2023年中考数学复习探究性试题汇编之抛物线的平移、旋转、对称

一．解答题（共15小题）

1．（2023春•长寿区校级月考）在直角坐标系中，抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c(a\neq 0)$与$x$轴交于$A$、$B$两点．其中点$A$（﹣2，0），点$B$（4，0）．

（1）求抛物线的解析式．

（2）如图1，在直线l：$y=-\frac{1}{2}x+n$经过A点，与y轴交于D．在直线l下方的抛物线上有一个动点P，连接PA，PD，求△PAD面积的最大值及其此时P的坐标．

（3）将抛物线y向右平移1个单位长度后得到新抛物线y_1，点E是新抛物线y_1的对称轴上的一个动点，点F是原抛物线上的一个动点，取△PAD面积最大值时的P点．若以点P、D、E、F为顶点的四边形是平行四边形，直接写出点F的坐标，并写出求解其中一个F点的过程．

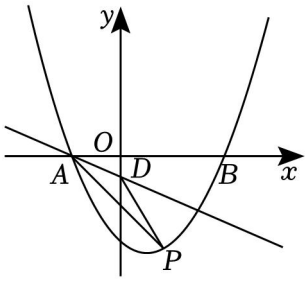
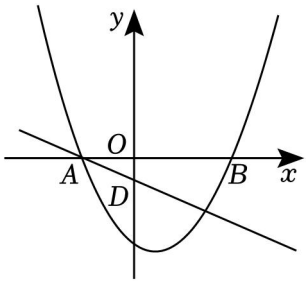


图1



备用图

2．（2023春•青羊区校级月考）如图，抛物线$y=ax^2+2ax+c$经过B（1，0），C（0，3）两点，与x轴交于另一点A，点D是抛物线的顶点．

（1）求抛物线的解析式及点D的坐标；

（2）如图1，连接AC，点E在直线AC上方的抛物线上，连接EA，EC，当△EAC面积最大时，求点E坐标；

（3）如图2，连接AC、BC，在抛物线上是否存在点M，使∠ACM＝∠BCO，若存在，求出M点的坐标；若不存在，请说明理由．

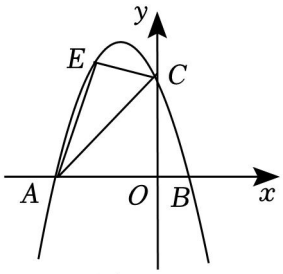


图1

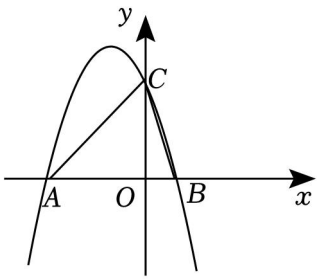


图2

3．（2023•长沙二模）如图 1，抛物线 $y=ax^2+3ax$（a 为常数，$a<0$）与 x 轴交于 O，A 两点，点 B 为抛物线的顶点，点 D 是线段 OA 上的一个动点，连接 BD 并延长与过 O，A，B 三点的⊙P 相交于点 C，过点 C 作⊙P 的切线交 x 轴于点 E．

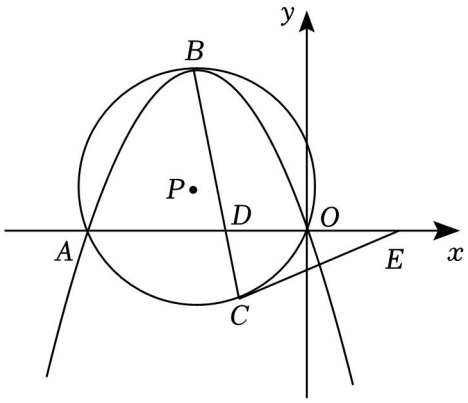


图1

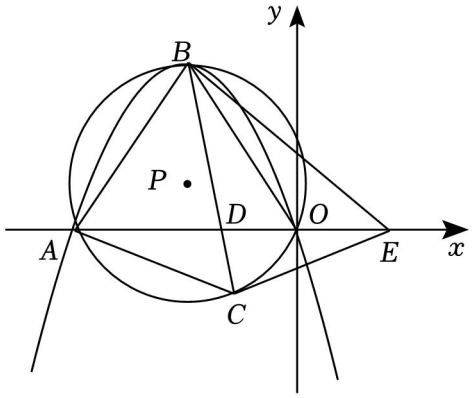


图2

（1）①求点 A 的坐标；②求证：$CE=DE$；

（2）如图 2，连接 AB，AC，BE，BO，当$a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\angle CAE=\angle OBE$ 时，

①求证：$AB^2=AC\cdot BE$；②求$\frac{1}{OD}-\frac{1}{OE}$的值．

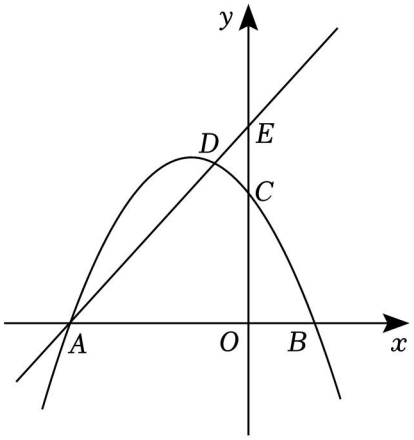
4．（2023•和平区模拟）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A（﹣4，0）和点 B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，经过点 A 的直线与抛物线交于点 D（﹣1，3），与 y 轴交于点 E．

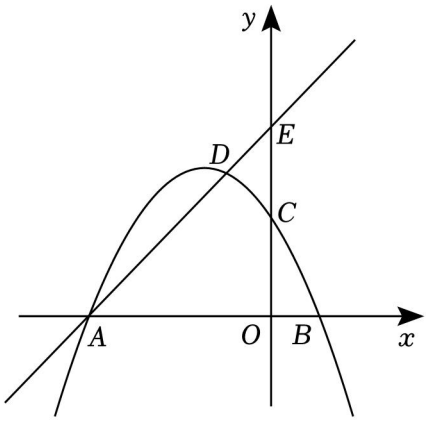
（1）求直线 AD 的表达式；

（2）求抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；

（3）点 F 是 x 轴下方抛物线上的一个动点，使△ADF 的面积为$\frac{27}{2}$，请直接写出点 F 的坐标为 _____；

（4）点 M 是线段 OA 上一动点，点 N 是线段 AE 上一动点，且 $AM=EN$，请直接写出 $EM+ON$ 的最小值为 _____．





备用图

5．（2023•花山区一模）已知抛物线 $y=x^2+ax+b$ 的顶点坐标为（1，2）．

（1）求 a，b 的值；

（2）将抛物线 $y=x^2+ax+b$ 向下平移 m 个单位得到抛物线 C_1，存在点（c，1）在 C_1 上，求 m 的取值范围；

（3）抛物线 C_2：$y=(x-3)^2+k$ 经过点（1，2），直线 $y=n$（$n>2$）与抛物线 $y=x^2+ax+b$ 相交于 A、B（点 A 在点 B 的左侧），与 C_2 相交于点 C、D（点 C 在点 D 的左侧），求 $AD-BC$ 的值．

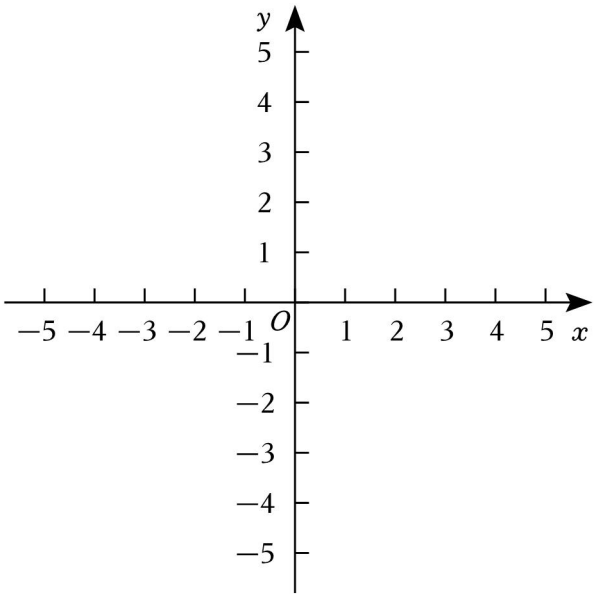
6．（2023•奉贤区一模）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 的对称轴为直线 $x=2$，顶点为 A，与 x 轴分别交于点 B 和点 C（点 B 在点 C 的左边），与 y 轴交于点 D，其中点 C 的坐标为（3，0）．

（1）求抛物线的表达式；

（2）将抛物线向左或向右平移，将平移后抛物线的顶点记为 E，联结 DE．

①如果 $DE\parallel AC$，求四边形 $ACDE$ 的面积；

②如果点 E 在直线 DC 上，点 Q 在平移后抛物线的对称轴上，当 $\angle DQE=\angle CDQ$ 时，求点 Q 的坐标．



7.（2022秋•汉阳区期中）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$ 有实数根，k 为正整数．

（1）求 k 的值；

（2）当此方程有两个非零的整数根时，关于 x 的二次函数 $y=x^2+2x+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$ 的图象记为 M，将 M 向下平移 9 个单位，求平移后的图象表达式；

（3）设（2）的图象 M 与 y 轴的交点为 C，当图象 M 在 y 轴右侧部分沿过点 C 与 x 轴平行的直线 m 折叠后，与未折叠的部分构成一个新图象，当直线 $y=\frac{1}{3}x+n$ 与新图象有三个公共点时，直接写出 n 的取值范围？

8.（2022•德州）如图，题目中的黑色部分是被墨水污染了无法辨认的文字，导致题目缺少一个条件而无法解答，经查询结果发现，该二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+1$．

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A（0，1），B（1，－2），[redacted]．求该二次函数的解析式．

（1）请根据已有信息添加一个适当的条件：_____；

（2）当函数值 $y<6$ 时，自变量 x 的取值范围：_____；

（3）如图 1，将函数 $y=x^2-4x+1$（$x<0$）的图象向右平移 4 个单位长度，与 $y=x^2-4x+1$（$x\geqslant 4$）的图象组成一个新的函数图象，记为 L．若点 P（3，m）在 L 上，求 m 的值；

（4）如图 2，在（3）的条件下，点 A 的坐标为（2，0），在 L 上是否存在点 Q，使得 $S_{\triangle OAQ}=9$．若存在，求出所有满足条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．

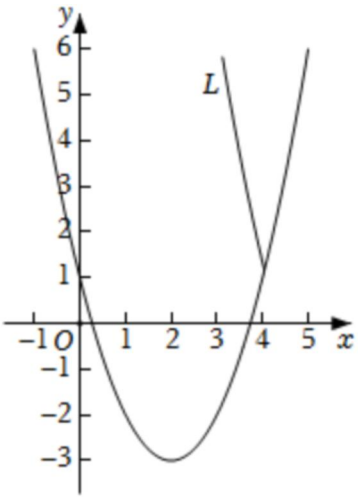


图1

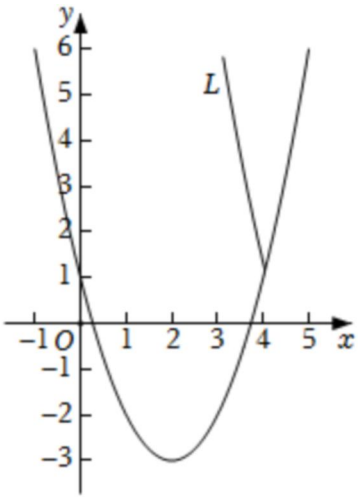


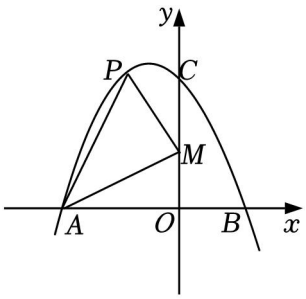
图2

9．（2022秋•前郭县期中）如图，对称轴为直线$x=-1$的抛物线$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$与x轴交于点A、B（点A在点B的左侧），与y轴交于点C，其中点B的坐标为（2，0），点C的坐标为（0，4）．

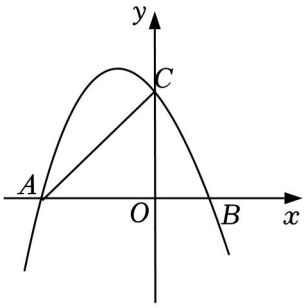
（1）求该抛物线的解析式；

（2）如图①，若点P为抛物线上第二象限内的一点，且到y轴的距离是2．点M为线段CO上的一个动点，求△APM周长的最小值；

（3）如图②，将原抛物线绕点A旋转180°，得新抛物线y'，在新抛物线y'的对称轴上是否存在点Q，使得△ACQ为等腰三角形？若存在，请直接写出点Q的坐标；若不存在，说明理由．



图①



图②

10．（2022秋•越秀区校级期中）在平面直角坐标系xOy中，抛物线G：$y=-x^2+2mx-2m-3$的顶点为点P．

（1）顶点P的坐标为 _____；（用含m的式子表示）

（2）直线l：$y=x-3$分别与x轴和y轴交于点A和点B，点P在第四象限．

①当△PAB面积最大时，求抛物线G的解析式；

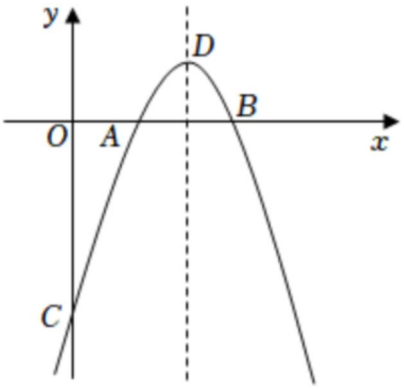
②在①的条件下，把抛物线 G 沿 y 轴向上平移 t（$t>0$）个单位长度得到抛物线 G'，若抛物线 G'与△PAB 的边有且只有两个交点，求实数 t 的取值范围．

