的 A．

14．（2022 秋•广饶县校级期末）某校“数学社团”活动中，研究发现常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法．但还有很多的多项式只用上述方法无法分解，如：“$m^2-mn+2m-2n$”，细心观察这个式子就会发现，前两项可以提取公因式，后两项也可提取公

因式，前后两部分分别分解因式后产生了新的公因式，然后再提取公因式就可以完成整个式子的因式分解了．过程为：

$m^2-mn+2m-2n=(m^2-mn)+(2m-2n)=m(m-n)+2(m-n)=(m-n)(m+2)$．

“社团”将此种因式分解的方法叫做“分组分解法”，请在这种方法的启发下，解决以下问题：

（1）分解因式：$a^3-3a^2-6a+18$；

（2）分解因式：$x^2+y^2-2xy-9$；

（3）已知：$m+n=5$，$m-n=1$．求：$m^2-n^2-2n+2m$ 的值；

（4）$\triangle ABC$ 的三边 a，b，c 满足 $a^2+ab+c^2-bc=2ac$，判断$\triangle ABC$ 的形状并说明理由．

15．（2022秋•余庆县期末）阅读下面的材料：

常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法等，但有的多项式只用上述方法无法分解．如 $x^2-4y^2-2x+4y$，细心观察这个式子，会发现前两项符合平方差公式，后两项可提取公因式，前、后两部分分别因式分解后又出现新的公因式，提取公因式就可以完成整个式子的分解因式，具体过程如下：

$x^2-4y^2-2x+4y$

$=(x^2-4y^2)-(2x-4y)$

$=(x+2y)(x-2y)-2(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y-2)$

像这种将一个多项式适当分组后，进行分解因式的方法叫做分组分解法．

利用分组分解法解决下面的问题：

（1）分解因式：$a^2-b^2+4a-4b$；

（2）已知等腰三角形的三边 a、b、c 均为整数，且 $a+bc+b+ca=12$，则满足该条件的等腰三角形共有 ______个，请说明理由．

2023年中考数学复习探究性试题汇编之因式分解

参考答案与试题解析

一．解答题（共15小题）

1．（2022秋•上海期末）阅读材料：

在代数式中，将一个多项式添上某些项，使添项后的多项式中的一部分成为一个完全平方式，这种方法叫做配方法．如果我们能将多项式通过配方，使其成为A^2-B^2的形式，那么继续利用平方差公式就能把这个多项式因式分解．例如，分解因式：x^4+4．

解：原式$=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

即原式$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

请按照阅读材料提供的方法，解决下列问题．

分解因式：（1）$4x^4+1$；

（2）x^4+x^2+1．

【考点】因式分解－十字相乘法等；因式分解－运用公式法．

【专题】计算题；整式；运算能力．

【分析】仿照题例：（1）加上$4x^2$再减去$4x^2$，先利用完全平方公式再利用平方差公式；

（2）加上x^2再减去x^2，先利用完全平方公式再利用平方差公式．

【解答】解：（1）$4x^4+1$

$=4x^4+4x^2+1-4x^2$

$=(2x^2+1)^2-4x^2$

$=(2x^2+1+2x)(2x^2+1-2x)$；

（2）x^4+x^2+1

$=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$．

【点评】本题考查了整式的因式分解，理解题例，掌握完全平方公式和平方差公式是解决本题的关键．

2．（2022秋•鼓楼区校级期末）阅读：在分式中，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”，例如：$\frac{x-1}{x+1}$，$\frac{x^2}{x+2}$这样的分式就是假分式；当分子的次数小于分

母的次数时，我们称之为“真分式”，例如：$\frac{1}{x+1}$，$-\frac{2x}{x^2-1}$这样的分式就是真分式，我们知道，假分数可以化为带分数，例如：$\frac{8}{3}=\frac{3\times2+2}{3}=3\frac{2}{3}$．类似地，假分式也可以化为“带分式”，即整式与真分式的和的形式，例如：$\frac{x^2+2x-1}{x+2}=\frac{x(x+2)-1}{x+2}=x-\frac{1}{x+2}$；$\frac{x^2}{x+2}=\frac{(x^2+2x)-2x}{x+2}=\frac{x(x+2)-2x-4+4}{x+2}=\frac{x(x+2)-2(x+2)+4}{x+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$.

请根据上述材料，解答下列问题：

（1）填空：①分式$\frac{2}{x+2}$是 ＿真＿分式（填“真”或“假”）.

②把下列假分式化成一个整式与一个真分式的和（差）的形式：$\frac{x^2-3x+5}{x-3}=$＿x＿+$\frac{5}{x-3}$＿.

（2）把分式$\frac{x^2+2x-13}{x-3}$化成一个整式与一个真分式的和（差）的形式，并求 x 取何整数时，这个分式的值为整数.

（3）一个三位数 m，个位数字是百位数字的两倍．另一个两位数 n，十位数字与 m 的百位数字相同，个位数字与 m 的十位数字相同．若这个三位数的平方能被这个两位数整除，求满足条件的两位数 n.

【考点】分式的加减法；分式的定义.

【专题】分式；运算能力.

【分析】（1）①根据“真分式”的定义即可判断；

②根据材料所给的方法进行变形即可解答；

（2）根据材料所给的方法进行变形，再根据变形的式子即可确定 x 的取值；

（3）设 m 的百位数字为 a，十位数字为 b，则 m 的个位数字为 $2a$，n 的十位数字为 a，个位数字为 b，则 $m=100a+10b+2a$，$n=10a+b$，以此得到$\frac{m^2}{n}=\frac{(100a+10b+2a)^2}{10a+b}$，整理得$\frac{m^2}{n}$=100（$10a+b$）+$40a$+$\frac{4a^2}{10a+b}$，进而得到$\frac{4a^2}{10a+b}$为整数，再结合 a，b 的取值范围即可求解.

