2023年中考数学复习探究性试题汇编之旋转

一．解答题（共15小题）

1．（2022春•诸暨市月考）定义：在一个等腰三角形底边的高线上所有点中，到三角形三个顶点距离之和最小的点叫做这个等腰三角形的“近点”，“近点”到三个顶点距离之和叫做这个等腰三角形的“最近值”．

【基础巩固】

（1）如图1，在等腰Rt△ABC中，∠BAC＝90°，AD为BC边上的高，已知AD上一点E满足∠DEC＝60°，AC＝$4\sqrt{6}$，求$AE+BE+CE$＝_______；

【尝试应用】

（2）如图2，等边三角形ABC边长为$4\sqrt{3}$，E为高线AD上的点，将三角形AEC绕点A逆时针旋转60°得到三角形AFG，连接EF，请你在此基础上继续探究求出等边三角形ABC的“最近值”；

【拓展提高】

（3）如图3，在菱形$ABCD$中，过AB的中点E作AB垂线交CD的延长线于点F，连接AC、DB，已知∠BDA＝75°，AB＝6，求三角形AFB“最近值”的平方．

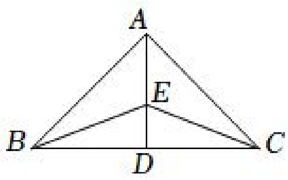


图1

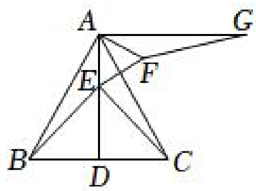


图2

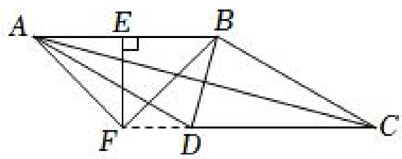


图3

2．（2022春•周村区期末）如图①，P为△ABC所在平面上一点，且∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°，则点P叫做△ABC的费马点．

（1）如果点P为锐角三角形ABC的费马点，且∠ABC＝60°．

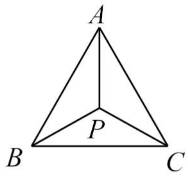
①求证：△ABP∽△BCP；

②若PA＝3，PC＝4，求PB的长．

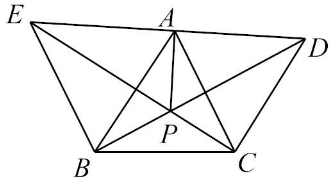
（2）已知锐角三角形ABC，分别以AB、AC为边向外作正三角形ABE和正三角形ACD，CE和BD相交于P点，连结AP，如图②．

①求∠CPD的度数；

②求证：P点为△ABC的费马点．



①



②

3．（2021•雁塔区校级模拟）【问题情境】

如图 1，在△ABC 中，∠A＝120°，AB＝AC，BC＝$5\sqrt{3}$，则△ABC 的外接圆的半径值为 ______.

【问题解决】

如图 2，点 P 为正方形 $ABCD$ 内一点，且∠BPC＝90°，若 AB＝4，求 AP 的最小值．

【问题解决】

如图 3，正方形 $ABCD$ 是一个边长为 $3\sqrt{3}cm$ 的隔离区域设计图，CE 为大门，点 E 在边 BC 上，CE= $\sqrt{3}cm$，点 P 是正方形 $ABCD$ 内设立的一个活动岗哨，到 B、E 的张角为 120°，即∠BPE＝120°，点 A、D 为另两个固定岗哨．现需在隔离区域内部设置一个补水供给点 Q，使得 Q 到 A、D、P 三个岗哨的距离和最小，试求 $QA+QD+QP$ 的最小值．（保留根号或结果精确到 1cm，参考数据$\sqrt{3}$ ≈1.7，10.5^2＝110.25）．

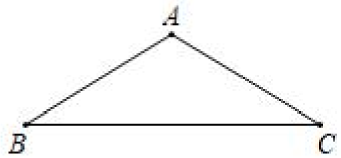


图1

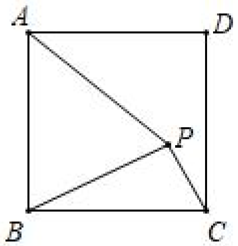


图2

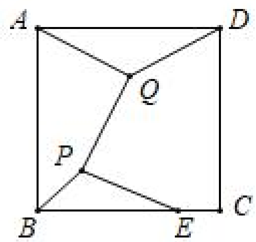


图3

4．（2021•山西模拟）阅读下列材料，完成后面相应的任务：

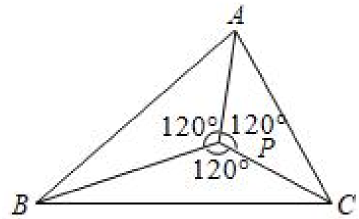


图 1

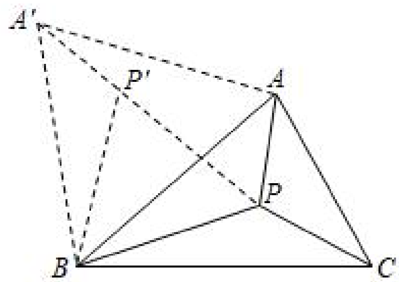


图 2

费马（$Ferrmat$，1601 年 8 月 17 日－1665 年 1 月 12 日），生于法国南部图卢兹（$Toulouse$）附近的波蒙•德•罗曼，被誉为业余数学家之王．1643 年，费马曾提出了一个著名的几何

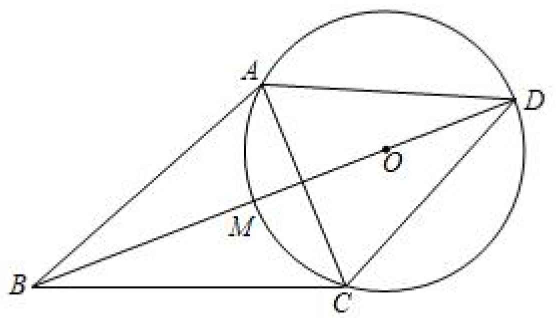
问题：给定不在一条直线上的三个点 A，B，C，求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置．另一位数学家托里拆利成功地解决了这个问题：如图1，$\triangle ABC$（三个内角均小于 120°）的三条边的张角都等于 120°，即满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120^\circ$ 的点 P，就是到点 A，B，C 的距离之和最小的点，后来人们把这个点 P 称为"费马点".