11．（2022 秋•嘉祥县月考）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，顶点为 D（2，1）

（1）求抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的表达式；

（2）在抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使得△PAC 周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

（3）把上述抛物线沿它的对称轴向下平移，平移的距离为 h（$h>0$），在平移过程中，该抛物线与直线 BC 始终有交点，求 h 的最大值．

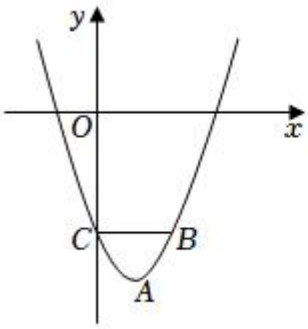


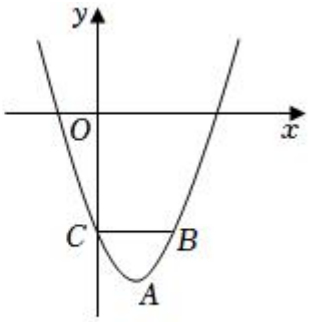
12．（2022 秋•东港区校级月考）如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=x^2-2x-3$ 的顶点为 A，与 y 轴交于点 C，线段 $CB\parallel x$ 轴，交该抛物线于另一点 B．

（1）求点 B 的坐标及直线 AC 的解析式；

（2）当二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的自变量 x 满足 $m\leqslant x\leqslant m+1$ 时，此函数的最大值为 p，最小值为 q，且 $p-q=2$．求 m 的值；

（3）平移抛物线 $y=x^2-2x-3$，使其（备用图）顶点始终在直线 AC 上移动，当平移后的抛物线与射线 BA 只有一个公共点时，设此时抛物线的顶点的横坐标为 n，请直接写出 n 的取值范围．





备用图

13．（2022秋•鄞州区月考）定义：将二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）在 x 轴下方部分沿 x 轴向上翻折，翻折后部分与原来未翻折部分形成一个新的函数 G，那么称函数 G 为原二次函数的有趣函数．

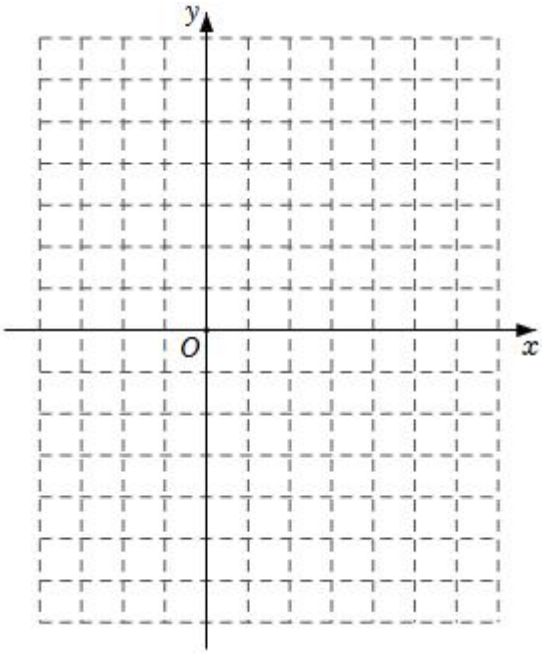
（1）二次函数 $y=x^2+2x+3$ _____（有/没有）有趣函数．

（2）已知二次函数与 x 轴交于点（1，0）、（5，0），与 y 轴交于点 A（0，5），求抛物线的解析式，并在坐标系中画出函数图象．

（3）在（2）的条件下：

①过点 A 作 x 轴的平行线与抛物线交于点 B，求线段 AB 的长度．

②若函数 G 为原二次函数的有趣函数，画出函数 G 的图象并求解当函数 G 的函数值大于 2 时，自变量 x 的取值范围（直接写出答案）．



14．（2022秋•丰台区校级期中）在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P，直线 l 和矩形 w，定义如下：若点 P 关于直线 l 的对称点 P'在矩形 $ABCD$ 的边上，则称点 P 为矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”．

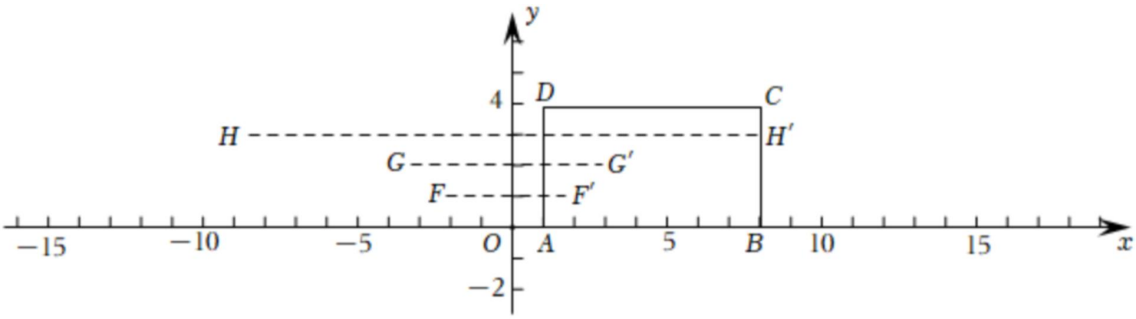
已知矩形 $ABCD$ 的顶点 A（1，0），B（8，0），C（8，4），D（1，4）.

例如，图 1 中的点 F 和点 G 都不是矩形 $ABCD$ 关于 y 轴的“对矩点”，点 H 是矩形 $ABCD$ 关于 y 轴的“对矩点”.

（1）在点 P_1（﹣2，2），P_2（2，4），P_3（4，2），P_4（6，3）中，是矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=3$“对矩点”的点是 _____；

（2）若在直线 $y=2x+6$ 上存在点 M，使得点 M 是矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”，求 t 的取值范围；

（3）若抛物线 $y=-x^2-4x+9$ 上存在矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”且恰有 4 个，请直接写出 t 的取值范围.



15.（2022 秋•江夏区月考）已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 A（﹣1，2）.

（1）抛物线顶点位于 y 轴右侧且纵坐标为 6．①求抛物线的解析式．②如图 1，直线 $y=-x+4$ 与抛物线交于 B、C 两点，P 为线段 BC 上一点，过 P 作 $PM\parallel y$ 轴交抛物线于 M 点．若 $PM=3$，求 P 点的坐标.

（2）将抛物线平移，使点 A 的对应点为 A'（$m+1$，$b+4$），其中 $m\neq 2$．若平移后的抛物线经过点 N（2，1），平移后的抛物线顶点恰好落在直线 $y=x+5$ 上，求 b 的值.

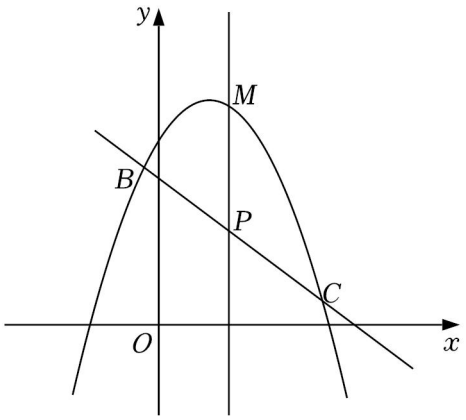
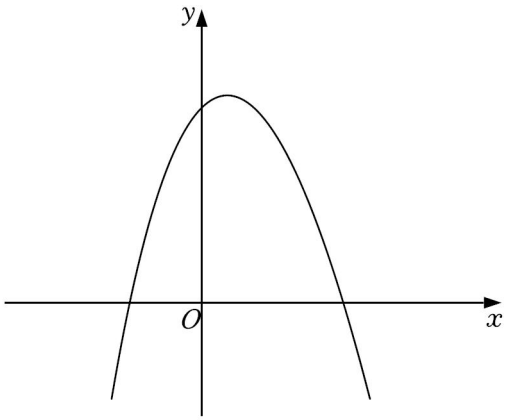


图1



备用图

2023年中考数学复习探究性试题汇编之抛物线的平移、旋转、对称

参考答案与试题解析

一．解答题（共15小题）

1．（2023春•长寿区校级月考）在直角坐标系中，抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c(a\neq 0)$与$x$轴交于$A$、$B$两点．其中点$A$（﹣2，0），点$B$（4，0）．

（1）求抛物线的解析式．

（2）如图1，在直线l：$y=-\frac{1}{2}x+n$经过A点，与y轴交于D．在直线l下方的抛物线上有一个动点P，连接PA，PD，求△PAD面积的最大值及其此时P的坐标．

（3）将抛物线y向右平移1个单位长度后得到新抛物线y_1，点E是新抛物线y_1的对称轴上的一个动点，点F是原抛物线上的一个动点，取△PAD面积最大值时的P点．若以点P、D、E、F为顶点的四边形是平行四边形，直接写出点F的坐标，并写出求解其中一个F点的过程．

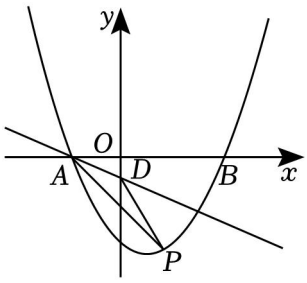
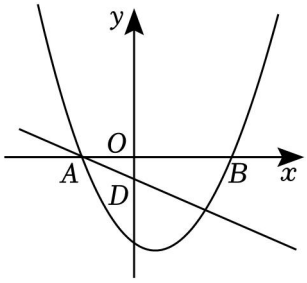


图1



备用图

【考点】二次函数综合题．

【专题】综合题；推理能力．

【分析】（1）根据点A（﹣2，0），点B（4，0），设交点式即可求解；

（2）先求得D（0，﹣1），过点P作$PE\perp x$轴交l于点E，设$P(t,\ -\frac{1}{2}t^2-t-4)$，则$E(t,\ -\frac{1}{2}t-1)$，表示出$PE$的长，根据$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}|x_D-x_A|\cdot PE$以及二次函数的性质即可求解；

（3）根据平移得出平移后新抛物线y_1的对称轴为直线$x=2$，设$E(2,m)$，$F(t,\ \frac{1}{2}t^2-t-4)$，分三种情况讨论即可求解：①若以$PF$为对角线时，②$PE$为对角线时，③若以$PD$为对角线时．

【解答】解：（1）∵抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c(a\neq 0)$与 x 轴交于 A、B 两点．其中点 A（﹣2，0），点 B（4，0），

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=\frac{1}{2}x^2-x-4$；

（2）将 A（﹣2，0）代入l：$y=-\frac{1}{2}x+n$，

得：$0=-\frac{1}{2}\times(-2)+n$，

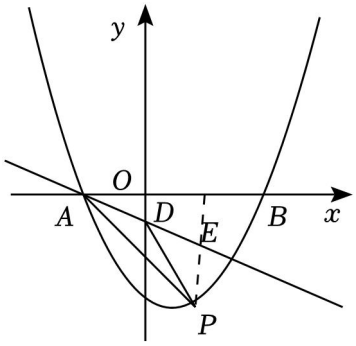
解得：n＝﹣1，

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-1$，

令 x＝0，解得：y＝﹣1，

∴D（0，﹣1），

如图所示，过点 P 作 $PE\perp x$ 轴交 l 于点 E，



设$P(t，-\frac{1}{2}t^2-t-4)$，则$E(t，-\frac{1}{2}t-1)$，

$\therefore PE=-\frac{1}{2}t-1-(-\frac{1}{2}t^2-t-4)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+3$，

∴ $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}|x_D-x_A|\cdot PE=\frac{1}{2}\times 2\times(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+3)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+3=-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})^2+\frac{25}{8}$，

∴对称轴为$t=\frac{1}{2}$，且﹣2＜t＜3，

∴△PAD 面积最大值为$\frac{25}{8}$，

此时，$P(\frac{1}{2}，-\frac{35}{8})$；

（3）∵点 A（﹣2，0），点 B（4，0）关于 x＝1 对称，

则抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-x-4$ 的对称轴为直线 x＝1，

∵将抛物线 y 向右平移 1 个单位长度后得到新抛物线 y_1，

∴则平移后新抛物线 y_1 的对称轴为直线 $x=2$，

设 E（2，m），$F(t，\frac{1}{2}t^2-t-4)$，

①若以 PF 为对角线时，$\begin{cases}\frac{1}{2}+t=2+0\\-\frac{35}{8}+\frac{1}{2}t^2-t-4=m-1\end{cases}$，

解得：$t=\frac{3}{2}$，

∴$F(\frac{3}{2}，-\frac{35}{8})$，

②PE 为对角线时，$2+\frac{1}{2}=t+0$，

解得：$t=\frac{5}{2}$，当$t=\frac{5}{2}$时，$\frac{1}{2}t^2-t-4=-\frac{27}{8}$，

∴$F(\frac{5}{2}，-\frac{27}{8})$，

③若以 PD 为对角线时，$\frac{1}{2}+0=2+t$，

解得：$t=-\frac{3}{2}$，当$t=-\frac{3}{2}$时，$\frac{1}{2}t^2-t-4=\frac{11}{8}$，

∴$F(-\frac{3}{2}，-\frac{11}{8})$，

综上所述，$F(\frac{3}{2}，-\frac{35}{8})$或$F(\frac{5}{2}，-\frac{27}{8})$或$F(-\frac{3}{2}，-\frac{11}{8})$.

【点评】本题考查了二次函数综合问题，面积问题，特殊四边形问题，掌握二次函数图形的性质，二次函数的平移，平行四边形的性质是解题的关键.

2.（2023 春•青羊区校级月考）如图，抛物线 $y=ax^2+2ax+c$ 经过 B（1，0），C（0，3）两点，与 x 轴交于另一点 A，点 D 是抛物线的顶点.