【解答】解：（1）①∵$\frac{2}{x+2}$分子的次数小于分母的次数，

∴分式$\frac{2}{x+2}$是真分式；

故答案为：真；

②：$\frac{x^2-3x+5}{x-3}$

$=\frac{x(x-3)+5}{x-3}$

$=x+\frac{5}{x-3}$，

故答案为：x，$\frac{5}{x-3}$；

（2）$\frac{x^2+2x-13}{x-3}$

$=\frac{x^2-3x+5x-13}{x-3}$

$=\frac{x(x-3)+5(x-3)+2}{x-3}$

$=x+5+\frac{2}{x-3}$，

∵x为整数，要使这个分式的值为整数，即2能被$x-3$整除，

∴$x=1$或2或4或5；

（3）设m的百位数字为a，十位数字为b，则m的个位数字为$2a$，n的十位数字为a，个位数字为b，

∴$m=100a+10b+2a$，$n=10a+b$，

∴$\frac{m^2}{n}=\frac{(100a+10b+2a)^2}{10a+b}$

$=\frac{[10(10a+b)+2a]^2}{10a+b}$

$=\frac{[10(10a+b)]^2+2[10(10a+b)\cdot 2a]+4a^2}{10a+b}$

$=\frac{100(10a+b)^2+40a(10a+b)+4a^2}{10a+b}$

$=100(10a+b)+40a+\frac{4a^2}{10a+b}$，

由题意可得，$0<a<5$，$0\leqslant b\leqslant 9$，且a，b均为整数，

∵这个三位数的平方能被这个两位数整除，

∴$100(10a+b)+40a+\frac{4a^2}{10a+b}$为整数，即$\frac{4a^2}{10a+b}$为整数，

当$a=1$时，$\frac{4a^2}{10a+b}=\frac{4}{10+b}$，没有满足题意的$b$值，

当$a=2$时，$\frac{4a^2}{10a+b}=\frac{16}{20+b}$，没有满足题意的$b$值，

当 a＝3 时，$\frac{4a^2}{10a+b}=\frac{36}{30+b}$，$b$＝6，

当 a＝4 时，$\frac{4a^2}{10a+b}=\frac{64}{40+b}$，没有满足题意的 b 值，

综上，满足条件的两位数 n 为 36．

【点评】本题主要考查分式的混合运算、因式分解的应用，理解题意熟练掌握运算法则是解题关键．

3．（2022 秋•万州区期末）阅读下列材料，解答问题：

若一个自然数能被 13 整除，则称这个自然数为“一生数”．若一个四位自然数，百位数字为 1，个位数字为 4，则称这个四位数为“一世数”．若一个四位自然数既是“一生数”，又是“一世数”，则称这个数为“一生一世数”．

例如：因为 4134÷13＝318，318 为整数，所以 4134 是“一生数”；因为 4134 是四位数，且百位数字为 1，个位数字为 4，所以 4134 为“一世数”；因为 4134 既是“一生数”，又是“一世数”，所以 4134 为“一生一世数”．

（1）求证：任意一个“一世数”加上千位数字与十位数字 3 倍的和一定是“一生数”；

（2）若一个四位自然数 m 是“一生一世数”，记$F(m)=\frac{m}{13}$，求 F（m）的最大值与最小值之差．

【考点】因式分解的应用．

【专题】新定义；运算能力；应用意识．

【分析】（1）设任意一个“一世数”为$\overline{a1b4}$，根据任意一个“一世数”加上千位数字与十位数字 3 倍的和列出代数式得$\overline{a1b4}$ +a+3b＝13（77a+b+8），以此即可证明；

【解答】（1）证明：设任意一个“一世数”为$\overline{a1b4}$，

∴$\overline{a1b4}$ +a+3b

＝1000a+100+10b+4+a+3b

＝1001a+104+13b

＝13（77a+b+8），

∵a，b 为整数，

∴77a+b+8 为整数，

∴任意一个“一世数”加上千位数字与十位数字 3 倍的和一定是“一生数”；

（2）解：设 m= $\overline{x1y4}$，

∴$F(m)=\frac{\overline{x1y4}}{13}=\frac{1000x+100+10y+4}{13}=\frac{1000x+10y+104}{13}=77x+y+8-\frac{x+3y}{13}$，

∵m 是“一生一世数”，

∴$x+3y$ 能被 13 整除，

∵$1\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y\leqslant 9$，x，y 为整数，

∴$x+3y=13$ 或 $x+3y=26$，

∴$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$或$\begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$或$\begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}$，

∴$m=1144$，4134，7124，2184，5174，8164，

∴$F(m)$ 的最大值为$\frac{8164}{13}=628$，

$F(m)$ 的最小值为$\frac{1144}{13}=88$，

∴$F(m)$ 的最大值与最小值之差为 $628-88=540$.

【点评】本题主要考查二元一次方程的应用，整式的加减、分式因解的应用，理解新定义，掌握数的整除是解题关键.

4.（2022 秋•新余期末）我们已经学过将一个多项式分解因式的方法有提公因式法和公式法，其实分解因式方法还有分组分解法、拆项法等等.

（1）分组分解法：将一个多项式适当分组后，可提公因式或运用公式继续分解的方法. 请阅读以下例题：

例 1．$ax+by+bx+ay=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

例 2.$2xy+y^2-1+x^2=x^2+2xy+y^2-1=(x+y)^2-1=(x+y+1)(x+y-1)$

（2）拆项法：将一个多项式的某一项拆成两项后，可提公因式或运用公式继续分解的方法．请阅读以下例题：

例 1．$x^2+2x-3=x^2+2x+1-4=(x+1)^2-2^2=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$

请你仿照以上例题的方法，解决下列问题：

（1）分解因式：①x^2-n^2+x-n；②$x^2-2xy-9+y^2$

（2）分解因式：a^2+4a+3.

（3）若多项式 $ax^2-9y^2+bx+3y$ 利用分组分解法可分解为 $(2x+3y)(2x-3y+1)$，请求出 a，b 的值.

【考点】因式分解－十字相乘法等；因式分解－提公因式法；因式分解－运用公式法；因式分解－分组分解法.

【专题】计算题；整式；应用意识．

【分析】（1）①前两项与后两项分别结合，利用分组分解法；

②前三项结合利用完全平方公式，再利用平方差公式；

（2）把常数项 3 写成 4 与﹣1 的和或者把 $4a$ 写成 $3a$ 与 a 的和的形式，再利用拆项法分解；

（3）利用乘法法则先计算（$2x+3y$）（$2x-3y+1$），再根据因式分解与积的关系得结论．

【解答】解：（1）①原式＝（x^2-n^2）＋（$x-n$）

＝（$x+n$）（$x-n$）＋（$x-n$）

＝（$x-n$）（$x+n+1$）；

②原式＝（$x^2-2xy+y^2$）﹣9

＝$(x-y)^2-9$

＝（$x-y+3$）（$x-y-3$）；

（2）法一、原式＝$a^2+4a+4-1$

＝（a^2-1）＋（$4a+4$）

＝（$a+1$）（$a-1$）+4（$a+1$）

＝（$a+1$）（$a-1+4$）

＝（$a+1$）（$a+3$）；

法二、原式＝$a^2+4a+4-1$

＝$(a+2)^2-1$

＝（$a+2+1$）（$a+2-1$）

＝（$a+3$）（$a+1$）；

法三、原式＝$a^2+a+3a+3$

＝（a^2+a）＋（$3a+3$）

＝a（$a+1$）+3（$a+1$）

＝（$a+1$）（$a+3$）；

（3）∵（$2x+3y$）（$2x-3y+1$）

＝（$2x+3y$）（$2x-3y$）＋（$2x+3y$）

＝$4x^2-9y^2+2x+3y$，

又∵$ax^2-9y^2+bx+3y$＝（$2x+3y$）（$2x-3y+1$），

$\therefore ax^2-9y^2+bx+3y=4x^2-9y^2+2x+3y$.