下面是"费马点"的证明过程：如图2，将 $\triangle APB$ 绕着点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'B$，使得 $A'P'$ 落在 $\triangle ABC$ 外，则 $\triangle A'AB$ 为等边三角形，$\therefore P'B=PB=PP'$，于是 $PA+PB+PC=P'A'+PP'+PC\geqslant A'C$，….

任务：（1）材料中，判定 $\triangle A'AB$ 为等边三角形的依据是 _______.

（2）请你完成剩余的部分.

（3）如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，以 AC 为一边作等边 $\triangle ACD$，$\odot O$ 是 $\triangle ACD$ 的外接圆，连接 BD 交 $\odot O$ 于点 M，求证：M 是 $\triangle ABC$ 的费马点.



5．（2020秋•田家庵区校级月考）（原题初探）（1）小明在数学作业本中看到有这样一道作业题：如图1，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，连结 PA，PB，PC 现将 $\triangle PAB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到的 $\triangle P'CB$，连接 PP'．若 $PA=\sqrt{2}$，$PB=3$，$\angle APB=135^\circ$，则 PC 的长为 _______，正方形 $ABCD$ 的边长为 _______.

（变式猜想）（2）如图2，若点 P 是等边 $\triangle ABC$ 内的一点，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，请猜想 $\angle APB$ 的度数，并说明理由.

（拓展应用）（3）聪明的小明经过上述两小题的训练后，善于反思的他又提出了如下的问题：

如图3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=3$，$CD=2$，$\angle ABC=\angle ACB=\angle ADC=45^\circ$，则 BD 的长度为 _______.

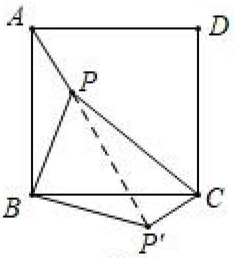


图1

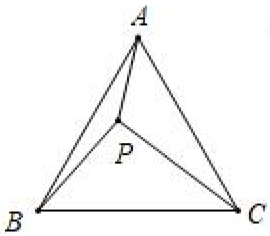


图2

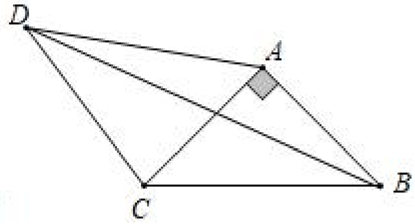


图3

6．（2017秋•郾城区校级期中）下面是一道例题及其解答过程，请补充完整．

（1）如图1，在等边三角形 ABC 内部有一点 P，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 $\angle APB$ 的度数．

解：将 $\triangle APC$ 绕点 A 逆时针旋转 $60°$，得到 $\triangle AP'B$，连接 PP'，则 $\triangle APP'$ 为等边三角形．

$\because PP'=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

$\therefore P'P^2+PB^2=P'B^2$．

$\therefore \triangle BPP'$ 为_______三角形．

$\therefore \angle APB$ 的度数为_______．

（2）类比延伸

如图2，在正方形 $ABCD$ 内部有一点 P，若 $\angle APD=135°$，试判断线段 PA、PB、PD 之间的数量关系，并说明理由．

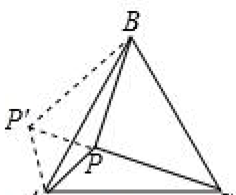


图1

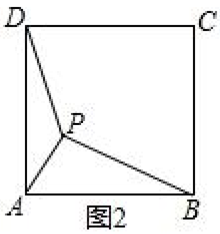


图2

7．（2019•碑林区校级三模）问题提出

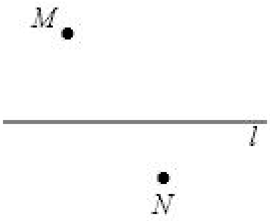
（1）如图，点 M、N 是直线 l 外两点，在直线 l 上找一点 K，使得 $MK+NK$ 最小．

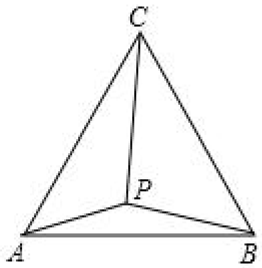
问题探究

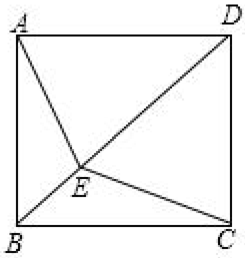
（2）在等边三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 $\angle APB$ 度数的大小．

问题解决

（3）如图，矩形 $ABCD$ 是某公园的平面图，$AB=30\sqrt{3}$ 米，$BC=60$ 米，现需要在对角线 BD 上修一凉亭 E，使得到公园出口 A、B，C 的距离之和最小．问：是否存在这样的点 E？若存在，请画出点 E 的位置，并求出 $EA+EB+EC$ 的和的最小值；若不存在，请说明理由．







8．（2018•禹会区一模）如图（1），P 为△ABC 所在平面上一点，且∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°，则点 P 叫做△ABC 的费马点．

（1）如果点 P 为锐角△ABC 的费马点，且∠ABC＝60°．

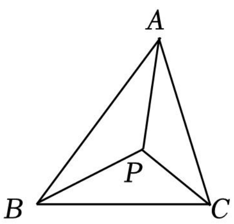
①求证：△ABP∽△BCP；

②若 PA＝3，PC＝4，则 PB＝_______．

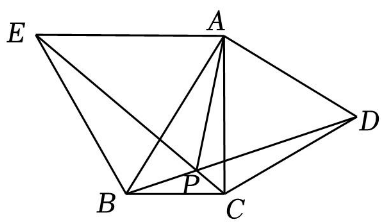
（2）已知锐角△ABC，分别以 AB、AC 为边向外作正△ABE 和正△ACD，CE 和 BD 相交于 P 点．如图（2）