（1）求抛物线的解析式及点 D 的坐标；

（2）如图 1，连接 AC，点 E 在直线 AC 上方的抛物线上，连接 EA，EC，当△EAC 面积最大时，求点 E 坐标；

（3）如图 2，连接 AC、BC，在抛物线上是否存在点 M，使∠ACM=∠BCO，若存在，求出 M 点的坐标；若不存在，请说明理由.

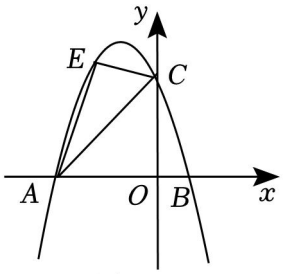


图1

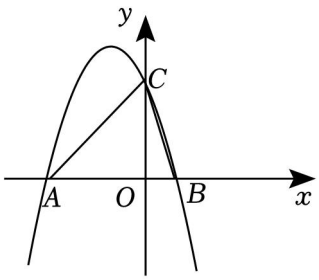


图2

【考点】二次函数综合题.

【专题】分类讨论；待定系数法；配方法；一次函数及其应用；二次函数图象及其性质；等腰三角形与直角三角形；图形的相似；运算能力；推理能力.

【分析】（1）利用待定系数法和配方法解答即可；

（2）利用待定系数法求得直线 AC 的解析式，设 E（m，$-m^2-2m+3$），过点 E 作 $EH\perp x$ 轴于点 H，交 AC 于点 F，则 F（m，$m+3$），得到 $EF=EH-FH=-m^2-3m$，理由三角形的面积公式求得△EAC 面积==$-\frac{3}{2}(m+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}$，利用二次函数的性质求得 m 值，则点 E 坐标可得；

（3）利用分类讨论的思想方法分两种情况讨论解答：设 M（x，$-x^2-2x+3$），①当 CM 交 x 轴于 G 时，利用相似三角形的判定与性质和待定系数法得到直线 CG 的解析式，再与抛物线解析式联立，解方程组即可得出结论；②当 CM 与 x 轴交于点 N 时，过 B 作 $BP\perp AC$ 于 P，利用①中的方法解答即可得出结论.

【解答】解：（1）把 B（1，0），C（0，3）代入 $y=ax^2+2ax+c$ 得：

$\begin{cases}a+2a+c=0\\c=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-1\\c=3\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$，

∵$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

∴顶点 D（-1，4）；

（2）令 $y=0$，则 $-x^2-2x+3=0$，

解得：$x=1$ 或 -3.

∴A（-3，0）.

∴$OA=3$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}-3k+b=0\\b=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=1\\b=3\end{cases}$，

∴直线 AC 的解析式为 $y=x+3$．

∵点 E 在直线 AC 上方的抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 上，

∴设 E（m，$-m^2-2m+3$），$-3<m<0$．

过点 E 作 $EH\perp x$ 轴于点 H，交 AC 于点 F，则 F（m，$m+3$），

∴$EH=-m^2-2m+3$，$FH=m+3$，

∴$EF=EH-FH=-m^2-3m$．

∴△EAC 面积$=\frac{1}{2}\times EF\cdot OA=\frac{1}{2}\times(-m^2-3m)\times3=-\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{2}m=-\frac{3}{2}(m+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}$．

∵$-\frac{3}{2}<0$，

∴当 $m=-\frac{3}{2}$时，△EAC 面积最大．

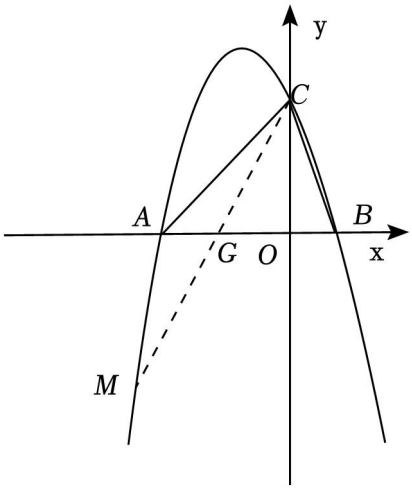
此时点 E 的坐标为（$-\frac{3}{2}$，$\frac{15}{4}$）；

（3）在抛物线上存在点 M，使∠ACM＝∠BCO，理由：

分两种情况：

设 M（x，$-x^2-2x+3$），

①如图，当 CM 交 x 轴于 G 时，



∵∠BCO＝∠ACM，

∴∠ACG＝∠OCB，

∵$OC=OA=3$，

∴∠OCA＝∠OAC＝45°，

∴∠BCM＝45°，

∵∠ACB＝∠BCM+∠ACG，∠BGC＝∠OAC+∠ACG，

∴∠ACB＝∠BGC，

∵∠CBG＝∠CBA，

∴△BCG∽△BAC，

∴$\frac{BG}{BC}=\frac{BC}{BA}$，

∵OB＝1，OC＝3，

∴BC＝$\sqrt{10}$，

设 G（﹣t，0），

∴$\frac{t+1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

∴t＝$\frac{3}{2}$，

∴G（$-\frac{3}{2}$，0），

设直线 CG 的解析式为 y＝ex+f，

∴$\begin{cases}-\frac{3}{2}e+f=0\\ f=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}e=2\\ f=3\end{cases}$.

∴直线 CG 的解析式为：y＝2x+3，

则$\begin{cases}y=2x+3\\ y=-x^2-2x+3\end{cases}$，

∴﹣x^2﹣2x+3＝2x+3，

x^2+4x＝0，

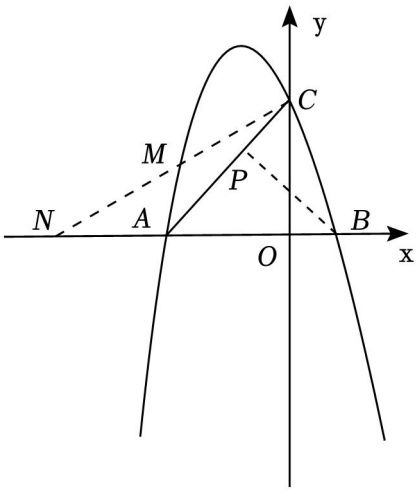
x（x+4）＝0，

x_1＝0（舍），x_2＝﹣4，

当 x＝﹣4 时，y＝﹣5，

∴M（﹣4，﹣5）；

②当 CM 与 x 轴交于点 N 时，过 B 作 BP⊥AC 于 P，如图，



∵∠OAC＝45°，

∴△ABP 是等腰直角三角形，

∵AB＝OA+OB＝3+1＝4，

∴AP＝BP= $\frac{4}{\sqrt{2}}$ =2$\sqrt{2}$，

∵AC= $\sqrt{3^2+3^2}$ =3$\sqrt{2}$，

∴CP＝AC﹣AP= $\sqrt{2}$，

∵∠BCO＝∠ACM，

∴∠ACB＝∠OCM，

∵∠BPC＝∠COA＝90°，

∴△BCP∽△NCO，

∴$\frac{BP}{NO}=\frac{CP}{CO}$,

∴$\frac{2\sqrt{2}}{NO}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

∴NO＝6，

∴N（﹣6，0），

设直线 NC 的解析式为 y＝dx+n，

∴$\begin{cases}-6d+n=0\\n=3\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}d=\frac{1}{2}\\n=3\end{cases}$.

∴直线 NC 的解析式为：y= $\frac{1}{2}x$+3，

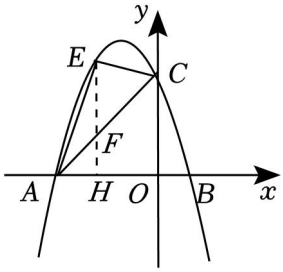
联立方程组得：$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=-x^2-2x+3 \end{cases}$，

解得：$x_1=0$，$x_2=-\frac{5}{2}$，

当 $x=-\frac{5}{2}$时，$y=\frac{7}{4}$，

∴M（$-\frac{5}{2}$，$\frac{7}{4}$），

综上所述，存在点 M（﹣4，﹣5）或（$-\frac{5}{2}$，$\frac{7}{4}$），使得∠ACM＝∠BCO．



【点评】本题主要考查了二次函数的图象和性质，抛物线上点的坐标的特征，一次函数的性质，一次函数图象上点的坐标的特征，待定系数法确定函数的解析式，配方法，相似三角形的判定与性质，利用点的坐标表示出相应线段的长度是解题的关键．

3．（2023•长沙二模）如图 1，抛物线 $y=ax^2+3ax$（a 为常数，$a<0$）与 x 轴交于 O，A 两点，点 B 为抛物线的顶点，点 D 是线段 OA 上的一个动点，连接 BD 并延长与过 O，A，B 三点的⊙P 相交于点 C，过点 C 作⊙P 的切线交 x 轴于点 E．

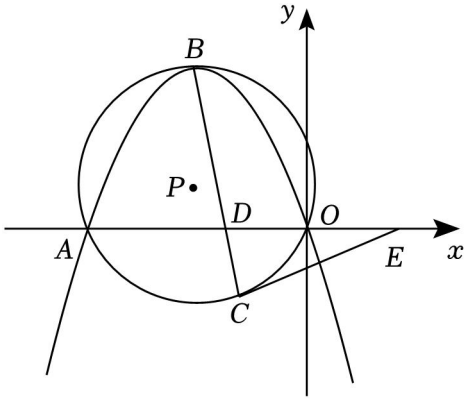


图1

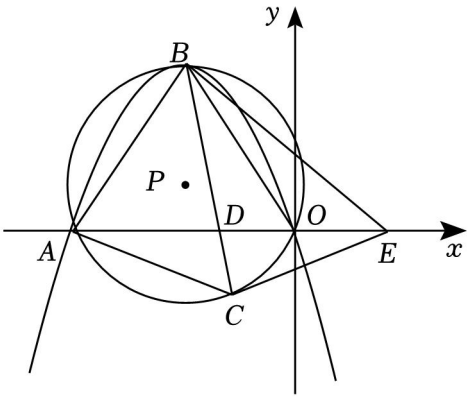


图2

（1）①求点 A 的坐标；②求证：$CE=DE$；

（2）如图 2，连接 AB，AC，BE，BO，当$a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∠CAE＝∠OBE 时，

①求证：$AB^2=AC\cdot BE$；②求$\frac{1}{OD}-\frac{1}{OE}$的值．

【考点】二次函数综合题.

【专题】代数几何综合题；运算能力；推理能力.

【分析】（1）①令 $y=0$，可得 $ax(x+3)=0$，则 A 点坐标可求出；

②连接 PC，连接 BP 延长交 x 轴于点 M，由切线的性质可证得 $\angle ECD=\angle CDE$，则 $CE=DE$；

（2）①由 $y=ax^2+3ax=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-2\sqrt{3}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 可得 $A(-3,0)$，$B(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，则 $OA=3$，$AB=OB=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=3$，$\triangle OAB$ 是等边三角形，证明 $\triangle BAC\backsim\triangle EBA$，根据相似三角形的性质可得结论；

②设 $OE=m$，点 D 的坐标为 $(t,0)$，由 $\angle CAE=\angle OBE$ 可得 $\angle CBO=\angle OBE$，由角平分线的性质得 $\frac{BD}{BE}=\frac{OD}{OE}$，则 $m=\frac{-3t}{t+3}$，即可求解.

【解答】（1）①解：令 $y=ax^2+3ax=0$，

$\therefore ax(x+3)=0$，解得 $x=0$ 或 -3，

$\therefore A(-3,0)$；

②证明：如图，连接 PC，连接 PB，延长交 x 轴于点 M，

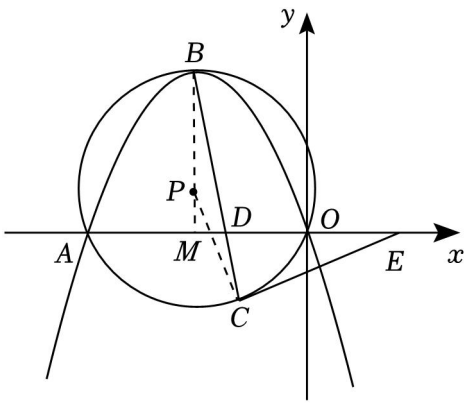


图1

$\because \odot P$ 过 O、A、B 三点，B 为顶点，

$\therefore PM\perp OA$，$\angle PBC+\angle BDM=90^\circ$，

又 $\because PC=PB$，

$\therefore \angle PCB=\angle PBC$，

$\because CE$ 为切线，

$\therefore \angle PCB+\angle ECD=90^\circ$，

又 $\because \angle BDM=\angle CDE$，

∴∠ECD＝∠CDE，

∴CE＝DE；

（2）①证明：如图，

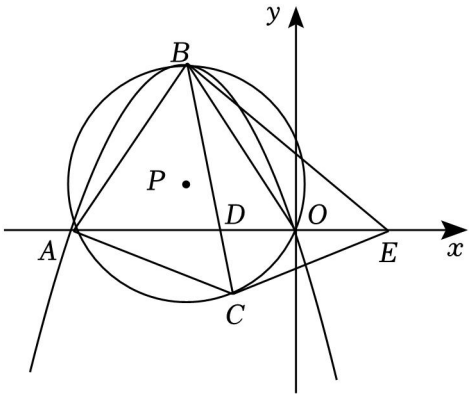


图2

∵$a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴$y=ax^2+3ax=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-2\sqrt{3}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

令 y＝0，可得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x+3)=0$，

∴x＝0 或﹣3，

∴A（﹣3，0），B（$-\frac{3}{2}$，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$），

∴OA＝3，$AB=OB=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=3$，

∴△OAB 是等边三角形，

∴∠BAO＝∠ABO＝∠AOB＝60°，

∴∠ACB＝∠AOB＝60°，

∴∠ACB＝∠BAE＝60°，

∵∠CAE＝∠OBE，∠BAO＝∠ABO＝60°，

∴∠BAO+∠CAE＝∠$AEBA$，BO+∠OBE＝60°，

∴∠BAC＝∠EBA，

∴△BAC∽△EBA，

∴$\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{AB}$，

∴$AB^2=AC\cdot BE$；

②解：设 OE＝m，点 D 的坐标为（t，0），

∵∠CAE＝∠CBO，∠CAE＝∠OBE，

∴∠CBO＝∠EBO，

由角平分线成比例定理可得：$\frac{BD}{BE}=\frac{OD}{OE}$，

∵$BD=\sqrt{(t+\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{t^2+3t+9}$，

$BE=\sqrt{(m+\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{m^2+3m+9}$，，

∴$\frac{\sqrt{t^2+3t+9}}{\sqrt{m^2+3m+9}}=\frac{-t}{m}$，

∴$m=\frac{-3t}{t+3}$或 t（舍去），

∴$\frac{1}{m}=\frac{t+3}{3t}=\frac{1}{3}+\frac{1}{t}$，

∴$\frac{1}{OD}-\frac{1}{OE}=\frac{1}{t}-\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$.