$\therefore ax^2+bx=4x^2+2x$.

$\therefore a=4$，$b=2$.

【点评】本题主要考查了整式的因式分解，读懂题例会应用题例，掌握因式分解的提公因式法和公式法是解决本题的关键.

5.（2022秋•江北区校级期末）若一个四位正整数$t=\overline{abcd}$，其千位数字的5倍与后三位组成的数的和得到的数称为t的“知行数”，记为K（t），“知行数”百位数字的5倍与后两位组成的数的和得到的数称为t的“合一数”，记为P（t），例如：3521的“知行数”为K（3521）$=3\times5+521=536$，3521的“合一数”P（3521）$=5\times5+36=61$.

（1）K（2134）＝__144__；P（2134）＝__149__；

（2）若一个四位数$t=6000+100a+40+b$（其中$0\leqslant a\leqslant9$，$0\leqslant b\leqslant9$，a，b均为整数），且满足$\frac{K(t)+P(t)}{3}$能被11整除，求该四位数.

【考点】整式的加减.

【专题】新定义；运算能力；应用意识.

【分析】（1）根据“知行数”和“合一数”的定义即可求解；

（2）根据题意可表示出K（$t=100a+70+b$,）和P（t）$=105a+140+2b$，则K（t）$+P$（t）$=105a+140+2b$，根据$\frac{K(t)+P(t)}{3}$能被11整除可得$K(t)+P(t)$能被33整除，即$105a+140+2b=(99a+132)+(6a+2b+8)$能被33整除，则$6a+2b+8$能被33整除，再根据$a$，$b$的取值范围进行取值，以此即可解答.

【解答】解：（1）K（2134）$=2\times5+134=144$，

P（2134）$=1\times5+44=49$；

故答案为：144，49；

（2）由题意得，K（t）$=6\times5+100a+40+b=100a+70+b$，

P（t）$=a\times5+70+b=5a+70+b$，

$\therefore K$（t）$+P$（t）$=100a+70+b+5a+70+b=105a+140+2b$，

$\because \frac{K(t)+P(t)}{3}$能被11整除，

$\therefore K$（t）$+P$（t）能被33整除，即$105a+140+2b$能被33整除，

$\because 105a+140+2b=(99a+132)+(6a+2b+8)$，

∴$6a+2b+8$能被33整除，

∵$0\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$，a，b均为整数，

∴$8\leqslant 6a+2b+8\leqslant 80$，

∴$6a+2b+8=33$或$6a+2b+8=66$，

①当$6a+2b+8=33$时，此时不存在符合题意的a，b，

②$6a+2b+8=66$时，$a=7$，$b=8$或$a=8$，$b=5$或$a=9$，$b=2$，

综上，该四位数为6748或6845或6942．

【点评】本题主要考查因式分解的应用、整式的加减，理解新定义并熟练掌握整式的混合运算法则是解题关键．

6．（2022秋•大渡口区校级期末）一个四位正整数M满足千位上的数字与百位上的数字之和为9，且十位上的数字与个位上的数字之和为5，则称M为“九五数”，将“九五数”M的千位上的数字与十位上的数字交换、百位上的数字与个位上的数字交换得到一个新的四位正整数M'，则称这个数M'为M的“九五新佳数”，规定$F(M)=\frac{M-M'}{99}$.

例如：四位正整数8123，∵$8+1=9$，$2+3=5$，∴8123是“九五数”，此时$F(M)=\frac{8123-2381}{99}=58$；

四位正整数6315，∵$6+3=9$，但$1+5=6\neq 5$，∴6315不是“九五数”．

（1）判断7214，3550是否是“九五数”，并说明理由；如果是，求出F（M）；

（2）若M是“九五数”，且满足F（M）能被8整除，求出所有符合条件的M．

【考点】因式分解的应用；整式的加减．

【专题】整式；运算能力；应用意识．

【分析】（1）根据“九五数”的定义判断即可，再根据$F(M)=\frac{M-M'}{99}$列出算式即可求解；

（2）设四位正整数M的千位数字为a，十位数字为b，则其百位数字为（$9-a$），个位数字为（$5-b$），以此可表示出M和M'，再算出F（M）$=9$（$a-b$）$+4$，根据题意可得F（M）能被8整除，$1\leqslant a\leqslant 9$，$1\leqslant b\leqslant 5$，且a，b为整数，则$a-b=4$，找出符合条件的a，b的值，即可求解．

【解答】解：（1）7214是“九五数”，3550不是“九五数”，理由如下：

∵$7+2=9$，$1+4=5$，

∴7214是“九五数”，

此时 F（7214）$=\frac{7214-1472}{99}$=58，

∵3+5=8≠9，

∴3550 不是“九五数”；

（2）设四位正整数 M 的千位数字为 a，十位数字为 b，则其百位数字为（9﹣a），个位数字为（5﹣b），

∴M=1000a+100（9﹣a）+10b+（5﹣b）=900a+9b+905，

M' =1000b+100（5﹣b）+10a+（9﹣a）=900b+9a+509，

∴$F(M)=\frac{M-M'}{99}=\frac{900a+9b+905-(900b-9a+509)}{99}$=9（$a$﹣$b$）+4，

∵F（M）能被 8 整除，1≤a≤9，1≤b≤5，且 a，b 为整数，

∴a﹣b=4，

∴$\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}$，$\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$，$\begin{cases}a=7\\b=3\end{cases}$，$\begin{cases}a=8\\b=4\end{cases}$，$\begin{cases}a=9\\b=5\end{cases}$，