①求∠CPD 的度数；

②求证：P 点为△ABC 的费马点．



（1）



（2）

9．（2016 秋•盐城校级月考）【方法呈现】:

（1）已知，点 P 是正方形 $ABCD$ 内的一点，连 PA、PB、PC．将△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90° 到△$P'CB$ 的位置（如图 1），设 AB 的长为 a，PB 的长为 b（b＜a），求△PAB 旋转到△$P'CB$ 的过程中边 PA 所扫过区域（图 1 中阴影部分）的面积；

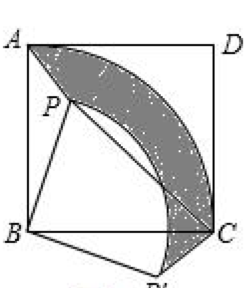


图1

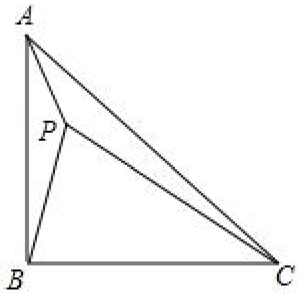


图2

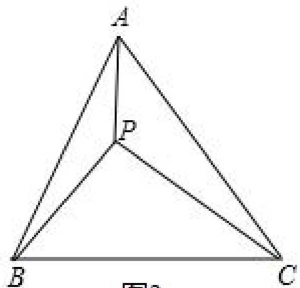


图3

【实际运用】:

（2）如图 2，点 P 是等腰 Rt△ABC 内一点，AB＝BC，连接 PA，PB，PC．若 PA＝2，PB＝4，PC＝6，求∠APB 的大小；

【拓展延伸】:

（3）如图 3，点 P 是等边△ABC 内一点，PA＝3，PB＝4，PC＝5，则△APC 的面积是（直接填答案）

10.（2015 秋•高青县期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 PA＝3，PB＝4，PC＝5，求∠APB 的度数；

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造△$AP'C$，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

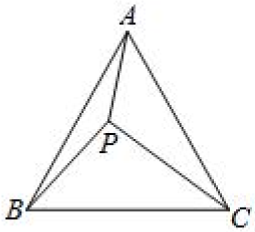


图 1

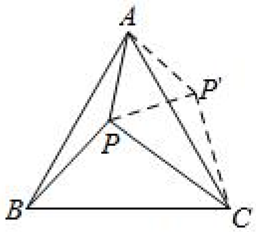


图 2

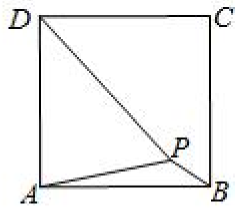


图 3

（1）请你回答：图 1 中∠APB 的度数等于_______．（直接写答案）

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 PA＝$2\sqrt{2}$，PB＝1，PD= $\sqrt{17}$．

（2）求∠APB 的度数；

（3）求正方形的边长．

11.（2015 秋•丰润区校级期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 PA＝3，PB＝4，PC＝5，求∠APB 的度数．小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造△$AP'C$，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

（1）请你回答：图 1 中∠APB 的度数等于_______．

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

（2）如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 PA＝$2\sqrt{2}$，PB＝1，PD= $\sqrt{17}$，求∠APB 的度数和正方形的边长．

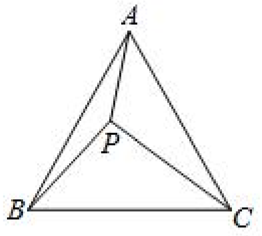


图 1

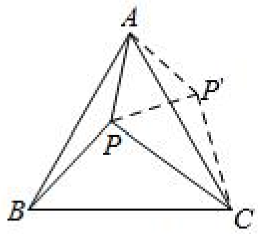


图 2

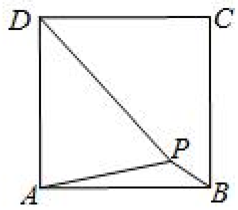


图 3

12．（2014•河南）（1）探究发现

下面是一道例题及其解答过程，请补充完整．

如图 1，在等边三角形 ABC 内部有一点 P，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$．求 $\angle APB$ 的度数．

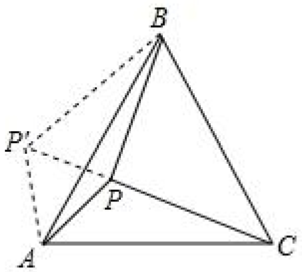


图1

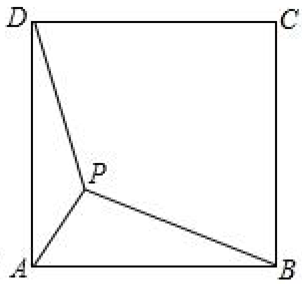


图2

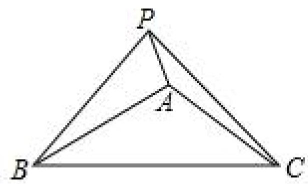


图3

解：将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△$AP'B$，连接 PP'，则△APP'为等边三角形．

∵$P'P=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$

△BPP'为_______三角形

∴$\angle APB$ 的度数为_______．

（2）类比延伸

如图 2，在正方形 $ABCD$ 内部有一点 P，若 $\angle APD=135°$，试判断线段 PA、PB、PD 之间的数量关系，并说明理由．

（3）联想拓展

如图 3，在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$．点 P 在直线 AB 上方且 $\angle APB=60°$，试判断是否存在常数 k，满足 $(kPA)^2+PB^2=PC^2$．若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由．

13．（2012 秋•昌平区期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 $\angle APB$ 的度数．

小伟是这样思考的：如图2，利用旋转和全等的知识构造△$AP'C$，连接PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

请你回答：图1中∠APB的度数等于_______．

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

（1）如图3，在正方形$ABCD$内有一点P，且$PA=2\sqrt{2}$，PB＝1，$PD=\sqrt{17}$，则∠APB的度数等于_______，正方形的边长为_______；