【点评】本题是二次函数与圆的综合问题，考查了二次函数图象与 x 轴的交点坐标、切线的性质、等腰三角形的判定、圆周角定理等知识．把圆的知识镶嵌其中，会灵活运用圆的性质进行计算是解题的关键．

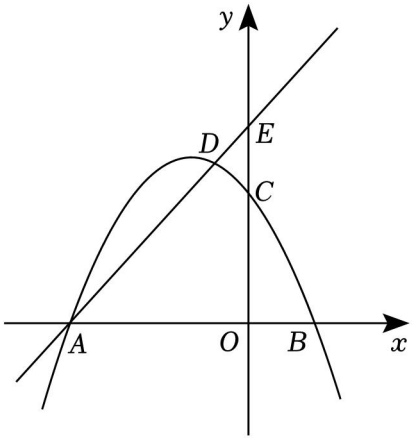
4．（2023•和平区模拟）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A（﹣4，0）和点 B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，经过点 A 的直线与抛物线交于点 D（﹣1，3），与 y 轴交于点 E．

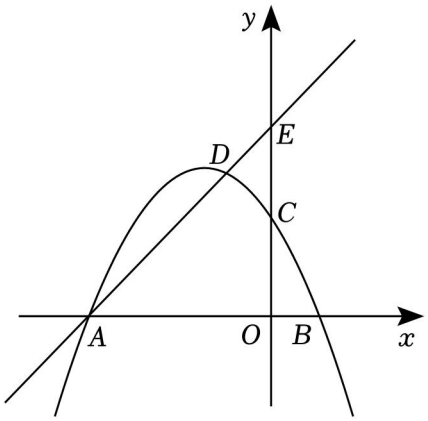
（1）求直线 AD 的表达式；

（2）求抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；

（3）点 F 是 x 轴下方抛物线上的一个动点，使△ADF 的面积为$\frac{27}{2}$，请直接写出点 F 的坐标为 （﹣7，﹣12）或（2，﹣3）；

（4）点 M 是线段 OA 上一动点，点 N 是线段 AE 上一动点，且 $AM=EN$，请直接写出 $EM+ON$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$．





备用图

【考点】二次函数综合题.

【专题】代数几何综合题；运算能力；推理能力.

【分析】（1）利用待定系数法可求出一次函数解析式；

（2）先利用待定系数法求出抛物线解析式，再化为顶点式即可得顶点 P 的坐标；

（3）过点 F 作 $FG\parallel AD$ 交 x 轴于 G，连接 DG，则 $S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADG}$，根据△$ADF$ 的面积为$\frac{27}{2}$求出 AG，则 $G(5,0)$，可得直线 FG 的表达式为 $y=x-5$，联立抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$ 即可求解；

（4）过点 E 作 $EH\parallel x$ 轴，$EH=AE$，证明△EHN≌△AEM（SAS），可得 $HN=EM$，由三角形的三边关系可得 $EM+ON=HN+ON\geqslant OH$，则当 H、N、O 三点共线时，$EM+ON$ 的值最小，最小为 OH 的长，利用勾股定理即可求解.

【解答】解：（1）设直线 AD 的表达式为 $y=kx+c$，

∵A（－4，0），D（－1，3），

∴$\begin{cases}-4k+c=0\\-k+c=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\c=4\end{cases}$，

∴直线 AD 的表达式为 $y=x+4$；

（2）抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）过 A（－4，0），D（－1，3），

∴$\begin{cases}16a-4b+2=0\\a-b+2=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$，

∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$，

∵$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=-\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{8}$，

∴顶点 P 的坐标为（$-\frac{3}{2}$，$\frac{25}{8}$）；

（3）如图 1，过点 F 作 $FG\parallel AD$ 交 x 轴于 G，连接 DG，

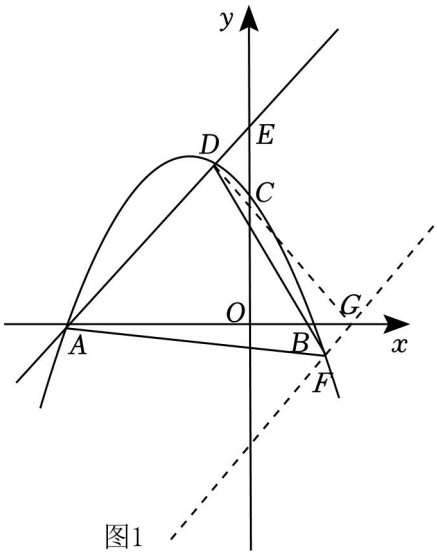


图1

∴$S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADG}$，

∵$\triangle ADF$ 的面积为$\frac{27}{2}$，

∴$\frac{1}{2}AG\times 3=\frac{27}{2}$，解得 $AG=9$，

∵A（﹣4，0），

∴G（5，0），

∵$FG\parallel AD$，直线 AD 的表达式为 $y=x+4$，

∴设直线 FG 的表达式为 $y=x+m$，

∴$5+m=0$，解得 $m=-5$，

∴直线 FG 的表达式为 $y=x-5$，

联立 $y=x-5$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$ 得$\begin{cases}y=x-5\\y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x_1=-7\\y_1=-12\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=2\\y_2=-3\end{cases}$，

∴点 F 的坐标为（﹣7，﹣12）或（2，﹣3），

故答案为：（﹣7，﹣12）或（2，﹣3）；

（4）如图 2，过点 E 作 $EH\parallel x$ 轴，$EH=AE$，连接 OH，NH，

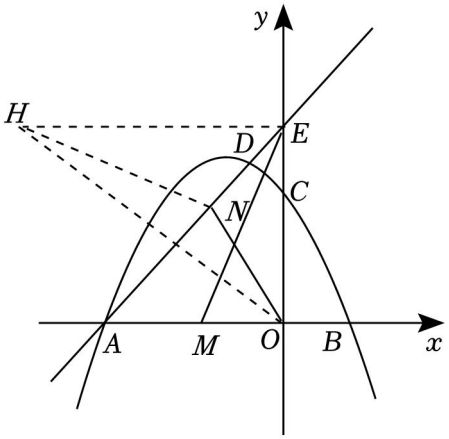


图2

∵EH∥x轴，

∴∠HEN＝∠EAM，

∵EH＝AE，EN＝AM，

∴△EHN≌△AEM（SAS），

∴HN＝EM，

∵EM+ON＝HN+ON≥OH，

∴当H、N、O三点共线时，EM+ON的值最小，最小为OH的长，

∵直线AD的表达式为y＝x+4，

∴E（0，4），

∴AE= $\sqrt{4^2+4^2}$ =4$\sqrt{2}$，

∴EH＝4$\sqrt{2}$，

∴OH= $\sqrt{EH^2+OE^2}$ = $\sqrt{(4\sqrt{2})^2+4^2}$ =4$\sqrt{3}$，

∴EM+ON的最小值为4$\sqrt{3}$，

故答案为：4$\sqrt{3}$.

【点评】本题是二次函数综合题，主要考查了二次函数的图象和性质，一次函数的图象与性质，待定系数法确定函数的解析式，三角形的面积，全等三角形的判定和性质，掌握二次函数的图象和性质以及一次函数的图象与性质是解题的关键.

5.（2023•花山区一模）已知抛物线y＝x^2+ax+b的顶点坐标为（1，2）.

（1）求a，b的值；

（2）将抛物线y＝x^2+ax+b向下平移m个单位得到抛物线C_1，存在点（c，1）在C_1上，求m的取值范围；

（3）抛物线 C_2：$y=(x-3)^2+k$ 经过点（1，2），直线 $y=n$（$n>2$）与抛物线 $y=x^2+ax+b$ 相交于 A、B（点 A 在点 B 的左侧），与 C_2 相交于点 C、D（点 C 在点 D 的左侧），求 $AD-BC$ 的值．

【考点】二次函数图象与几何变换；二次函数的性质；二次函数图象上点的坐标特征．

【专题】二次函数图象及其性质；应用意识．

【分析】（1）根据对称轴公式以及当 $x=1$ 时 $y=2$，用待定系数法求函数解析式；

（2）根据（1）可知抛物线 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，再由平移性质得出抛物线 C_1 解析式，然后把点（c，1）代入抛物线 C_1，再根据方程有解得出 m 的取值范围；

（3）先求出抛物线 C_2 解析式，再求出 A，B，C，D 坐标，然后求值即可．

【解答】解：（1）由题意得，$\begin{cases}-\frac{a}{2}=1\\1+a+b=2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$；

（2）由（1）知，抛物线 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，

将其向下平移 m 个单位得到抛物线 C_1，

∴抛物线 C_1 的解析式为 $y=(x-1)^2+2-m$，

∵存在点（c，1）在 C_1 上，

∴$(c-1)^2+2-m=1$，即 $(c-1)^2=m-1$ 有实数根，

∴$m-1\geqslant 0$，

解得 $m\geqslant 1$，

∴m 的取值范围为 $m\geqslant 1$；

（3）∵抛物线 C_2：$y=(x-3)^2+k$ 经过点（1，2），

∴$(1-3)^2+k=2$，

解得 $k=-2$，

∴抛物线 C_2 的解析式为 $y=(x-3)^2-2$，

把 $y=n$（$n>2$）代入到 $y=(x-1)^2+2$ 中，

得 $n=(x-1)^2+2$，

解得 $x=1-\sqrt{n-2}$或 $x=1+\sqrt{n-2}$，

∴A（$1-\sqrt{n-2}$，n），B（$1+\sqrt{n-2}$，n），

把 $y=n$（$n>2$）代入到 $y=(x-3)^2-2$ 中，

得 $n=(x-3)^2-2$，

解得 $x=3-\sqrt{n+2}$ 或 $x=3+\sqrt{n+2}$，

∴$C(3-\sqrt{n+2}, n)$，$D(3+\sqrt{n+2}, n)$，

∴$AD=(3+\sqrt{n+2})-(1-\sqrt{n-2})=2+\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}$，

$BC=(1+\sqrt{n-2})-(3-\sqrt{n+2})=-2+\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}$，

∴$AD-BC=(2+\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})-(-2+\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2})=4$.

【点评】本题考查二次函数的几何变换，二次函数的性质以及待定系数法求函数解析式，直线和抛物线交点，关键对平移性质的应用.

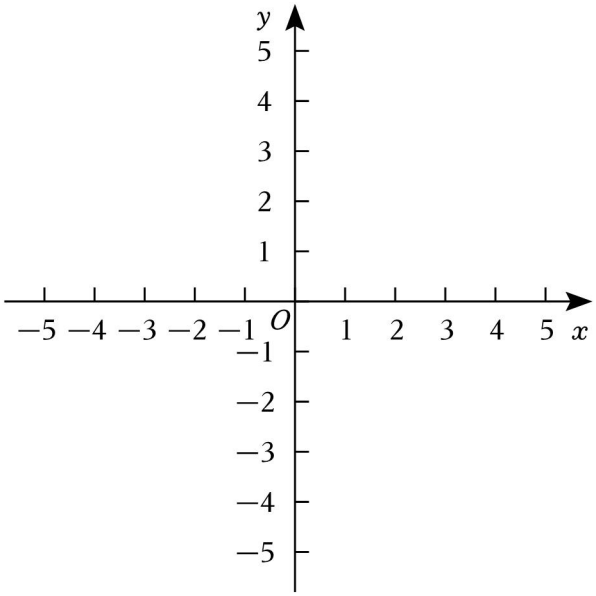
6.（2023•奉贤区一模）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 的对称轴为直线 $x=2$，顶点为 A，与 x 轴分别交于点 B 和点 C（点 B 在点 C 的左边），与 y 轴交于点 D，其中点 C 的坐标为（3，0）.

（1）求抛物线的表达式；

（2）将抛物线向左或向右平移，将平移后抛物线的顶点记为 E，联结 DE.

①如果 $DE\parallel AC$，求四边形 $ACDE$ 的面积；

②如果点 E 在直线 DC 上，点 Q 在平移后抛物线的对称轴上，当 $\angle DQE=\angle CDQ$ 时，求点 Q 的坐标.



【考点】二次函数综合题.

【专题】数形结合；分类讨论；待定系数法；配方法；二次函数图象及其性质；等腰三角形与直角三角形；多边形与平行四边形；运算能力；推理能力.