综上，所有符合条件的 M 为 5414，6323，7232，8141，9050．

【点评】本题主要考查整式的加减、因式分解的应用，解题关键是理解新定义，熟练掌握整式的混合运算法则．

7.（2022 秋•沙坪坝区期末）一个各数位数字均不为零的四位自然数 M，它的后两位数为 m，前两位数为 n，若$\frac{m}{n}$为整数，则这个数 M 为“孪生数”．

例如：M=1296，∵m=96，n=12，$\frac{m}{n}=\frac{96}{12}=8$，∴1296 是“孪生数”．

又如：M=2580，∵m=80，n=25，$\frac{m}{n}=\frac{80}{25}=3\frac{1}{5}$，∴2580 不是“孪生数”．

（1）判断 2430，2781 是否是“孪生数”，并说明理由；

（2）四位数 M 是“孪生数”，它的千位数字为 a，百位数字为 b，记$F(M)=\frac{a+b-2}{9}$，$G(M)=\frac{m+n}{7}$．当 F（M），G（M）均是整数时，求出所有满足条件的 M．

【考点】因式分解的应用；列代数式．

【专题】新定义；运算能力；应用意识．

【分析】（1）根据“孪生数”的定义即可判断；

（2）根据题意可得 n=10a+b，1≤a≤9，0≤b≤9，再由$F(M)=\frac{a+b-2}{9}$为整数可以确定 n 的所有可能取值，再根据$G(M)=\frac{m+n}{7}$为整数可得 n 为 7 的倍数，以此得到 n 和 m 的值，

即可求解．

【解答】解：（1）M＝2430，

∵m＝30，n＝24，

∴$\frac{m}{n}=\frac{30}{24}=1\frac{1}{4}$，

∴2430不是“孪生数”，

M＝2781，

∵m＝81，n＝21，

∴$\frac{m}{n}=\frac{81}{27}=3$，

∴2781是“孪生数”；

（2）∵四位数M是“孪生数”，它的千位数字为a，百位数字为b，

∴n＝10a+b，

∵1≤a≤9，0≤b≤9，且$F(M)=\frac{a+b-2}{9}$为整数，

∴$\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}$，$\begin{cases}a=3\\b=8\end{cases}$，$\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$，$\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}$，$\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$，$\begin{cases}a=7\\b=4\end{cases}$，$\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}$，$\begin{cases}a=9\\b=2\end{cases}$，

∴n可能为29，38，47，56，65，74，83，92，

∵m为n的整数倍，且$G(M)=\frac{m+n}{7}$为整数，

∴n要为7的倍数，

∴n只能为56，

∵m为四位数M的后两位数，且m为n的整数倍，

∴m＝56，

∴满足条件的M为5656．

【点评】本题以新定义为背景考查了因式分解的应用，考查学生应用知识的能力，解题关键是要理解新定义，根据条件找出满足条件的“孪生数”．

8．（2022秋•沙坪坝区校级期末）材料一：对于一个三位正整数，若十位数字与个位数字之和减去百位数字的差为6，则称这个三位数为“顺心数”．例如：345，因为4+5﹣3＝6，所以345是“顺心数”；

材料二：若$t=\overline{abc}$（1≤a≤9，0≤b≤9，0≤c≤9，且a、b、c均为整数），记F（t）＝2a﹣c．

（1）216 __不是__ “顺心数”（填“是”或“不是”）；

若$\overline{a2c}$是“顺心数”，且 F（$\overline{a2c}$）＝－1，则 c 的值为 <u> 7 </u>；

（2）已知 $t_1=\overline{xy3}$，$t_2=\overline{myn}$是两个不同的“顺心数”（1≤x≤6，0≤n≤9，1≤m，y≤9，且 x、y、m、n 均为整数），且 $2F$（t_1）+$3F$（t_2）－$6n$ 能被 11 整除，求所有符合题意的 t_1 的值．

【考点】因式分解的应用．

【专题】整式；运算能力；推理能力．

【分析】（1）根据阅读材料直接求解即可；

（2）根据题意可到 6－m－2n 能被 11 整除，再由 m、n 的取值范围，确定 x 的值即可．

【解答】解：（1）∵1+6－2＝5，

∴216 不是“顺心数”；

∵$\overline{a2c}$是“顺心数”，

∴2+c－a＝6，

∴c－a＝4，

∵F（$\overline{a2c}$）＝－1，

∴2a－c＝－1，

∴a＝3，c＝7，

故答案为：不是，7；

（2）∵$t_1=\overline{xy3}$，$t_2=\overline{myn}$，

∴F（t_1）＝2x－3，F（t_2）＝2m－n，

∴$2F$（t_1）+$3F$（t_2）－$6n$＝4x－6+6m－3n－6n＝4x－6+6m－9n，

∵$t_1=\overline{xy3}$，$t_2=\overline{myn}$是两个不同的“顺心数”，

∴y+3－x＝6，y+n－m＝6，

∴x＝m－n+3，

∴$2F$（t_1）+$3F$（t_2）－$6n$＝6+10m－13n＝－11n+11m－m+6－2n，

∵$2F$（t_1）+$3F$（t_2）－$6n$ 能被 11 整除，

∴6－m－2n 能被 11 整除，

∵0≤n≤9，1≤m，

∴m＝1，n＝8 或 m＝3，n＝7 或 m＝5，n＝6 或 m＝7，n＝5 或 m＝9，n＝4 或 m＝6，n＝0 或 m＝4，n＝1 或 m＝2，n＝2，

∵$1\leqslant x\leqslant 6$，

∴$m=5$，$n=6$ 或 $m=7$，$n=5$ 或 $m=4$，$n=1$ 或 $m=2$，$n=2$，

∴$x=2$ 或 $x=5$ 或 $x=6$ 或 $x=3$，

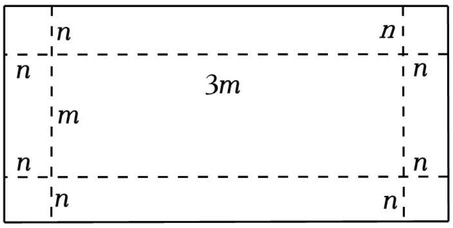
∴t_1 的值为 253 或 583 或 693 或 363．

【点评】本题考查因式分解的应用，熟练掌握整式的运算性质，弄清阅读材料，分类讨论是解题的关键．

9．（2022 秋•阳泉期末）如图，将一张长方形纸板按图中虚线裁剪，制作成一个无盖的长方体盒子，其中四个小正方形的边长是 n，中间长方形的长是 $3m$，宽是 m，且 $m>n$．