（2）如图4，在正六边形$ABCDEF$内有一点P，且PA＝2，PB＝1，$PF=\sqrt{13}$，则∠APB的度数等于_______，正六边形的边长为_______．

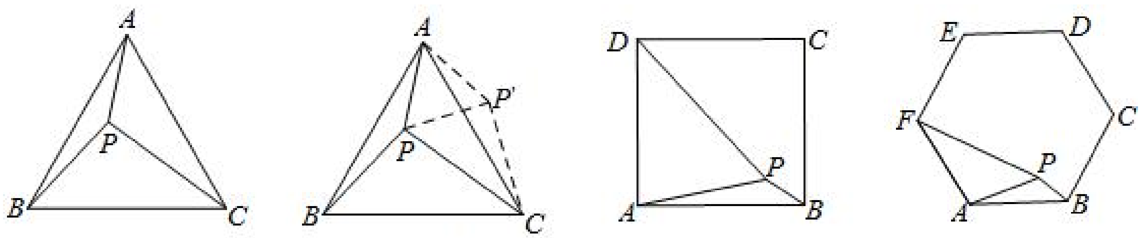


图1 图2 图3 图4

14．数学上称“费马点”是位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点．现定义：菱形对角线上一点到该对角线同侧两条边上的两点距离最小的点称为类费马点．例如：菱形$ABCD$，P是对角线BD上一点，E、F是边BC和CD上的两点，若点P满足PE与PF之和最小，则称点P为类费马点．

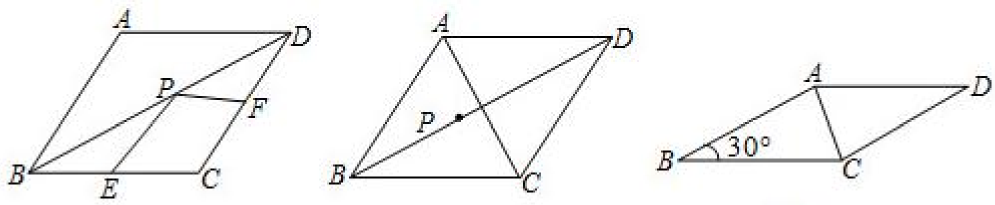


图1 图2 图3

（1）如图1，在菱形$ABCD$中，AB＝4，点P是BD上的类费马点

①E为BC的中点，F为CD的中点，则$PE+PF$＝_______．

②E为BC上一动点，F为CD上一动点，且∠ABC＝60°，则$PE+PF$＝_______．

（2）如图2，在菱形$ABCD$中，AB＝4，连接AC，点P是△ABC的费马点，（即PA，PB，PC之和最小），①当∠ABC＝60°时，BP＝_______．

②当∠ABC＝30°时，你能找到△ABC的费马点P吗？画图做简要说明，并求此时$PA+PB+PC$的值．

15．（2021秋•北碚区校级期中）如图1，D、E、F是等边三角形ABC中不共线三点，连接

AD、BE、CF，三条线段两两分别相交于 D、E、F．已知 $AF=BD$，$\angle EDF=60^\circ$．

（1）证明：$EF=DF$；

（2）如图 2，点 M 是 ED 上一点，连接 CM，以 CM 为边向右作△CMG，连接 EG．若 $EG=EC+EM$，$CM=GM$，$\angle GMC=\angle GEC$，证明：$CG=CM$．

（3）如图 3，在（2）的条件下，当点 M 与点 D 重合时，若 $CD\perp AD$，$GD=4$，请问在△ACD 内部是否存在点 P 使得 P 到△ACD 三个顶点距离之和最小，若存在请直接写出距离之和的最小值；若不存在，试说明理由．

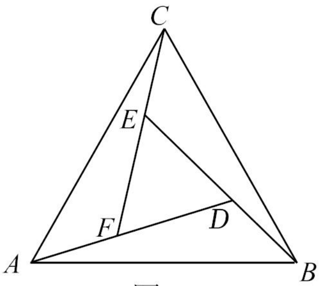


图1

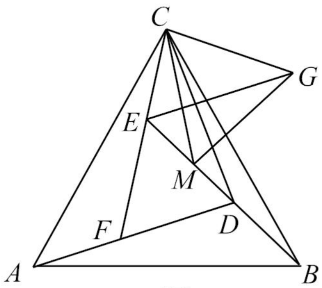


图2

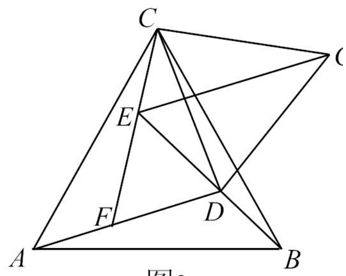


图3

2023年中考数学复习探究性试题汇编之旋转

参考答案与试题解析

一．解答题（共15小题）

1．（2022春•诸暨市月考）定义：在一个等腰三角形底边的高线上所有点中，到三角形三个顶点距离之和最小的点叫做这个等腰三角形的“近点”，“近点”到三个顶点距离之和叫做这个等腰三角形的“最近值”．

【基础巩固】

（1）如图1，在等腰Rt△ABC中，∠BAC＝90°，AD为BC边上的高，已知AD上一点E满足∠DEC＝60°，AC= $4\sqrt{6}$，求AE+BE+CE=__$12+4\sqrt{3}$__；

【尝试应用】

（2）如图2，等边三角形ABC边长为$4\sqrt{3}$，E为高线AD上的点，将三角形AEC绕点A逆时针旋转60°得到三角形AFG，连接EF，请你在此基础上继续探究求出等边三角形ABC的“最近值”；

【拓展提高】

（3）如图3，在菱形$ABCD$中，过AB的中点E作AB垂线交CD的延长线于点F，连接AC、DB，已知∠BDA＝75°，AB＝6，求三角形AFB“最近值”的平方．