【分析】（1）利用待定系数法解答即可；

（2）①依据题意画出图形，利用 A，C，D 的坐标，等腰直角三角形的判定与性质和平行线的性质求得点 E，F 坐标，再利用四边形 $ACDE$ 的面积＝$S_{平行四边形EFCA}+S_{\triangle DFC}$ 解答即可；

②依据题意画出图形，利用 A，C，D 的坐标，等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理求得点 E 坐标和线段 DE，再利用等腰三角形的判定与性质求得线段 FQ，则结论可求．

【解答】解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 的对称轴为直线 $x=2$，经过点 C（3，0），

∴$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\\9a+3b+3=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$，

∴抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$；

（2）①∵$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

∴A（2，－1）．

设抛物线的对称轴交 x 轴于点 G，

∴$AG=1$．

令 $x=0$，则 $y=3$，

∴D（0，3），

∴$OD=3$．

令 $y=0$，则 $x^2-4x+3=0$，

解得：$x=1$ 或 $x=3$，

∴B（1，0）．

如果 $DE\parallel AC$，需将抛物线向左平移，设 DE 交 x 轴于点 F，平移后的抛物线对称轴交 x 轴于点 H，如图，

∵点 C 的坐标为（3，0），

∴$OC=3$．

由题意：$\angle ACB=45°$，

∵$DE\parallel AC$，

∴$\angle DFC=\angle ACB=45°$．

∴$OF=OD=3$，

∴F（－3，0），

由题意：$EH=1$，

∴$FH=EH=1$，

∴E（﹣4，﹣1）.

∵$AE\parallel x$ 轴，$DE\parallel AC$，

∴四边形 $EFCA$ 为平行四边形，

∵$AE=2-(-4)=6$，

∴$S_{平行四边形EFCA}=6\times1=6$.

∵$S_{\triangle DFC}=\frac{1}{2}\times FC\cdot OD=\frac{1}{2}\times6\times3=9$，

∴四边形 $ACDE$ 的面积$=S_{平行四边形EFCA}+S_{\triangle DFC}=6+9=15$；

②如果点 E 在直线 DC 上，点 Q 在平移后抛物线的对称轴上，$\angle DQE=\angle CDQ$，如图，

当点 Q 在 x 轴的下方时，

设平移后的抛物线的对称轴交 x 轴于 F，由题意：$EF=1$.

∵$OD=OC=3$，

∴$\angle ODC=\angle OCD=45°$，

∴$\angle FCE=\angle OCD=45°$，

∴$CF=EF=1$，

∴E（4，﹣1）.

∵$CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=3\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{2}$，

∴$DE=CD+CE=4\sqrt{2}$.

∵$\angle DQE=\angle CDQ$，

∴$EQ=DE=4\sqrt{2}$，

∴$QF=EF+EQ=4\sqrt{2}+1$，

∴Q（4，$-4\sqrt{2}-1$）；

当点 Q 在 x 轴的下方时，此时为点 Q'，

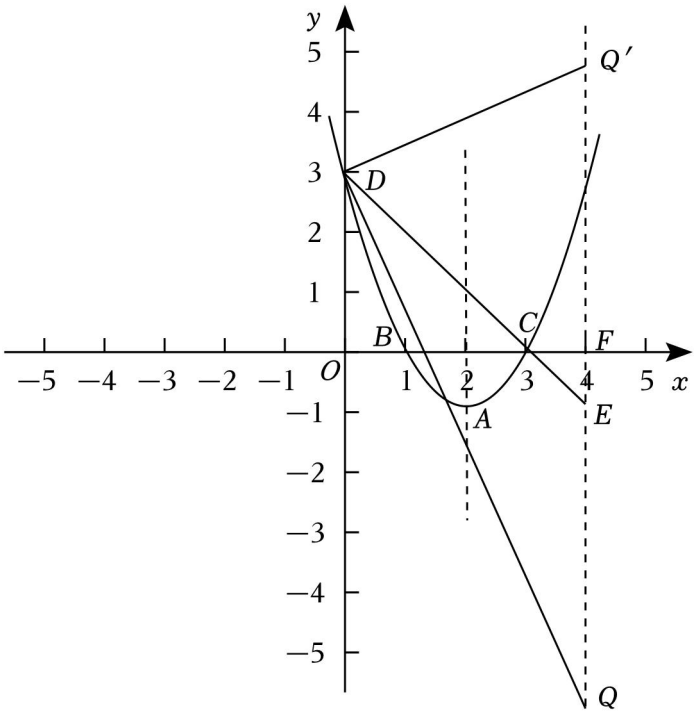
∵$\angle DQ'E=\angle CDQ'$，

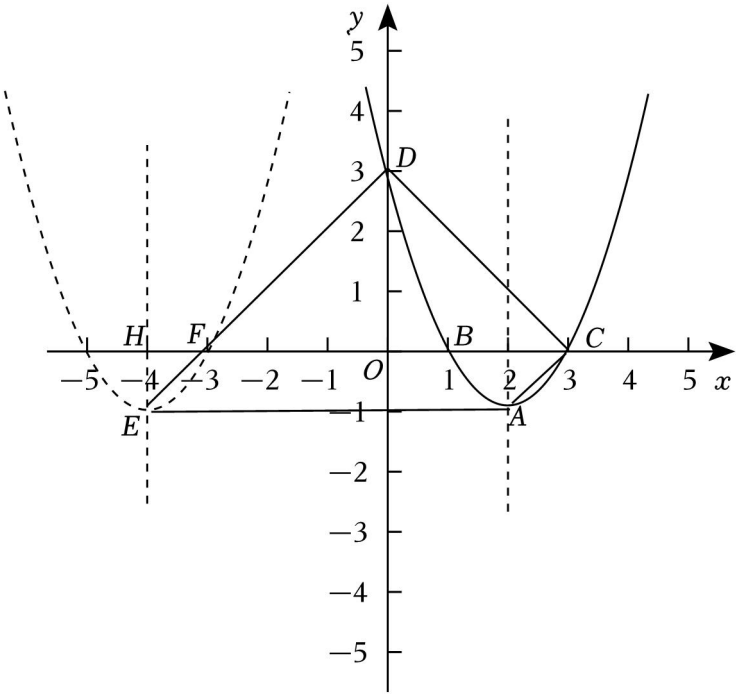
∴$EQ'=DE=4\sqrt{2}$，

∴$Q'F=EQ'-EF=4\sqrt{2}-1$，

∴Q'（4，$4\sqrt{2}-1$）.

综上，当$\angle DQE=\angle CDQ$ 时，点 Q 的坐标为（4，$-4\sqrt{2}-1$）或（4，$4\sqrt{2}-1$）.





【点评】本题是二次函数综合题，考查了二次函数图象和性质，待定系数法，三角形面积，直角三角形性质，勾股定理，相似三角形判定和性质等，解题的关键是熟练运用分类讨论思想和方程的思想解决问题.

7.（2022 秋•汉阳区期中）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$有实数根，$k$ 为正整数.

（1）求 k 的值；

（2）当此方程有两个非零的整数根时，关于 x 的二次函数 $y=x^2+2x+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$的图象记为 M，

将 M 向下平移 9 个单位，求平移后的图象表达式；

（3）设（2）的图象 M 与 y 轴的交点为 C，当图象 M 在 y 轴右侧部分沿过点 C 与 x 轴平行的直线 m 折叠后，与未折叠的部分构成一个新图象，当直线 $y=\frac{1}{3}x+n$ 与新图象有三个公共点时，直接写出 n 的取值范围？

【考点】二次函数综合题．

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识．

【分析】（1）利用一元二次方程判别式 $\Delta\geqslant 0$，确定 k 的取值范围，从而求出满足条件的 k 的值；

（2）将（1）中的 k 值代入，确定符合条件的具体 k 的值，再求解即可；

（3）先求出新的函数解析式为 $y=\begin{cases}-x^2-2x+1(x\geq 0)\\x^2+2x+1(x<0)\end{cases}$，画出函数图象，结合函数图象，确定直线与函数图象有两个交点时的临界值，再求 n 的范围即可．

【解答】解：（1）$\because x^2+2x+\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$有实数根，

$\therefore \Delta=4-4(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})\geqslant 0$，

$\therefore k\leqslant 3$，

$\because k$ 是正整数，

$\therefore k=1$ 或 $k=2$ 或 $k=3$，

$\therefore k$ 的值为 1 或 2 或 3；

（2）当 $k=1$ 时，$x^2+2x=0$，

解得 $x=0$ 或 $x=-2$，不符合题意；

当 $k=3$ 时，$x^2+2x+1=0$，

解得 $x=-1$，

$\therefore$方程有两个相等的整数根；

当 $k=2$ 时，$x^2+2x+\frac{1}{2}=0$，

解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ 或 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$，不符合题意；

$\therefore y=x^2+2x+1$，

$\therefore$将 M 向下平移 9 个单位后的函数解析式为 $y=x^2+2x-8$；

（3）令 $x=0$，则 $y=1$，

∴C（0，1），

设折叠后的函数图象上任意一点为（x，y），该点关于 $y=1$ 的对称点为（x，$2-y$），

∴$2-y=x^2+2x+1$，

∴$y=-x^2-2x+1$，

∴新的函数解析式为 $y=\begin{cases}-x^2-2x+1(x\geq 0)\\x^2+2x+1(x<0)\end{cases}$，

当直线 $y=\frac{1}{3}x+n$ 经过点 C 时，$n=1$，

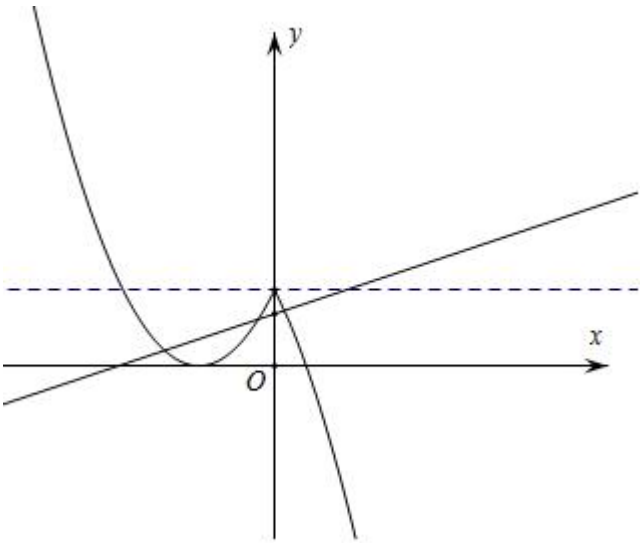
此时直线与新图象有两个交点，

当 $x^2+2x+1=\frac{1}{3}x+n$ 有唯一交点时，直线与新图象有两个交点，

此时$\frac{25}{9}-4(1-n)=0$，

解得 $n=\frac{11}{36}$，

∴$\frac{11}{36}<n<1$ 时，直线与新图象有三个公共点．



【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，能够根据图象的翻折，求出新函数的解析式，数形结合解题是关键．

8．（2022•德州）如图，题目中的黑色部分是被墨水污染了无法辨认的文字，导致题目缺少一个条件而无法解答，经查询结果发现，该二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+1$．

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A（0，1），B（1，－2），[redacted]． 求该二次函数的解析式．

（1）请根据已有信息添加一个适当的条件：<u>　C（2，－3）（答案不唯一）　</u>；

（2）当函数值 $y<6$ 时，自变量 x 的取值范围：___$-1<x<5$___；

（3）如图 1，将函数 $y=x^2-4x+1$（$x<0$）的图象向右平移 4 个单位长度，与 $y=x^2-4x+1$（$x\geqslant 4$）的图象组成一个新的函数图象，记为 L．若点 P（3，m）在 L 上，求 m 的值；

（4）如图 2，在（3）的条件下，点 A 的坐标为（2，0），在 L 上是否存在点 Q，使得 $S_{\triangle OAQ}=9$．若存在，求出所有满足条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．

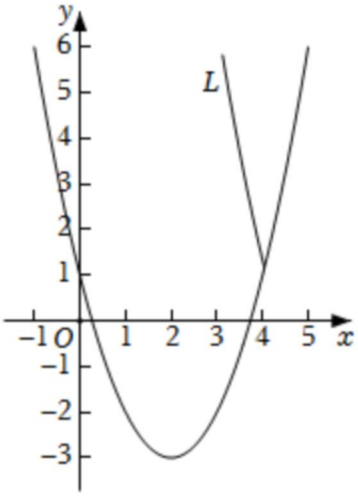


图1

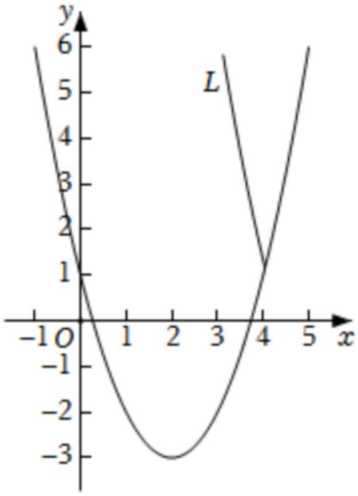


图2

【考点】二次函数综合题．

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识．

【分析】（1）只需填一个在抛物线图象上的点的坐标即可；

（2）求出 $y=6$ 时，对应的 x 值，再结合图象写出 x 的取值范围即可；

（3）求出抛物线向右平移 4 个单位后的解析式为 $y=(x-6)^2-3$，根据题意可知 $x=3$ 时，P 点在抛物线 $y=(x-6)^2-3$ 的部分上，再求 m 的值即可；

（4）分两种情况讨论：当 Q 点在抛物线 $y=(x-6)^2-3$ 的部分上时，设 $Q(t,t^2-12t+33)$，由 $S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times 2\times(t^2-12t+33)=9$，求出 Q 点坐标即可；当 Q 点在抛物线 $y=x^2-4x+1$ 的部分上时，设 $Q(m,m^2-4m+1)$，由 $S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times 2\times(m^2-4m+1)=9$，求出 Q 点坐标即可．

【解答】解：（1）C（2，-3），

故答案为：C（2，-3）（答案不唯一）；

（2）∵$y=x^2-4x+1$，

∴当 $x^2-4x+1=6$ 时，解得 $x=5$ 或 $x=-1$，

∴当 $y<6$ 时，$-1<x<5$，

故答案为：$-1<x<5$；

（3）∵$y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$，

∴抛物线向右平移 4 个单位后的解析式为 $y=(x-6)^2-3$，

当 $x=3$ 时，点 P 在抛物线 $y=(x-6)^2-3$ 的部分上，

∴$m=6$；

（4）存在点 Q，使得 $S_{\triangle OAQ}=9$，理由如下：

当 Q 点在抛物线 $y=(x-6)^2-3$ 的部分上时，设 $Q(t,\ t^2-12t+33)$，

∴$S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times2\times(t^2-12t+33)=9$，

解得 $t=6+2\sqrt{3}$或 $t=6-2\sqrt{3}$，

∴$t<4$，

∴$t=6-2\sqrt{3}$，

∴$Q(6-2\sqrt{3},\ 9)$；

当 Q 点在抛物线 $y=x^2-4x+1$ 的部分上时，设 $Q(m,\ m^2-4m+1)$，

∴$S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times2\times(m^2-4m+1)=9$，

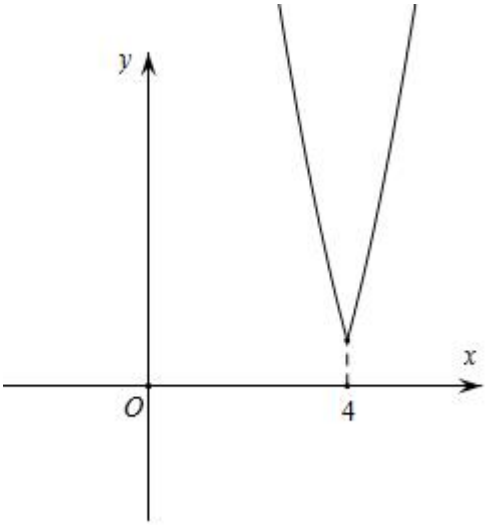
解得 $m=2\sqrt{3}+2$ 或 $m=-2\sqrt{3}+2$，

∵$m\geqslant4$，

∴$m=2\sqrt{3}+2$，

∴$Q(2\sqrt{3}+2,\ 9)$；

综上所述：Q 点坐标为 $(6-2\sqrt{3},\ 9)$ 或 $(2\sqrt{3}+2,\ 9)$.