（1）观察图形，通过计算长方形纸板的面积可以发现代数式 $3m^2+8mn+4n^2$ 可以因式分解，请直接写出因式分解的结果：$3m^2+8mn+4n^2=$__（$3m+2n$）（$m+2n$）__；

（2）若折成的无盖长方体的四个侧面的面积和是 16，图中所有裁剪线（虚线部分）长之和是 40，试求 m^2+n^2 和（$m-n$）^{2} 的值．



【考点】因式分解的应用；展开图折叠成几何体；因式分解的意义．

【专题】因式分解；运算能力．

【分析】（1）根据图中的面积关系，图中各部分面积之和等于大长方形的面积，以此即可求解；

（2）根据无盖长方体的四个侧面的面积和是 16 可得 $mn=2$，

【解答】解：（1）观察图形，发现代数式：

$3m^2+8mn+4n^2=$（$3m+2n$）（$m+2n$）；

故答案为：（$3m+2n$）（$m+2n$）；

（2）∵无盖长方体的四个侧面的面积和是 16，

∴2（$3mn+mn$）$=16$，即 $mn=2$，

∵图中所有裁剪线（虚线部分）长之和是 40，

∴2（$m+2n$）+2（$3m+2n$）$=8m+8n=8$（$m+n$）$=40$，

即 $m+n=5$，

$\because (m+n)^2=m^2+2mn+n^2$，

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=5^2-2\times2=21$，

$(m-n)^2=m^2+n^2-2mn=21-2\times2=17$.

【点评】本题主要考查因式分解在几何图形中的应用，数形结合，并熟练掌握相关运算法则是解题关键.

10.（2022 秋•河西区期末）八年级课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：将 $2a-3ab-4+6b$ 因式分解．经过小组合作交流，得到了如下的解决方法：

解法一：原式 $=(2a-3ab)-(4-6b)$

$=a(2-3b)-2(2-3b)$

$=(2-3b)(a-2)$

解法二：原式 $=(2a-4)-(3ab-6b)$

$=2(a-2)-3b(a-2)$

$=(a-2)(2-3b)$

小明由此体会到，对项数较多的多项式无法直接进行因式分解时，我们可以将多项式分为若干组，再利用提公因式法、公式法等方法达到因式分解的目的．这种方法可以称为分组分解法．（温馨提示：因式分解一定要分解到不能再分解为止）

请你也试一试利用分组分解法进行因式分解：

（Ⅰ）因式分解：x^2-a^2+x+a；

（Ⅱ）因式分解：$ax+a^2-2ab-bx+b^2$.

【考点】因式分解－分组分解法；因式分解－提公因式法；因式分解－运用公式法.

【专题】计算题；整式；运算能力.

【分析】认真读懂题意，利用因式分解解决问题.

【解答】解：（Ⅰ）x^2-a^2+x+a

$=(x^2-a^2)+(x+a)$

$=(x-a)(x+a)+(x+a)$

$=(x+a)(x-a+1)$；

（Ⅱ）$ax+a^2-2ab-bx+b^2$.

$=(ax-bx)+(a^2-2ab+b^2)$

$=x(a-b)+(a-b)^2$

$=(a-b)(x+a-b)$.

【点评】本题考查了因式分解，解题的关键是掌握分组因式分解．

11．（2022秋•日照期末）阅读理解并解答：

【方法呈现】

（1）我们把多项式 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 叫做完全平方式．在运用完全平方公式进行因式分解时，关键是判断这个多项式是不是一个完全平方式，同样地，把一个多项式进行局部因式分解可以来解决代数式值的最小（或最大）问题．

例如：$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$，

$\because (x+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore (x+1)^2+2\geqslant 2$．

则这个代数式 x^2+2x+3 的最小值是 __2__，这时相应的 x 的值是 __-1__．

【尝试应用】

（2）求代数式 $-x^2+14x+10$ 的最小（或最大）值，并写出相应的 x 的值．

【拓展提高】

（3）已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$，且 c 是△ABC 中最长的边，求 c 的取值范围．

【考点】因式分解的应用；非负数的性质：偶次方；完全平方式．

【专题】计算题；整式；运算能力；应用意识．

【分析】（1）利用非负数的性质确定代数式的最值；

（2）先提出负号，再变形，最后确定最值；

（3）变形等式，利用非负数的性质，求出 a、b 的值，再利用三角形的三边关系确定 c 边长的取值范围．

【解答】解：（1）代数式 x^2+2x+3 的最小值是 2，这时相应的 x 的值是 -1，

故答案为：2，-1；

（2）$-x^2+14x+10$

$=-(x^2-14x-10)$

$=-[(x-7)^2-49-10]$

$=-[(x-7)^2-59]$

$=-(x-7)^2+59$，

∵ $-(x-7)^2\leqslant 0$，

∴ $-(x-7)^2+59\leqslant 59$，

∴代数式 $-x^2+14x+10$ 有最大值 59，相应的 x 的值为 7；

（3）∵a，b，c 是△ABC 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$，

∴$a^2+b^2-10a-8b=-41$，

∴ $(a-5)^2+(b-4)^2-25-16=-41$，

∴ $(a-5)^2+(b-4)^2=-41+41$，

∴ $(a-5)^2+(b-4)^2=0$，

∴$a-5=0$，$b-4=0$，

∴$a=5$，$b=4$，

∵$a-b<c<a+b$，

∴$1<c<9$，

∵c 是△ABC 中最长的边，

∴$5<c<9$.

答：c 的取值范围为 $5<c<9$.

【点评】本题考查了因式分解的应用，解题的关键是掌握完全平方公式的应用.

12.（2022 秋•嘉峪关期末）整体思想是数学解题中常见的一种思想方法：下面是某同学对多项式 $(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$ 进行因式分解的过程. 将“x^2+2x”看成一个整体，令 $x^2+2x=y$，则原式 $=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2$，再将“$y$”还原即可. 解：设 $x^2+2x=y$. 原式 $=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+2x+1)^2$.

问题：

（1）该同学完成因式分解了吗？如果没完成，请你直接写出最后的结果 __$(x+1)^4$__；

（2）请你模仿以上方法尝试对多项式 $(x^2-4x)(x^2-4x+8)+16$ 进行因式分解.

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】整式；运算能力.

【分析】（1）利用完全平方公式继续分解，即可解答；

（2）按照例题的解题思路，进行计算即可解答.