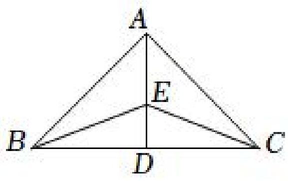


图1

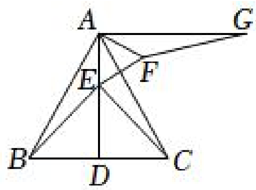


图2

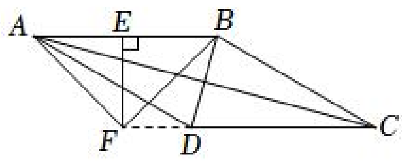


图3

【考点】四边形综合题．

【专题】三角形；矩形 菱形 正方形；推理能力．

【分析】（1）△CDE为含30°角直角三角形，可求出DE、CE的长度，进而得出结果．

（2）△AEF为等边三角形，可得AE+BE+CE＝EF+BE+GF，故当B、E、F、G四点共线时，EF+BE+GF最小，进而可得∠AEB＝∠AEC＝∠BEC＝120°，即可求出结果．

（3）作DM⊥AB于点M，可知EF＝DM= $\frac{1}{2}AB$，进而可推出△ABF为等腰直角三角形，结合（2）中的结论，当点P满足：∠APF＝∠BPF＝∠APB＝120°时，PA+PB+PF最小，进而结合（1）中方法求出结果．

【解答】解：（1）∵$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$AC=4\sqrt{6}$，

∴$BD=CD=AD=4\sqrt{3}$，

∵$\angle DEC=60°$，

∴$DE=\frac{CD}{\sqrt{3}}=4$，

∴$AE=AD-DE=4\sqrt{3}-4$，$CE=BE=2DE=8$，

∴$AE+BE+CE=4\sqrt{3}-4+8\times 2=12+4\sqrt{3}$；

故答案为：$12+4\sqrt{3}$；

（2）由题意可得：$AE=AF$，$\angle EAF=60°$，

∴$\triangle EAF$ 为等边三角形，

∴$AE=EF=AF$，

∴$AE+BE+CE=EF+BE+GF$，

∵B、G 两点均为定点，

∴当 B、E、F、G 四点共线时，$EF+BE+GF$ 最小，

∴$\angle AEB=120°$，$\angle AEC=\angle AFG=120°$，

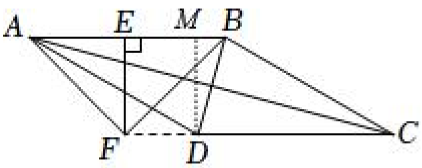
∴$\angle BEC=120°$，

∴此时 E 点为等边$\triangle ABC$ 的中心，

∴$AE+BE+CE=3AE=3\times\frac{AB}{\sqrt{3}}=12$，

故等边三角形 ABC 的“最近值”为 12；

（3）如图，过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，



∵$\angle BDA=75°$，$AB=AD$，

∴$\angle DAB=30°$，

∴$2DM=AD=AB$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$EF=DM$，

∴$2EF=AB$，

∴$AE=BE=EF=3$，

∴△AEF 与△BEF 均为等腰直角三角形，

∴△ABF 为等腰直角三角形，

设 P 为 EF 上一点，由（2）得：∠APF＝∠BPF＝∠APB＝120°时，$PA+PB+PF$ 最小，

此时：$EP=\frac{AE}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

∴$AP=BP=2EP=2\sqrt{3}$，$FP=EF-EP=3-\sqrt{3}$，

∴$AP+BP+FP=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=3+3\sqrt{3}$，

∴（$AP+BP+FP$）$^2=(3+3\sqrt{3})^2=36+18\sqrt{3}$，

∴三角形 AFB“最近值”的平方为 $36+18\sqrt{3}$．

【点评】本题考查三角形与四边形综合问题，掌握费马点模型可帮助快速解题．

2．（2022 春•周村区期末）如图①，P 为△ABC 所在平面上一点，且∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°，则点 P 叫做△ABC 的费马点．

（1）如果点 P 为锐角三角形 ABC 的费马点，且∠ABC＝60°．

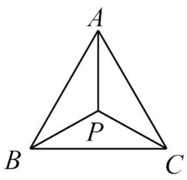
①求证：△ABP∽△BCP；

②若 PA＝3，PC＝4，求 PB 的长．

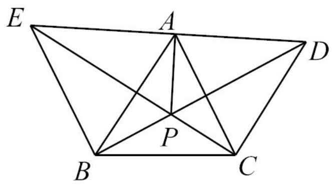
（2）已知锐角三角形 ABC，分别以 AB、AC 为边向外作正三角形 ABE 和正三角形 ACD，CE 和 BD 相交于 P 点，连结 AP，如图②．

①求∠CPD 的度数；

②求证：P 点为△ABC 的费马点．



①



②

【考点】相似形综合题．

【专题】图形的全等；等腰三角形与直角三角形；图形的相似；推理能力．

【分析】（1）①由三角形内角和定理可求∠PBA+∠PAB＝60°，可证∠PBC＝∠BAP，可得结论；

②由相似三角形的性质可得$\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}$，即可求解；

（2）①由“SAS”可证△ACE≌△ADB，可得∠1＝∠2，即可求解；

②通过证明$\triangle ADF \backsim \triangle CFP$，可得$\frac{AF}{CP}=\frac{DF}{PF}$，可证$\triangle AFP \backsim \triangle CDF$，可得$\angle APF=\angle ACD=60°$，可得结论．

【解答】（1）①证明：∵点P为锐角三角形ABC的费马点，

∴$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，

∴$\angle PBA+\angle PAB=60°$，

∵$\angle ABC=60°$，

∴$\angle ABP+\angle PBC=60°$，

∴$\angle PBC=\angle BAP$，

又∵$\angle APB=\angle BPC$，

∴$\triangle ABP \backsim \triangle BCP$，

②解：∵$\triangle ABP \backsim \triangle BCP$，

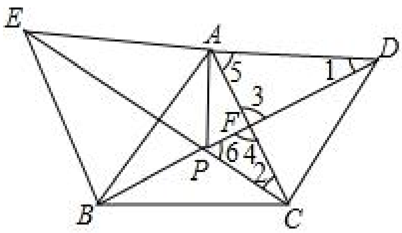
∴$\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}$，