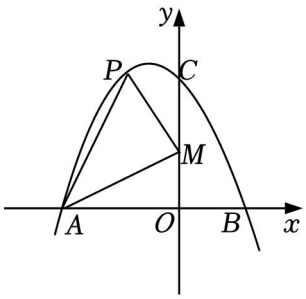
【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象平移的性质，数形结合解题是关键．

9．（2022秋•前郭县期中）如图，对称轴为直线 $x=-1$ 的抛物线 $y=a(x-h)^2+k$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A、B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，其中点 B 的坐标为（2，0），点 C 的坐标为（0，4）．

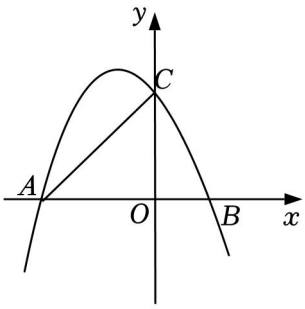
（1）求该抛物线的解析式；

（2）如图①，若点 P 为抛物线上第二象限内的一点，且到 y 轴的距离是 2．点 M 为线段 CO 上的一个动点，求△APM 周长的最小值；

（3）如图②，将原抛物线绕点 A 旋转 180°，得新抛物线 y'，在新抛物线 y' 的对称轴上是否存在点 Q，使得△ACQ 为等腰三角形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由．



图①



图②

【考点】二次函数综合题．

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识．

【分析】（1）先根据对称轴确定 h 的值，再将 B（2，0），C（0，4）代入，求函数的解析式即可；

（2）先确定 P 点坐标，作 A 点关于 y 轴的对称点为 A'（4，0），连接 PA' 与 y 轴交于点 M，则有 $AM+PM+AP\geqslant AP+A'P$，所以△APM 周长的最小值为 $PA'+AP$；

（3）先求出旋转后 C 点旋转后的点 C'（-12，-4），B'（-10，0），再用待定系数法求旋转后的抛物线解析式 $y=\frac{1}{2}x^2+7x+20$，设 Q（-7，t），分别求出 $AC=4\sqrt{2}$，$AQ=\sqrt{9+t^2}$，$CQ=\sqrt{49+(t-4)^2}$，再根据等腰三角形边的性质，分三种情况讨论即可求解．

【解答】解：（1）∵对称轴为直线 $x=-1$，

∴$h=-1$，

∴$y=a(x+1)^2+k$，

将 B（2，0），C（0，4）代入，

$\therefore\begin{cases}9a+k=0\\a+k=4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\k=\frac{9}{2}\end{cases}$，

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{9}{2}$;

（2）∵P 点到 y 轴的距离是 2，

∴P 点横坐标为﹣2，

∴P（﹣2，4），

令 $y=0$，则$-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{9}{2}=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=-4$，

∴A（﹣4，0），B（2，0），

∴A 点关于 y 轴的对称点为 A'（4，0），

连接 PA'与 y 轴交于点 M，

∴$AM=A'M$，

∴$AM+PM+AP=AP+A'M+PM\geqslant AP+A'P$，

∴$PA'=2\sqrt{13}$，$AP=2\sqrt{5}$，

∴△APM 周长的最小值为 $2\sqrt{13}+2\sqrt{5}$；

（3）存在点 Q，使得△ACQ 为等腰三角形，理由如下：

∵C（0，4），B（2，0），

∴C 点旋转后的点 C'（﹣8，﹣4），B'（﹣10，0），

设旋转后的抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

$\therefore\begin{cases}64a-8b+c=-4\\100a-10b+c=0\\16a-4b+c=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=7\\c=20\end{cases}$，

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+7x+20$，

∵$y=\frac{1}{2}x^2+7x+20=\frac{1}{2}(x+7)^2-\frac{9}{2}$

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-7$，

设 Q（﹣7，t），

∴$AC=4\sqrt{2}$，$AQ=\sqrt{9+t^2}$，$CQ=\sqrt{49+(t-4)^2}$，

当 $AC=AQ$ 时，$4\sqrt{2}=\sqrt{9+t^2}$，

解得 $t=\sqrt{23}$或 $t=\sqrt{23}$，

∴Q（﹣7，$\sqrt{23}$）或（﹣7，$-\sqrt{23}$）；

当 $AC=CQ$ 时，$4\sqrt{2}=\sqrt{49+(t-4)^2}$，

此时不存在；

当 $AQ=CQ$ 时，$\sqrt{9+t^2}=\sqrt{49+(t-4)^2}$，

解得 $t=7$，

∴Q（﹣7，7）；

综上所述：Q 点坐标为（﹣7，$\sqrt{23}$）或（﹣7，$-\sqrt{23}$）或（﹣7，7）.

【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象旋转的性质，等腰三角形的性质，轴对称求最短距离是解题的关键.

10.（2022 秋•越秀区校级期中）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 G：$y=-x^2+2mx-2m-3$ 的顶点为点 P.

（1）顶点 P 的坐标为 <u>（m，m^2-2m-3）</u>；（用含 m 的式子表示）

（2）直线 l：$y=x-3$ 分别与 x 轴和 y 轴交于点 A 和点 B，点 P 在第四象限.

①当△PAB 面积最大时，求抛物线 G 的解析式；

②在①的条件下，把抛物线 G 沿 y 轴向上平移 t（$t>0$）个单位长度得到抛物线 G'，若抛物线 G'与△PAB 的边有且只有两个交点，求实数 t 的取值范围.

【考点】二次函数综合题.

【专题】二次函数图象及其性质；几何直观；运算能力；应用意识.

【分析】（1）将解析式变形为顶点式即可求解；

（2）①过点 P 作 $PQ\parallel y$ 轴交 AB 于点 Q，则有 P（m，m^2-2m-3），Q（m，$m-3$），得到 $S_{\triangle APB}=-\frac{3}{2}(m-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8}$，当 $m=\frac{3}{2}$时，△PAB 面积有最大值，此时 P（$\frac{3}{2}$，$-\frac{15}{4}$），再用待定系数法求函数的解析式即可；

②平移后的抛物线解析式为 $y=-(x-\frac{3}{2})^2-\frac{15}{4}+t$，当抛物线 G'与直线 AB 有一个交点时，$t=2$，此时抛物线 G'与△PAB 的边有三个交点，即可得 $0<t<2$ 时，抛物线 G'与△PAB 的边有两个交点；当抛物线 G'经过 B 点时，$t=3$，此时抛物线 G'与△PAB 的边有三

个交点；当抛物线 G'经过 A 点时，$t=6$，此时抛物线 G'与△PAB 的边有一个交点，即可得 $3<t<6$ 时，抛物线 G'与△PAB 的边有两个交点．

【解答】解：（1）∵$y=-x^2+2mx-2m-3=-(x-m)^2+m^2-2m-3$，

∴$P(m, m^2-2m-3)$，

故答案为：(m, m^2-2m-3)；

（2）①令 $x=0$，则 $y=-3$，

∴$B(0, -3)$，

令 $y=0$，则 $x=3$，

∴$A(3, 0)$，

过点 P 作 $PQ\parallel y$ 轴交 AB 于点 Q，

∵$P(m, m^2-2m-3)$，则 $Q(m, m-3)$，

∴$PQ=m-3-(m^2-2m-3)=-m^2+3m$，

∴$S_{\triangle APB}=-\frac{1}{2}\times(m^2-3m)\times3=-\frac{3}{2}(m-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8}$，

∴当 $m=\frac{3}{2}$时，△PAB 面积有最大值，

此时 $P(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$，

∴$y=-x^2+3x-6$；

②∵$y=-x^2+3x-6=-(x-\frac{3}{2})^2-\frac{15}{4}$，

∴平移后的抛物线解析式为 $y=-(x-\frac{3}{2})^2-\frac{15}{4}+t$，

当抛物线 G'与直线 AB 有一个交点时，$x-3=-(x-\frac{3}{2})^2-\frac{15}{4}+t$，

整理得，$x^2-2x+3-t=0$，

∴$\Delta=4-4(3-t)=0$，解得 $t=2$，

此时抛物线 G'与△PAB 的边有三个交点；

∴$0<t<2$ 时，抛物线 G'与△PAB 的边有两个交点；

当抛物线 G'经过 B 点时，$t-6=-3$，解得 $t=3$，

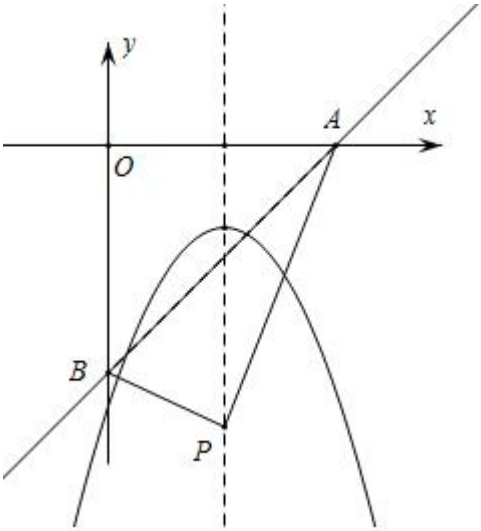
此时抛物线 G'与△PAB 的边有三个交点；

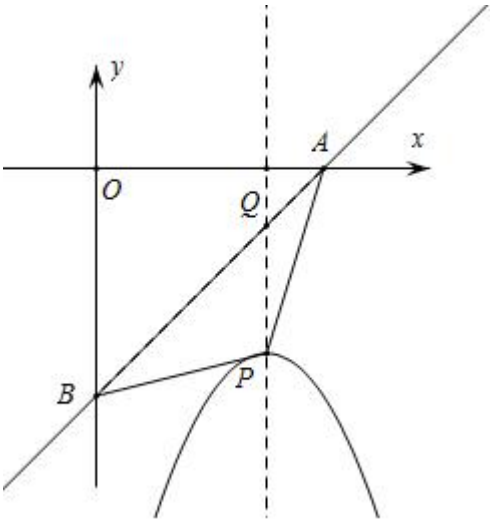
当抛物线 G'经过 A 点时，$t-6=0$，解得 $t=6$，

此时抛物线 G'与△PAB 的边有一个交点；

∴3＜t＜6 时，抛物线 G'与△PAB 的边有两个交点；

综上所述：0＜t＜2 或 3＜t＜6 时，抛物线 G'与△PAB 的边有两个交点．





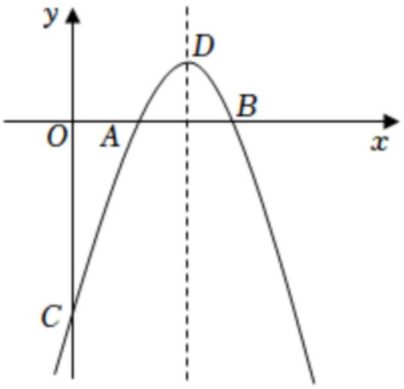
【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象平移的性质，分类讨论，数形结合是解题的关键．

11．（2022 秋•嘉祥县月考）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，顶点为 D（2，1）

（1）求抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的表达式；

（2）在抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使得△PAC 周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

（3）把上述抛物线沿它的对称轴向下平移，平移的距离为 h（h＞0），在平移过程中，该抛物线与直线 BC 始终有交点，求 h 的最大值．



【考点】二次函数综合题.

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识.

【分析】（1）用顶点式求函数的解析式即可；

（2）当 B、P、C 三点共线时，△PAC 的周长最小，求出直线 BC 与对称轴的交点即为点 P 的坐标；

（3）设平移后的函数解析式为 $y=-(x-2)^2+1-h$，联立方程组 $\begin{cases}y=-(x-2)^2+1-h\\y=x-3\end{cases}$，整理得，$x^2-3x+h=0$，由题意可得 $\Delta=9-4h\geqslant 0$，求出 h 的最大值即可.