【解答】解：（1）该同学没有完成因式分解，

设 $x^2+2x=y$，

原式＝y（y+2）+1

＝y^2+2y+1

＝（y+1）^{2}

＝（x^2+2x+1）^{2}

＝（x+1）^{4}，

故答案为：（x+1）^{4}；

（2）设 x^2 - 4x＝y，

原式＝y（y+8）+16

＝y^2+8y+16

＝（y+4）2

＝（x^2 - 4x+4）^{2}

＝（x - 2）^{4}.

【点评】本题考查了提公因式法与公式法的综合运用，理解例题的解题思路是解题的关键.

13．（2022 秋•江北区校级期末）一个三位数 A 各个数位上的数字均不相等，若将 A 的个位上的数字移到最左边得到一个新的三位数 A_1，且 A_1 被 4 除余 1，再将 A_1 的个位上的数字移到最左边得到另一个新的三位数 A_2，且 A_2 被 4 除余 2，则称原数为 4 的"友谊数".例如：三位数 A＝256，则 A_1＝625，且 625÷4＝156…1，A_2＝562，且 562÷4＝140…2，所以 256 是 4 的"友谊数".

（1）分别判断自然数 612 和 916 是否是"友谊数"，并请说明理由.

（2）若"友谊数" A 百位上的数字是 a，十位上的数字是 1，个位上的数字是 c，其中 a＜c，重新排列各数位上的数字必可得到一个最大数和一个最小数，其最大数与最小数的差记为 F（A），若$\frac{F(A)}{4}$为整数，求出所有符合条件的 A.

【考点】因式分解的应用；列代数式.

【专题】整式；运算能力.

【分析】（1）根据所给的定义进行判断即可；

（2）根据题意可得 2c+a - 2 能被 4 整除，a 是 2 的倍数，再求出最大的三位数是 100c+10a+1，最小的三位数是 100+10a+c，则可得 c - 1 是 4 的倍数，从而确定 c 的值，根据 c 的值分类讨论求出 A 即可.

【解答】解：（1）∵A_1＝261，且 261÷4＝65……1，

A_2＝126，且 126÷4＝31…2，

∴612 是 4 的“友谊数”；

∵A_1＝691，且 691÷4＝172……3，

∴916 不是 4 的“友谊数”；

（2）∵A 百位上的数字是 a，十位上的数字是 1，个位上的数字是 c，

∴A_1＝100c+10a+1，且 100c+10a+1 - 1 能被 4 整除，

∴a 是 2 的倍数，

A_2＝100+10c+a，且 100+10c+a - 2 能不 4 整除，

∴2c+a - 2 能被 4 整除，

∵c＞a，

∴最大的三位数是 100c+10a+1，最小的三位数是 100+10a+c，

∴F（A）＝99c - 99，

∵$\frac{F(A)}{4}$为整数，

∴c - 1 是 4 的倍数，

∴c＝5 或 c＝9，

∵2c+a - 2 能被 4 整除，

∴当 c＝5 时，a＝4 或 a＝8（舍），

∴A 是 415；

当 c＝9 时，a＝4 或 a＝8，

∴A 是 419 或 819；

综上所述：A 的值为 415 或 419 或 819．

【点评】本题考查因式分解的应用，根据题意，将所求的问题转化为整式的加减运算，并根据数的特点分类讨论是解题的关键．

14．（2022 秋•广饶县校级期末）某校“数学社团”活动中，研究发现常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法．但还有很多的多项式只用上述方法无法分解，如：“m^2 - mn+2m - 2n”，细心观察这个式子就会发现，前两项可以提取公因式，后两项也可提取公因式，前后两部分分别分解因式后产生了新的公因式，然后再提取公因式就可以完成整个式子的因式分解了．过程为：

$m^2-mn+2m-2n=(m^2-mn)+(2m-2n)=m(m-n)+2(m-n)=(m-n)(m+2)$.

“社团”将此种因式分解的方法叫做“分组分解法”，请在这种方法的启发下，解决以下问题：

（1）分解因式：$a^3-3a^2-6a+18$；

（2）分解因式：$x^2+y^2-2xy-9$；

（3）已知：$m+n=5$，$m-n=1$．求：$m^2-n^2-2n+2m$ 的值；

（4）$\triangle ABC$ 的三边 a，b，c 满足 $a^2+ab+c^2-bc=2ac$，判断$\triangle ABC$ 的形状并说明理由．

【考点】因式分解的应用．

【专题】因式分解；运算能力．

【分析】（1）首先将前两项组合提取公因式，后两项组合提取公因式，然后提取新的公因式即可；

（2）首先将前三项组合，利用完全平方公式分解因式，进而利用平方差公式分解因式即可；

（3）首先将前两项以及后两项组合，前两项利用平方差公式分解因式，后两项提取公因式法分解因式，再提取新的公因式即可；

（4）先将原式变形为 $a^2-2ac+c^2+(ab-bc)=0$，前三项利用完全平方公式分解因式，后两项提取公因式，得到 $(a-c)^2+b(a-c)=0$，再提取一次公因式即可判断．

【解答】解：（1）$a^3-3a^2-6a+18$

$=a^2(a-3)-6(a-3)$

$=(a-3)(a^2-6)$；

（2）$x^2+y^2-2xy-9$

$=(x^2+y^2-2xy)-9$

$=(x-y)^2-9$

$=(x-y+3)(x-y-3)$；

（3）$m^2-n^2-2n+2m$

$=(m^2-n^2)-(2n-2m)$

$=(m+n)(m-n)-2(n-m)$

$=(m+n)(m-n)+2(m-n)$

$=(m-n)(m+n+2)$，

∵$m+n=5$，$m-n=1$，

∴原式$=1\times(5+2)=7$；

（4）$\triangle ABC$是等腰三角形，理由如下：

∵$a^2+ab+c^2-bc=2ac$，

∴$a^2-2ac+c^2+(ab-bc)=0$，

∴$(a-c)^2+b(a-c)=0$，

∴$(a-c)(a-c+b)=0$，

∵$a-c+b>0$，

∴$a-c=0$，即$a=c$，

∴$\triangle ABC$是等腰三角形．

【点评】此题主要考查了分组分解法分解因式以及等腰三角形的判定，正确分组分解是解题关键．

15.（2022秋•余庆县期末）阅读下面的材料：

> 常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法等，但有的多项式只用上述方法无法分解．如$x^2-4y^2-2x+4y$，细心观察这个式子，会发现前两项符合平方差公式，后两项可提取公因式，前、后两部分分别因式分解后又出现新的公因式，提取公因式就可以完成整个式子的分解因式，具体过程如下：
>
> $x^2-4y^2-2x+4y$
>
> $=(x^2-4y^2)-(2x-4y)$
>
> $=(x+2y)(x-2y)-2(x-2y)$
>
> $=(x-2y)(x+2y-2)$
>
> 像这种将一个多项式适当分组后，进行分解因式的方法叫做分组分解法．