又∵$PA=3$，$PC=4$，

∴$\frac{3}{PB}=\frac{PB}{4}$，

∴$PB=2\sqrt{3}$；

（2）①解：设AC与BD的交点于F，



如图，∵$\triangle ABE$与$\triangle ACD$都为等边三角形，

∴$\angle BAE=\angle CAD=60°$，$AE=AB$，$AC=AD$，

∴$\angle BAE+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC$，即$\angle EAC=\angle BAD$，

在$\triangle ACE$和$\triangle ADB$中，

$\begin{cases} AC=AD \\ \angle EAC=\angle BAD, \\ EA=AB \end{cases}$

∴$\triangle ACE \cong \triangle ADB$（$SAS$），

∴$\angle 1=\angle 2$，

∵∠3＝∠4，

∴∠CPD＝∠6＝∠5＝60°；

②证明：∵∠1＝∠2，∠5＝∠6，

∴△ADF∽△CFP，

∴$\frac{AF}{CP}=\frac{DF}{PF}$，

∴AF•PF＝DF•CP，

∵∠AFP＝∠CFD，

∴△AFP∽△CDF，

∴∠APF＝∠ACD＝60°，

∴∠APC＝∠CPD+∠APF＝120°，

∴∠BPC＝120°，

∴∠APB＝360°﹣∠BPC﹣∠APC＝120°，

∴P 点为△ABC 的费马点．

【点评】本题是相似形综合题，考查了相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，费马点的定义，以及等边三角形的性质，熟练掌握判定与性质是解本题的关键．

3．（2021•雁塔区校级模拟）【问题情境】

如图 1，在△ABC 中，∠A＝120°，AB＝AC，BC＝$5\sqrt{3}$，则△ABC 的外接圆的半径值为 5．

【问题解决】

如图 2，点 P 为正方形 $ABCD$ 内一点，且∠BPC＝90°，若 AB＝4，求 AP 的最小值．

【问题解决】

如图 3，正方形 $ABCD$ 是一个边长为 $3\sqrt{3}cm$ 的隔离区域设计图，CE 为大门，点 E 在边 BC 上，CE= $\sqrt{3}cm$，点 P 是正方形 $ABCD$ 内设立的一个活动岗哨，到 B、E 的张角为 120°，即∠BPE＝120°，点 A、D 为另两个固定岗哨．现需在隔离区域内部设置一个补水供给点 Q，使得 Q 到 A、D、P 三个岗哨的距离和最小，试求 QA+QD+QP 的最小值．（保留根号或结果精确到 1cm，参考数据 $\sqrt{3}\approx1.7$，10.5^2＝110.25）．

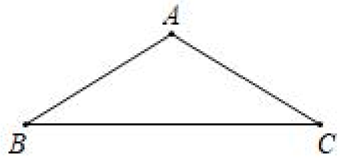


图1

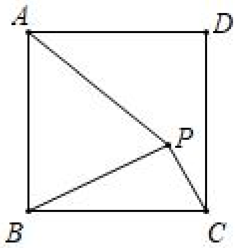


图2

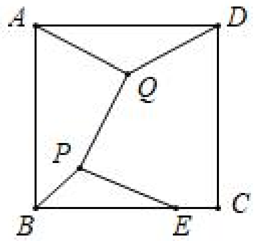


图3

【考点】圆的综合题.

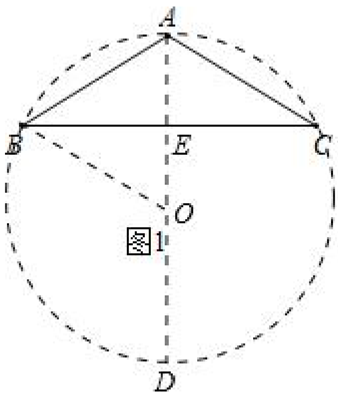
【专题】等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；圆的有关概念及性质；运算能力；应用意识.

【分析】(1）作出三角形的外接圆 O，证明△OBA 是等边三角形，利用三线合一性质计算即可；

（2 ）点 P 在以 BC 为直径的圆上，根据圆心，P，A 三点共线时 AP 最小，计算即可；

（3）如图 3，设∠BPE 所在圆的圆心为点 O，根据（1）可得∠BPE 所在圆的半径，以点 D 为旋转中心，将△DQA 顺时针旋转 60°，得到△DFN，当 N，F，Q，P，O 共线时，$QA+QD+QP$ 最小，构造直角三角形求解即可.

【解答】解：(1）如图 1，作△ABC 的外接圆 O，作直径 AD，连接 OB，



∵$AB=AC$，

∴$AO\perp BC$，∠$BAO=60°$，

∵$OA=OB$，

∴△OBA 是等边三角形，

∴$AB=OA=OB$，

设 AD 与 BC 交于点 E，$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

在直角三角形 ABE 中，

∵$\sin\angle BAO=\frac{BE}{AB}$,

∴$\sin 60^\circ=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴$AB=5$，

∴$OA=5$，

故答案为：5；

（2 ）如图 2，

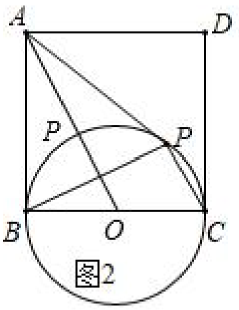


图2

∵ $\angle BPC=90^\circ$ ，

∴点在以 BC 为直径的圆上，设圆心为点 O，

则 $OP=\frac{1}{2}BC=2$，

∴O，P，A 三点线时 AP 最小，

在直角三角形 ABO 中，

$AO=\sqrt{AB^2+OB^2}=2\sqrt{5}$，

∵$PO=2$，

∴AP 的最小值为：$AO-PO=2\sqrt{5}-2$；

（3）如图 3，设$\angle BPE$ 所在圆的圆心为点 O，根据（1）可得$\angle BPE$ 所在圆的半径为$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，以点 D 为旋转中心，将$\triangle DQA$ 顺时针旋转 60° ，得到$\triangle DFN$，当 N，F，Q，P，O 共线时，$QA+QD+QP$ 最小，过点 N 作 $NG\perp AB$ 交 BA 的延长线于点 G，连接 AN，则$\triangle AND$ 是等边三角形，过点 O 作 $OM\perp GN$ 于 M 交 BC 于点 H，连接 OB，