【解答】解：（1）∵抛物线的顶点为 D（2，1），

∴$y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3$；

（2）存在点 P，使得△PAC 周长最小，理由如下：

∵抛物线的对称轴为直线 $x=2$，

∵A、B 关于对称轴对称，

∴$PA=PB$，

∴$PA+PC=PB+PC\geqslant BC$，

∴当 B、P、C 三点共线时，△PAC 的周长最小，

令 $y=0$，则 $-x^2+4x-3=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=3$，

∴A（1，0），B（3，0），

令 $x=0$，则 $y=-3$，

∴C（0，-3），

设直线 BC 的解析式 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}b=-3\\3k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=1\\b=-3\end{cases}$，

∴$y=x-3$，

∴P（2，－1）；

（3）设平移后的函数解析式为$y=-(x-2)^2+1-h$，

联立方程组$\begin{cases}y=-(x-2)^2+1-h\\y=x-3\end{cases}$，

整理得，$x^2-3x+h=0$，

∵抛物线与直线BC始终有交点，

∴$\Delta=9-4h\geqslant 0$，

∴$h\leq\frac{9}{4}$，

∴h的最大值为$\frac{9}{4}$.

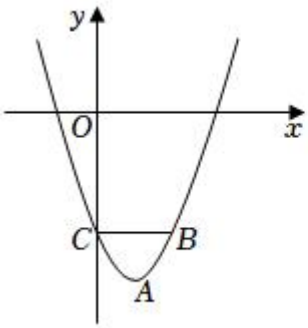
【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象平移的性质是解题的关键.

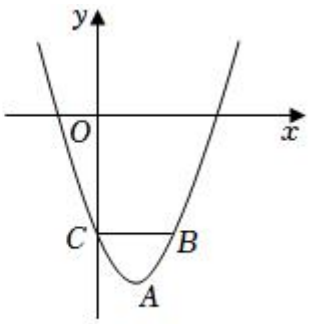
12.（2022秋•东港区校级月考）如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线$y=x^2-2x-3$的顶点为A，与y轴交于点C，线段$CB\parallel x$轴，交该抛物线于另一点B.

（1）求点B的坐标及直线AC的解析式；

（2）当二次函数$y=x^2-2x-3$的自变量x满足$m\leqslant x\leqslant m+1$时，此函数的最大值为$p$，最小值为$q$，且$p-q=2$．求$m$的值；

（3）平移抛物线$y=x^2-2x-3$，使其（备用图）顶点始终在直线AC上移动，当平移后的抛物线与射线BA只有一个公共点时，设此时抛物线的顶点的横坐标为n，请直接写出n的取值范围.





备用图

【考点】二次函数综合题.

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识.

【分析】（1）求出 A、C 点坐标，再用待定系数法求函数的解析式即可；

（2）分四种情况讨论：当 $m+1\leqslant 1$ 时，此时 $q=m^2-4$，$p=m^2-2m-3$，求得 $m=-\frac{1}{2}$；当 $m\geqslant 1$ 时，此时 $p=m^2-4$，$q=m^2-2m-3$，求得 $m=\frac{3}{2}$；当 $m<1<m+\frac{1}{2}$时，$q=2$，$p=m^2-4$，m 不符合题意；当 $m+\frac{1}{2}<1<m+1$ 时，$q=2$，$p=m^2-2m-3$，m 不符合题意

（3）由题意可得 $y=(x-n)^2-n-3$，当 $x-5=(x-n)^2-n-3$ 只有一个实数根时，直线 BA 与抛物线有一个交点；当 $1<n\leqslant 4$ 时，平移后的抛物线与射线 BA 只有一个公共点．

【解答】解：（1）$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

$\therefore A(1,-4)$，

令 $x=0$，则 $y=-3$，

$\therefore C(0,-3)$，

$\because CB\parallel x$ 轴，

$\therefore B(2,-3)$，

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，

$\therefore\begin{cases}k+b=-4\\b=-3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\b=-3\end{cases}$，

$\therefore y=-x-3$；

（2）当 $x=m$ 时，$y=m^2-2m-3$，

当 $x=m+1$ 时，$y=(m+1)^2-2(m+1)-3=m^2-4$，

当 $m+1\leqslant 1$ 时，即 $m\leqslant 0$，此时 $q=m^2-4$，$p=m^2-2m-3$，

$\therefore p-q=m^2-2m-3-m^2+4=-2m+1=2$，

解得 $m=-\frac{1}{2}$；

当 $m\geqslant 1$ 时，此时 $p=m^2-4$，$q=m^2-2m-3$，

$\therefore p-q=m^2-4-(m^2-2m-3)=2m-1=2$，

解得 $m=\frac{3}{2}$；

当 $m<1<m+\frac{1}{2}$时，$q=-4$，$p=m^2-4$，

$\therefore p-q=m^2-4+4=2$，

解得 $m=\sqrt{2}$（舍）或 $m=-\sqrt{2}$（舍）；

当 $m+\frac{1}{2}<1<m+1$ 时，$q=-4$，$p=m^2-2m-3$，

$\therefore p-q=m^2-2m-3+4=2$，

解得 $m=1+\sqrt{2}$（舍）或 $m=1-\sqrt{2}$（舍）；

综上所述：$-\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$.

（3）设直线 BA 的解析式为 $y=kx+b$，

$\therefore\begin{cases}2k+b=-3\\k+b=-4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=1\\b=-5\end{cases}$，

$\therefore y=x-5$，

∵抛物线的顶点的横坐标为 n，

$\therefore y=(x-n)^2-n-3$，

当 $x-5=(x-n)^2-n-3$ 只有一个实数根时，直线 BA 与抛物线有一个交点，

$\Delta=(2n+1)^2-4(n^2-n+2)=0$，

解得 $n=\frac{7}{8}$，

当抛物线经过 B 点时，$(2-n)^2-n-3=-3$，

解得 $n=1$ 或 $n=4$，

∴当 $1<n\leqslant 4$ 时，平移后的抛物线与射线 BA 只有一个公共点；

综上所述：$n=\frac{7}{8}$或 $1<n\leqslant 4$ 时，平移后的抛物线与射线 BA 只有一个公共点.

【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象平移的性质，分类讨论是解题的关键.

13.（2022 秋•鄞州区月考）定义：将二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）在 x 轴下方部分沿 x 轴向上翻折，翻折后部分与原来未翻折部分形成一个新的函数 G，那么称函数 G 为原二次函数的有趣函数.

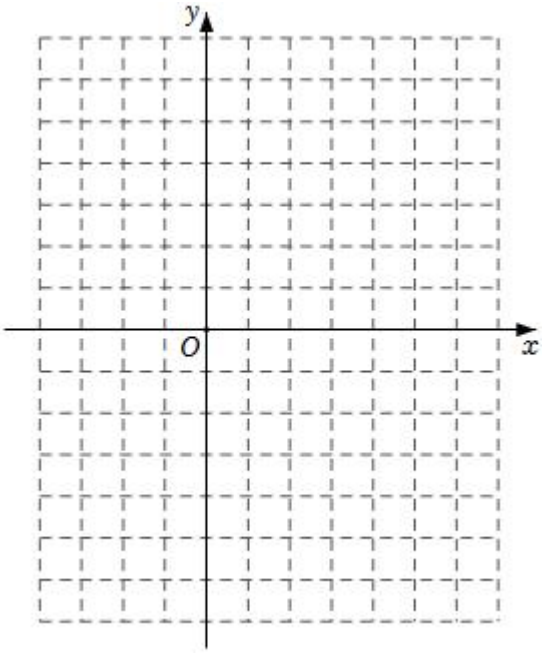
（1）二次函数 $y=x^2+2x+3$ <u>没有</u>（有/没有）有趣函数.

（2）已知二次函数与 x 轴交于点（1，0）、（5，0），与 y 轴交于点 A（0，5），求抛物线的解析式，并在坐标系中画出函数图象.

（3）在（2）的条件下：

①过点 A 作 x 轴的平行线与抛物线交于点 B，求线段 AB 的长度.

②若函数 G 为原二次函数的有趣函数，画出函数 G 的图象并求解当函数 G 的函数值大于 2 时，自变量 x 的取值范围（直接写出答案）.



【考点】二次函数综合题.

【专题】新定义；二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识.

【分析】（1）由于函数在 x 轴下方没有图象，根据定义可知二次函数 $y=x^2+2x+3$ 没有有趣函数；

（2）用待定系数法求函数的解析式即可；

（3）①根据平行的性质，求出 B 点坐标，即可求 AB 的长；

②画出图象 G，结合图象求范围即可.

【解答】解：（1）∵$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$，

∴函数下 x 轴下方没有图象，

∴二次函数 $y=x^2+2x+3$ 没有有趣函数，

故答案为：没有；

（2）将（1，0）、（5，0），（0，5）代入 $y=ax^2+bx+c$，

$$\therefore\begin{cases}a+b+c=0\\25a+5b+c=0\\c=5\end{cases},$$

$$解得\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=5\end{cases},$$

∴$y=x^2-6x+5$；

（3）①∵$AB\parallel x$ 轴，

∴$x^2-6x+5=5$，

解得 $x=0$ 或 $x=6$，

∴B（6，5），

∴$AB=6$；

②当 $y=2$ 时，$x^2-6x+5=2$，

解得 $x=\sqrt{6}+3$ 或 $x=-\sqrt{6}+3$，

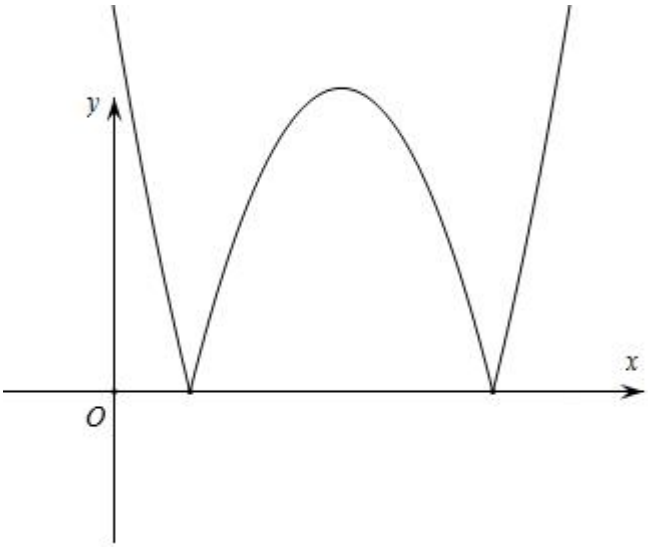
∴$x>\sqrt{6}+3$ 或 $x<-\sqrt{6}+3$ 时，$y=x^2-6x+5$（$x\geqslant 5$ 或 $x\leqslant 1$）的函数值大于 2；

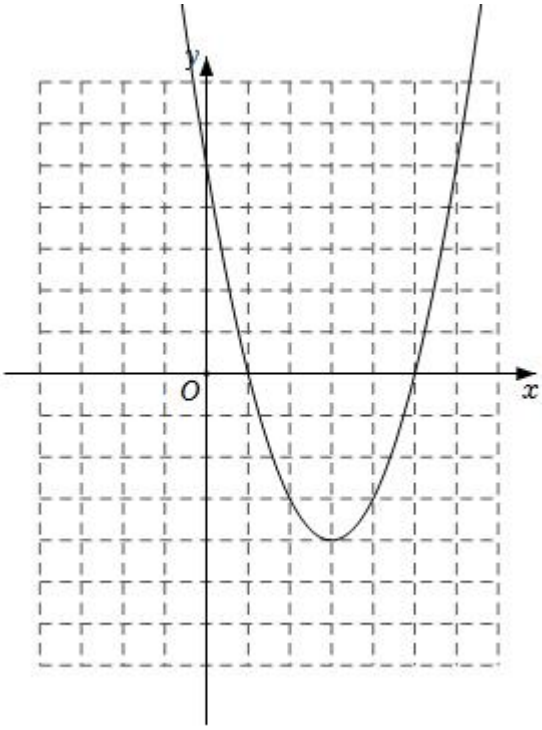
∵函数 $y=x^2-6x+5$ 关于 x 轴对称的函数解析式为 $y=-x^2+6x-5$，

当 $-x^2+6x-5=2$ 时，解得 $x=3+\sqrt{2}$或 $x=3-\sqrt{2}$，

∴$3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$时，$y=-x^2+6x-5$（$1\leqslant x\leqslant 5$）的函数值大于 2；

综上所述：$x>\sqrt{6}+3$ 或 $x<-\sqrt{6}+3$ 或 $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$时，函数 G 的函数值大于 2．





【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，弄清定义，数形结合解题是关键．

14．（2022秋•丰台区校级期中）在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P，直线 l 和矩形 w，定义如下：若点 P 关于直线 l 的对称点 P'在矩形 $ABCD$ 的边上，则称点 P 为矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”．

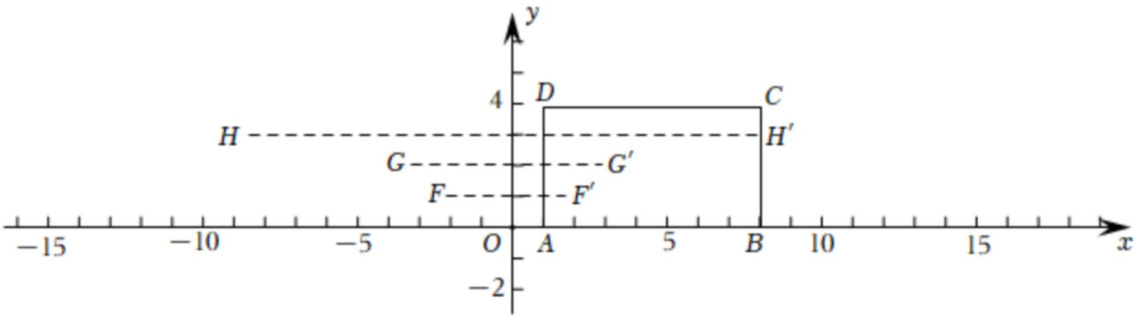
已知矩形 $ABCD$ 的顶点 A（1，0），B（8，0），C（8，4），D（1，4）．

例如，图1中的点 F 和点 G 都不是矩形 $ABCD$ 关于 y 轴的“对矩点”，点 H 是矩形 $ABCD$ 关于 y 轴的“对矩点”．

（1）在点 P_1（﹣2，2），P_2（2，4），P_3（4，2），P_4（6，3）中，是矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=3$“对矩点”的点是 $\underline{\quad P_1，P_2 \quad}$；

（2）若在直线 $y=2x+6$ 上存在点 M，使得点 M 是矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”，求 t 的取值范围；

（3）若抛物线 $y=-x^2-4x+9$ 上存在矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”且恰有4个，请直接写出 t 的取值范围．



【考点】二次函数综合题.