利用分组分解法解决下面的问题：

（1）分解因式：$a^2-b^2+4a-4b$；

（2）已知等腰三角形的三边a、b、c均为整数，且$a+bc+b+ca=12$，则满足该条件的等腰三角形共有__2__个，请说明理由．

【考点】因式分解的应用；三角形三边关系；等腰三角形的判定与性质．

【专题】因式分解；三角形；等腰三角形与直角三角形；运算能力；推理能力．

【分析】（1）可将原式分组为$(a^2-b^2)+(4a-4b)$，再分别分解因式后提公因式分解

因式即可求解；

（2）再将所给等式左边分解因式（$a+b$）（$1+c$）＝12，继而可求解 $a+b$＝1，c＝11，或 $a+b$＝12，c＝0，或 $a+b$＝2，c＝5，或 $a+b$＝6，c＝1，或 $a+b$＝3，c＝3，或 $a+b$＝4，c＝2，由三角形的三边关系及的等腰三角形的性质可求解．

【解答】解：（1）原式＝（a^2-b^2）＋（$4a-4b$）

＝（$a+b$）（$a-b$）+4（$a-b$）

＝（$a-b$）（$a+b+4$）；

（2）∵$a+bc+b+ca$＝12，

∴（$a+b$）＋（$ac+bc$）＝12，

∴（$a+b$）+c（$a+b$）＝12，

∴（$a+b$）（$1+c$）＝12，

∵12＝1×12＝2×6＝3×4，

∴$a+b$＝1，$1+c$＝12，或 $a+b$＝12，$1+c$＝1，或 $a+b$＝2，$1+c$＝6，或 $a+b$＝6，$1+c$＝2，或 $a+b$＝3，$1+c$＝4，或 $a+b$＝4，$1+c$＝3，

即 $a+b$＝1，c＝11，或 $a+b$＝12，c＝0，或 $a+b$＝2，c＝5，或 $a+b$＝6，c＝1，或 $a+b$＝3，c＝3，或 $a+b$＝4，c＝2，

∵等腰三角形的三边 a、b、c 均为正整数，

∴$a+b>c$，

∴$a+b$＝6，c＝1 或 $a+b$＝4，c＝2，

∴等腰三角形的三边长分别为 3，3，1 或 2，2，2，共 2 个，

故答案为 2．

【点评】本题主要考查等腰三角形的性质，三角形的三边关系，因式分解的应用，利用分组分解将式子变形是解题的关键．

考点卡片

1．非负数的性质：偶次方

偶次方具有非负性．

任意一个数的偶次方都是非负数，当几个数或式的偶次方相加和为 0 时，则其中的每一项都必须等于 0．

2．列代数式

（1）定义：把问题中与数量有关的词语，用含有数字、字母和运算符号的式子表示出来，就是列代数式．

（2）列代数式五点注意：①仔细辨别词义． 列代数式时，要先认真审题，抓住关键词语，仔细辩析词义．如“除”与“除以”，“平方的差（或平方差）”与“差的平方”的词义区分． ②分清数量关系．要正确列代数式，只有分清数量之间的关系． ③注意运算顺序．列代数式时，一般应在语言叙述的数量关系中，先读的先写，不同级运算的语言，且又要体现出先低级运算，要把代数式中代表低级运算的这部分括起来．④规范书写格式．列代数时要按要求规范地书写．像数字与字母、字母与字母相乘可省略乘号不写，数与数相乘必须写乘号；除法可写成分数形式，带分数与字母相乘需把代分数化为假分数，书写单位名称什么时不加括号，什么时要加括号．注意代数式括号的适当运用． ⑤正确进行代换．列代数式时，有时需将题中的字母代入公式，这就要求正确进行代换．

【规律方法】列代数式应该注意的四个问题

1．在同一个式子或具体问题中，每一个字母只能代表一个量．

2．要注意书写的规范性．用字母表示数以后，在含有字母与数字的乘法中，通常将“×”简写作“•”或者省略不写．

3．在数和表示数的字母乘积中，一般把数写在字母的前面，这个数若是带分数要把它化成假分数．

4．含有字母的除法，一般不用“÷”（除号），而是写成分数的形式．

3．整式的加减

（1）几个整式相加减，通常用括号把每一个整式括起来，再用加减号连接；然后去括号、合并同类项．

（2）整式的加减实质上就是合并同类项．

（3）整式加减的应用：

①认真审题，弄清已知和未知的关系；

②根据题意列出算式；

③计算结果，根据结果解答实际问题．

【规律方法】整式的加减步骤及注意问题

1．整式的加减的实质就是去括号、合并同类项．一般步骤是：先去括号，然后合并同类项．

2．去括号时，要注意两个方面：一是括号外的数字因数要乘括号内的每一项；二是当括号外是“﹣”时，去括号后括号内的各项都要改变符号．

4．完全平方式

完全平方式的定义：对于一个具有若干个简单变元的整式 A，如果存在另一个实系数整式 B，使 $A=B^2$，则称 A 是完全平方式．

$a^2\pm 2ab+b^2=（a\pm b）^2$

完全平方式分两种，一种是完全平方和公式，就是两个整式的和括号外的平方．另一种是完全平方差公式，就是两个整式的差括号外的平方．算时有一个口诀“首末两项算平方，首末项乘积的2倍中间放，符号随中央．（就是把两项的乘方分别算出来，再算出两项的乘积，再乘以2，然后把这个数放在两数的乘方的中间，这个数以前一个数间的符号随原式中间的符号，完全平方和公式就用+，完全平方差公式就用﹣，后边的符号都用+）”

5．因式分解的意义

1、分解因式的定义：

把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，也叫做分解因式．

2、因式分解与整式乘法是相反方向的变形，即互逆运算，二者是一个式子的不同表现形式．因式分解是两个或几个因式积的表现形式，整式乘法是多项式的表现形式．例如：

$$\boxed{x^2}-1 \underset{整式乘法}{\overset{因式分解}{\rightleftharpoons}} (x+1)(x-1)$$

3、因式分解是恒等变形，因此可以用整式乘法来检验．

6．因式分解-提公因式法

1、提公因式法：如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法．

2、具体方法：

（1）当各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数；字母取各项的相同的字母，而且各字母的指数取次数最低的；取相同的多项式，多项式的次数取最低的．