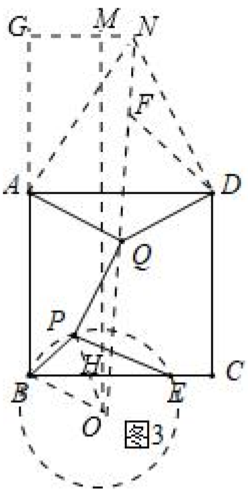


图3

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD // BC // GN$，

∴$OH \perp BC$，

∵$BE = 2\sqrt{3}$，

∴$BH = \sqrt{3}$，

∴$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = 1$，

∵$AD = DN$，$\angle ADN = 60°$，

∴△AND 是等边三形，且 $AN = 3\sqrt{3}$，$\angle NAD = 60°$，

∴$\angle GAN = 30°$，

∴$GN = AN\sin30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，$AG = AN\cos30° = \frac{9}{2}$，

∴$OM = OH + AB + AG = \frac{9}{2} + 1 + 3\sqrt{3} = \frac{11}{2} + 3\sqrt{3}$，$MN = GN - BH = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = \sqrt{(\frac{11}{2} + 3\sqrt{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \approx 11$，

∴$QA + QD + QP$ 最小值为：$11 - 2 = 9$（cm）.

【点评】本题考查了正方形的性质、圆中半径相等，点与圆位置关系中的最值问题，费马点最值问题，旋转的思想，锐角三角函数，解题的关键是正确构造辅助圆，旋转 60°处理费马点问题.

4．（2021•山西模拟）阅读下列材料，完成后面相应的任务：

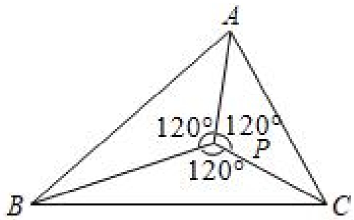


图 1

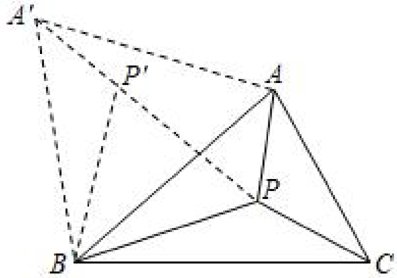


图 2

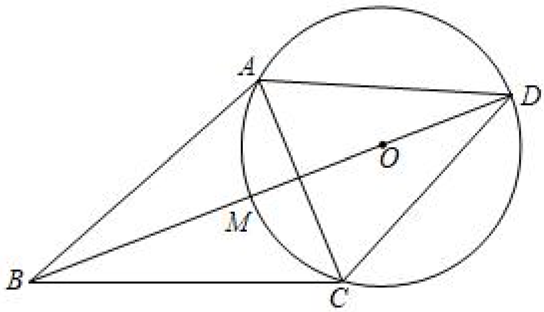
费马（*Ferrmat*，1601 年 8 月 17 日－1665 年 1 月 12 日），生于法国南部图卢兹（*Toulouse*）附近的波蒙•德•罗曼，被誉为业余数学家之王．1643 年，费马曾提出了一个著名的几何问题：给定不在一条直线上的三个点 A，B，C，求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置．另一位数学家托里拆利成功地解决了这个问题：如图 1，$\triangle ABC$（三个内角均小于 120°）的三条边的张角都等于 120°，即满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$ 的点 P，就是到点 A，B，C 的距离之和最小的点，后来人们把这个点 P 称为“费马点”．

下面是“费马点”的证明过程：如图 2，将 $\triangle APB$ 绕着点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'B$，使得 $A'P'$ 落在 $\triangle ABC$ 外，则 $\triangle A'AB$ 为等边三角形，$\therefore P'B=PB=PP'$，于是 $PA+PB+PC=P'A'+PP'+PC\geqslant A'C$，…．

任务：（1）材料中，判定 $\triangle A'AB$ 为等边三角形的依据是 顶角为 60° 等腰三角形是等边三角形 ．

（2）请你完成剩余的部分．

（3）如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，以 AC 为一边作等边 $\triangle ACD$，⊙O 是 $\triangle ACD$ 的外接圆，连接 BD 交⊙O 于点 M，求证：M 是 $\triangle ABC$ 的费马点．



【考点】圆的综合题．

【专题】新定义；数形结合；应用意识．

【分析】（1）判定依据是顶角为 60° 等腰三角形是等边三角形；

（2）根据题中条件可知当 $A'P'PC$ 四点共线时 $PA+PB+PC$ 有最小值为 $A'C$ 的长度，求出

此时$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$即可；

（3）先根据MD是直径和$\triangle ACD$为等边三角形证直角三角形MCD和直角三角形MAD全等，得出$\angle ADM+\angle CDM=\frac{1}{2}\angle ADC=30°$，再根据外角定义计算出$\angle AMB=\angle BMC=\angle AMC=120°$即可．

【解答】解：（1）由题知判定依据的是顶角为60°等腰三角形是等边三角形；

（2）补充如下：

∴当A'，P'，P，C四点在同一直线上时$PA+PB+PC$有最小值为$A'C$的长度，

∵$P'B=PB$，$\angle P'BP=60°$，

∴$\triangle P'BP$为等边三角形，

则当A'，P'，P，C四点在同一直线上时，

$\angle BPC=180°-\angle P'PB=180°-60°=120°$，

$\angle APB=\angle A'PB=180°-\angle BP'P=180°-60°=120°$，

$\angle APC=360°-\angle BPC-\angle APC=360°-120°-120°=120°$，

∴满足$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$的点$P$，就是到点$A$，$B$，$C$的距离之和最小的点；