【专题】新定义；二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识.

【分析】（1）根据定义分别求出对称点进行判断即可；

（2）根据图象，求出当（﹣3，0）关于 $x=t$ 的对称点与 A 点重合时，$t=-1$，当（﹣1，4）关于 $x=t$ 的对称点与 C 点重合时，$t=\frac{7}{2}$，结合图象即可求 t 的取值范围；

（3）抛物线关于直线 $x=t$ 对称的抛物线解析式为 $y=-(x-2t-2)^2+13$，由题意可得 $1<2t+2<8$，当抛物线 $y=-(x-2t-2)^2+13$ 经过 D 点时，“对矩点”有三个，此时 $t=1$ 或 $t=-2$（舍），当抛物线 $y=-(x-2t-2)^2+13$ 经过 C 点时，“对矩点”有三个，此时 $t=\frac{3}{2}$或 $t=\frac{9}{2}$（舍），再结合图象即可求 t 的取值范围.

【解答】解：（1）点 P_1（﹣2，2）关于 $x=3$ 的对称点为（8，2），

∵点（8，2）在边 BC 上，

∴点 P_1（﹣2，2）是矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”；

点 P_2（2，4）关于 $x=3$ 的对称点为（4，4），

∵点（4，4）在边 CD 上，

∴点 P_2（2，4）是矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”；

点 P_3（4，2）关于 $x=3$ 的对称点为（2，2），

∵点（2，2）不在矩形 $ABCD$ 的边上，

∴点 P_3（4，2）不是矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”；

点 P_4（6，3）关于 $x=3$ 的对称点为（0，3），

∵点（0，3）不在矩形 $ABCD$ 的边上，

∴点 P_3（6，3）不是矩形 $ABCD$ 关于直线 l 的“对矩点”；

故答案为：P_1，P_2；

（2）直线 $y=2x+6$ 与 x 轴的交点为（﹣3，0），

当（﹣3，0）关于 $x=t$ 的对称点与 A 点重合时，$t=-1$，

当 $y=4$ 时，$2x+6=4$，解得 $x=-1$，

此时点（﹣1，4）在直线 $y=2x+6$ 上，

当（﹣1，4）关于 $x=t$ 的对称点与 C 点重合时，$t=\frac{7}{2}$，

∴ $-1\leqslant t\leq\frac{7}{2}$时，点 M 是矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”；

（3）∵$y=-x^2-4x+9=-(x+2)^2+13$，

∴抛物线的顶点为（﹣2，13），

∴顶点（﹣2，13）关于直线 $x=t$ 对称的点为（$2t+2$，13），

∴抛物线关于直线 $x=t$ 对称的抛物线解析式为 $y=-(x-2t-2)^2+13$，

∵“对矩点”且恰有 4 个，

∴$1<2t+2<8$，

∴$-\frac{1}{2}<t<3$，

当抛物线 $y=-(x-2t-2)^2+13$ 经过 D 点时，“对矩点”有三个，

此时 $t=1$ 或 $t=-2$（舍），

当抛物线 $y=-(x-2t-2)^2+13$ 经过 C 点时，“对矩点”有三个，

此时 $t=\frac{3}{2}$或 $t=\frac{9}{2}$（舍），

∴$1<t<\frac{3}{2}$时，抛物线 $y=-x^2-4x+9$ 上存在矩形 $ABCD$ 关于直线 l：$x=t$ 的“对矩点”且恰有 4 个.

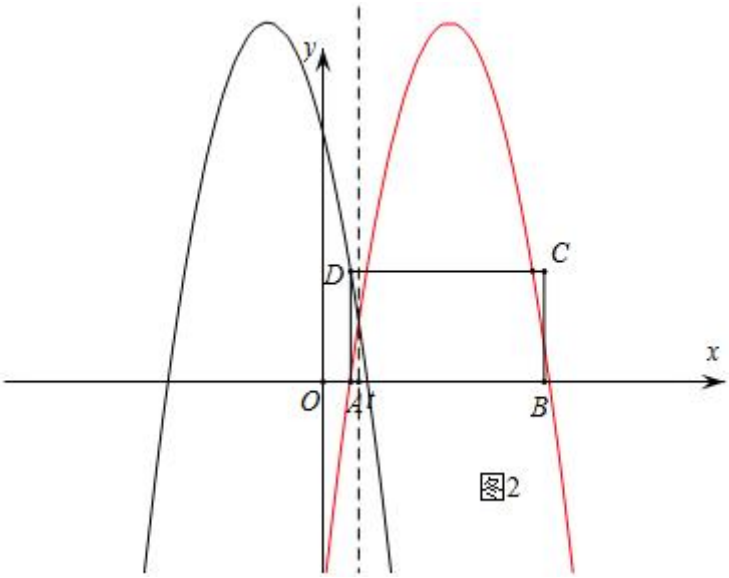
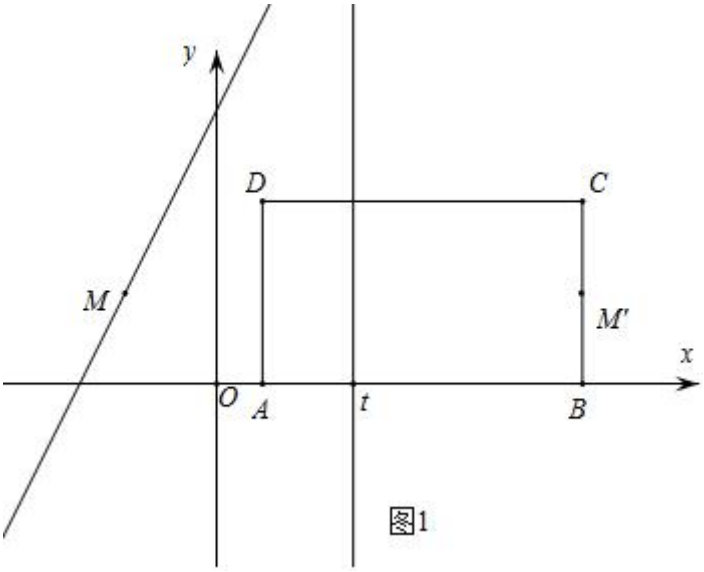


图2



【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，弄清定义，会求抛物线关于直线的对称抛物线解析式，数形结合是解题的关键．

15．（2022秋•江夏区月考）已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 A（－1，2）．

（1）抛物线顶点位于 y 轴右侧且纵坐标为6．①求抛物线的解析式．②如图1，直线 $y=-x+4$ 与抛物线交于 B、C 两点，P 为线段 BC 上一点，过 P 作 $PM\parallel y$ 轴交抛物线于 M 点．若 $PM=3$，求 P 点的坐标．

（2）将抛物线平移，使点 A 的对应点为 A'（$m+1$，$b+4$），其中 $m\neq 2$．若平移后的抛物线经过点 N（2，1），平移后的抛物线顶点恰好落在直线 $y=x+5$ 上，求 b 的值．

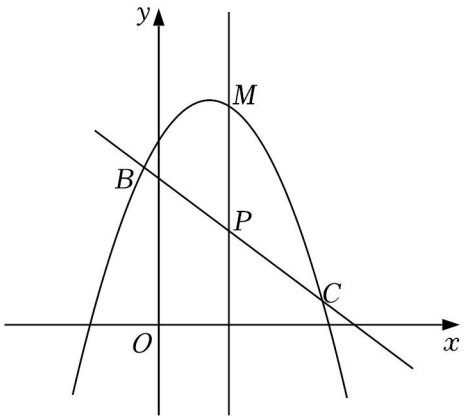
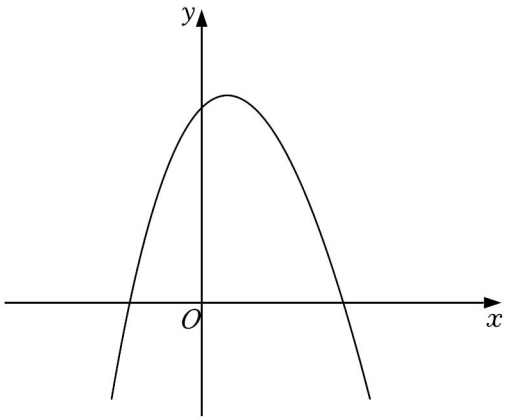


图1



备用图

【考点】二次函数综合题．

【专题】二次函数图象及其性质；运算能力；应用意识．

【分析】（1）①将点 A（﹣1，2）代入 $y=-x^2+bx+c$，得到 b、c 的关系为 $c-b=3$，再由$\frac{-4c-b^2}{-4}=6$，求出 b、c 的值即可求函数的解析式；

②设 M（t，$-t^2+2t+5$），则 P（t，$-t+4$），可得 $PM=-t^2+3t+1=3$，求出 t 的值即可求 M 点坐标；

（2）由题意可知抛物线向右平移 $m+2$ 个单位，向上平移 $b+2$ 个单位，则平移后的抛物线解析为 $y=-(x-\frac{b}{2}-m-2)^2+2b+5+\frac{b^2}{4}$，所以抛物线的顶点为（$\frac{b}{2}+m+2$，$2b+5+\frac{b^2}{4}$），再由题意可得 $m=\frac{b^2}{4}+\frac{3}{2}b-2$①，$-(-\frac{b}{2}-m)^2+2b+5+\frac{b^2}{4}=1$②，由①②求出 b 的值即可．

【解答】解：（1）①将点 A（﹣1，2）代入 $y=-x^2+bx+c$，

∴$c-b=3$，

∵抛物线的顶点纵坐标为 6，

∴$\frac{-4c-b^2}{-4}=6$，

∴$c=-3$ 或 $c=5$，

∴$b=-6$ 或 $b=2$，

∵顶点位于 y 轴右侧，

∴$b>0$，

∴$b=2$，

∴$y=-x^2+2x+5$；

②设 M（t，$-t^2+2t+5$），则 P（t，$-t+4$），

∴$PM=-t^2+3t+1$，

∵$PM=3$，

∴$-t^2+3t+1=3$，

解得 $t=1$ 或 $t=2$，

∴P（1，3）或（2，2）；

（2）∵点 A（﹣1，2）平移后对应点为 A'（$m+1$，$b+4$），

∴抛物线向右平移 $m+2$ 个单位，向上平移 $b+2$ 个单位，

∵$c-b=3$，

∴$y=-x^2+bx+c=-(x-\frac{b}{2})^2+b+3+\frac{b^2}{4}$，

∴平移后的抛物线解析为 $y=-(x-\frac{b}{2}-m-2)^2+2b+5+\frac{b^2}{4}$，

∴抛物线的顶点为（$\frac{b}{2}+m+2$，$2b+5+\frac{b^2}{4}$），

∵抛物线顶点恰好落在直线 $y=x+5$ 上，

∴$\frac{b}{2}+m+2+5=2b+5+\frac{b^2}{4}$，

∴$m=\frac{b^2}{4}+\frac{3}{2}b-2$①，

∵平移后的抛物线经过点 N（2，1），

∴$-(-\frac{b}{2}-m)^2+2b+5+\frac{b^2}{4}=1$②，

由①②可得，$b+2m=b+4$ 或 $b+2m=-b-4$，

当 $b+2m=b+4$ 时，$m=2$，此时不符合题意；

当 $b+2m=-b-4$ 时，$b=0$ 或 $b=-10$，

当 $b=0$ 时，$m=-2$；当 $b=-10$ 时，$m=8$；

∴b 的值为 0 或 -10.

【点评】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，函数图象平移的性质，解二元一次方程组是解题的关键.

考点卡片

1．二次函数的性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的顶点坐标是（$-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a}$），对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象具有如下性质：

①当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的开口向上，$x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；$x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；$x=-\frac{b}{2a}$时，y 取得最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$，即顶点是抛物线的最低点．

②当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的开口向下，$x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；$x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；$x=-\frac{b}{2a}$时，y 取得最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$，即顶点是抛物线的最高点．

③抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象可由抛物线 $y=ax^2$ 的图象向右或向左平移$|-\frac{b}{2a}|$个单位，再向上或向下平移$|\frac{4ac-b^2}{4a}|$个单位得到的．

2．二次函数图象上点的坐标特征

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象是抛物线，顶点坐标是（$-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a}$）．

①抛物线是关于对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$成轴对称，所以抛物线上的点关于对称轴对称，且都满足函数函数关系式．顶点是抛物线的最高点或最低点．

②抛物线与 y 轴交点的纵坐标是函数解析中的 c 值．

③抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称，设两个交点分别是（x_1，0），（x_2，0），则其对称轴为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$．

3．二次函数图象与几何变换

由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式．

4．二次函数综合题

（1）二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时，先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号，然后判断新的函数关系

式中系数的符号，再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征，则符合所有特征的图象即为正确选项.

（2）二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起．这类试题一般难度较大．解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题，善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识，并注意挖掘题目中的一些隐含条件.

（3）二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系，建立二次函数模型．关键在于观察、分析、创建，建立直角坐标系下的二次函数图象，然后数形结合解决问题，需要我们注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义.