（2）如果多项式的第一项是负的，一般要提出“﹣”号，使括号内的第一项的系数成为正数．

提出“﹣”号时，多项式的各项都要变号．

3、口诀：找准公因式，一次要提净；全家都搬走，留 1 把家守；提负要变号，变形看奇偶．

4、提公因式法基本步骤：

（1）找出公因式；

（2）提公因式并确定另一个因式：

①第一步找公因式可按照确定公因式的方法先确定系数再确定字母；

②第二步提公因式并确定另一个因式，注意要确定另一个因式，可用原多项式除以公因式，所得的商即是提公因式后剩下的一个因式，也可用公因式分别除去原多项式的每一项，求的剩下的另一个因式；

③提完公因式后，另一因式的项数与原多项式的项数相同．

7．因式分解-运用公式法

1、如果把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式，这种方法叫公式法．

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

2、概括整合：

①能够运用平方差公式分解因式的多项式必须是二项式，两项都能写成平方的形式，且符号相反．

②能运用完全平方公式分解因式的多项式必须是三项式，其中有两项能写成两个数（或式）的平方和的形式，另一项是这两个数（或式）的积的 2 倍．

3、要注意公式的综合应用，分解到每一个因式都不能再分解为止．

8．提公因式法与公式法的综合运用

提公因式法与公式法的综合运用．

9．因式分解-分组分解法

1、分组分解法一般是针对四项或四项以上多项式的因式分解，分组有两个目的，一是分组后能出现公因式，二是分组后能应用公式．

2、对于常见的四项式，一般的分组分解有两种形式：①二二分法，②三一分法．

例如：①$ax+ay+bx+by$

$=x(a+b)+y(a+b)$

$=(a+b)(x+y)$

②$2xy-x^2+1-y^2$

$=-(x^2-2xy+y^2)+1$

$=1-(x-y)^2$

$=(1+x-y)(1-x+y)$

10．因式分解-十字相乘法等

借助画十字交叉线分解系数，从而帮助我们把二次三项式分解因式的

方法，通常叫做十字相乘法．

①$x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子的因式分解．

这类二次三项式的特点是：二次项的系数是 1；常数项是两个数的积；

可以直接将某些二次项的系数是 1 的二次三项式因式分解：

$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$

②$ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 型的式子的因式分解

这种方法的关键是把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1，a_2 的积 $a_1\cdot a_2$，

把常数项 c 分解成两个因数 c_1，c_2 的积 $c_1\cdot c_2$，并使 $a_1c_2+a_2c_1$ 正好是一

次项 b，那么可以直接写成结果：$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$．

11．因式分解的应用

1、利用因式分解解决求值问题．

2、利用因式分解解决证明问题．

3、利用因式分解简化计算问题．

【规律方法】因式分解在求代数式值中的应用

1．因式分解是研究代数式的基础，通过因式分解将多项式合理变形，是求代数式值的常用解题方法，具体做法是：根据题目的特点，先通过因式分解将式子变形，然后再进行整体代入．

2．用因式分解的方法将式子变形时，根据已知条件，变形的可以是整个代数式，也可以是

其中的一部分．

12．分式的定义

（1）分式的概念：一般地，如果 A，B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$叫做分式．

（2）因为 0 不能做除数，所以分式的分母不能为 0．

（3）分式是两个整式相除的商，分子就是被除式，分母就是除式，而分数线可以理解为除号，还兼有括号的作用．

（4）分式的分母必须含有字母，而分子可以含字母，也可以不含字母，亦即从形式上看是$\frac{A}{B}$的形式，从本质上看分母必须含有字母，同时，分母不等于零，且只看初始状态，不要化简．

（5）分式是一种表达形式，如 $x+\frac{1}{x}+2$ 是分式，如果形式都不是$\frac{A}{B}$的形式，那就不能算是分式了，如：（x+1）÷（x+2），它只表示一种除法运算，而不能称之为分式，但如果用负指数次幂表示的某些代数式如（a+b）$^{-2}$，y^{-1}，则为分式，因为 $y^{-1}=\frac{1}{y}$仅是一种数学上的规定，而非一种运算形式．

13．分式的加减法

（1）同分母分式加减法法则：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减．

（2）异分母分式加减法法则：把分母不相同的几个分式化成分母相同的分式，叫做通分，经过通分，异分母分式的加减就转化为同分母分式的加减．

说明：

①分式的通分必须注意整个分子和整个分母，分母是多项式时，必须先分解因式，分子是多项式时，要把分母所乘的相同式子与这个多项式相乘，而不能只同其中某一项相乘．

②通分是和约分是相反的一种变换．约分是把分子和分母的所有公因式约去，将分式化为较简单的形式；通分是分别把每一个分式的分子分母同乘以相同的因式，使几个较简单的分式变成分母相同的较复杂的形式．约分是对一个分式而言的；通分则是对两个或两个以上的分式来说的．

14．展开图折叠成几何体

通过结合立体图形与平面图形的相互转化，去理解和掌握几何体的展开图，要注意多从实物出发，然后再从给定的图形中辨认它们能否折叠成给定的立体图形．

15．三角形三边关系

（1）三角形三边关系定理：三角形两边之和大于第三边．

（2）在运用三角形三边关系判定三条线段能否构成三角形时并不一定要列出三个不等式，只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可判定这三条线段能构成一个三角形．

（3）三角形的两边差小于第三边．

（4）在涉及三角形的边长或周长的计算时，注意最后要用三边关系去检验，这是一个隐藏的定时炸弹，容易忽略．

16．等腰三角形的判定与性质

1、等腰三角形提供了好多相等的线段和相等的角，判定三角形是等腰三角形是证明线段相等、角相等的重要手段．

2、在等腰三角形有关问题中，会遇到一些添加辅助线的问题，其顶角平分线、底边上的高、底边上的中线是常见的辅助线，虽然“三线合一”，但添加辅助线时，有时作哪条线都可以，有时不同的做法引起解决问题的复杂程度不同，需要具体问题具体分析．

3、等腰三角形性质问题都可以利用三角形全等来解决，但要注意纠正不顾条件，一概依赖全等三角形的思维定势，凡可以直接利用等腰三角形的问题，应当优先选择简便方法来解决．