（3）如右图，连接MA，MC，

∵$\triangle ACD$为等边三角形，

∴$\angle DAC=\angle ADC=\angle ACD=60°$，

又∵$\odot O$是$\triangle ACD$的外接圆，

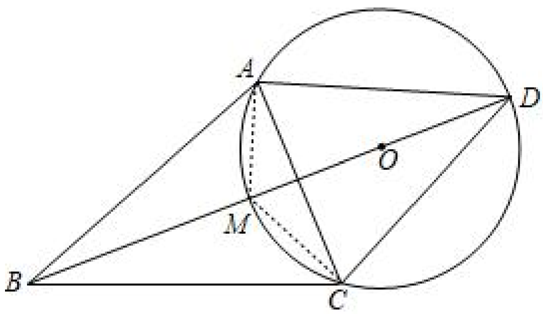
∴$\angle AMD=\angle ACD=60°$，

∴$\angle AMB=180°-\angle AMD=180°-60°=120°$，

同理可得$\angle BMC=120°$，

∴$\angle AMC=360°-\angle AMB-\angle BMC=360°-120°-120°=120°$，

即点M是$\triangle ABC$的“费马点”．



【点评】本题主要考查“费马点”的证明过程，熟练掌握等边三角形的性质性质是解题

的关键．

5．（2020秋•田家庵区校级月考）（原题初探）（1）小明在数学作业本中看到有这样一道作业题：如图1，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，连结 PA，PB，PC 现将△PAB 绕点 B 顺时针旋转90°得到的△$P'CB$，连接 PP'．若 $PA=\sqrt{2}$，$PB=3$，$\angle APB=135°$，则 PC 的长为 $\underline{\ \ 2\sqrt{5}\ \ }$，正方形 $ABCD$ 的边长为 $\underline{\ \ \sqrt{17}\ \ }$．

（变式猜想）（2）如图2，若点 P 是等边△ABC 内的一点，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，请猜想 $\angle APB$ 的度数，并说明理由．

（拓展应用）（3）聪明的小明经过上述两小题的训练后，善于反思的他又提出了如下的问题：

如图3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=3$，$CD=2$，$\angle ABC=\angle ACB=\angle ADC=45°$，则 BD 的长度为 $\underline{\ \ \sqrt{22}\ \ }$．

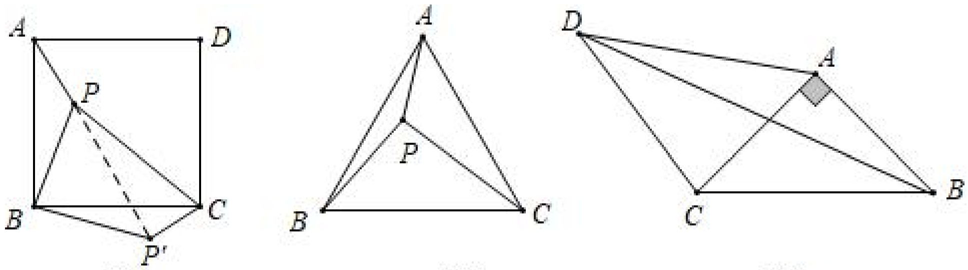


图1　　图2　　图3

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；能力层次；运算能力．

【分析】（1）由旋转的性质得 $BP=BP'=3$，$P'C=PA=\sqrt{2}$，$\angle PBP'=90°$，$\angle BP'C=\angle APB=135°$，则△$BPP'$ 为等腰直角三角形，再由勾股定理得 $PC=2\sqrt{5}$，过点 A 作 $AE\perp BP$ 交 BP 的延长线于 E，则△AEP 是等腰直角三角形，得 $AE=PE=1$，得 $BE=4$，然后由勾股定理即可求解；

（2）由旋转的性质得△BPP' 是等边三角形，则 $PP'=BP=4$，$\angle BPP'=60°$，$AP=3$，$AP'=PC=5$，再由勾股定理得逆定理得△APP' 为直角三角形，即可求解；

（3）由旋转的性质得 $AK=AD=3$，$CK=BD$，$\angle KAD=90°$，则△DAK 是等腰直角三角形，得 $DK=3\sqrt{2}$，$\angle ADK=45°$，再证 $\angle CDK=90°$，即可解决问题．

【解答】解：（1）∵△PAB 绕点 B 顺时针旋转90°得到的△$P'CB$，

∴$BP=BP'=3$，$P'C=PA=\sqrt{2}$，$\angle PBP'=90°$，$\angle BP'C=\angle APB=135°$，

∴△BPP' 为等腰直角三角形，

∴∠$BP'P$＝45°，$PP'=\sqrt{2}PB$＝$3\sqrt{2}$，

∴∠$PP'C$＝135°﹣45°＝90°，

在 Rt△$PP'C$ 中，由勾股定理得：$PC=\sqrt{PP'^2+P'C^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$，

过点 A 作 $AE⊥BP$ 交 BP 的延长线于 E，如图 1 所示：

∵∠APB＝135°，

∴∠APE＝180°﹣135°＝45°，

∴△AEP 是等腰直角三角形，

∴AE＝PE=$\frac{\sqrt{2}}{2}PA=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$，

∴BE＝PB+PE＝3+1＝4，

在 Rt△AEB 中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$，$\sqrt{17}$；

（2）∠APB 的度数为 150°，理由如下：

∵△ABC 是等边三角形，

∴AB＝BC，∠ABC＝60°，

将△BPC 绕点 B 逆时针旋转 60°，得到△$BP'A$，连接 PP'，如图 2 所示：

则△BPP' 是等边三角形，

∴PP'＝BP＝4，∠BPP'＝60°，

∵AP＝3，AP'＝PC＝5，

∴$P'P^2+AP^2=AP'^2$，

∴△APP' 为直角三角形，

∴∠APP'＝90°，

∴∠APB＝∠APP'+∠BPP'＝90°+60°＝150°；

（3）∵∠ABC＝∠ACB＝∠ADC＝45°，

∴△BAC 是等腰直角三角形，

∴∠BAC＝90°，AB＝AC，

将△ABD 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到△ACK，连接 DK，如图 3 所示：

由旋转的性质得：AK＝AD＝3，CK＝BD，∠KAD＝90°，

∴△DAK 是等腰直角三角形，

$\therefore DK=\sqrt{2}AD=3\sqrt{2}$，$\angle ADK=45°$，

$\therefore \angle CDK=\angle ADC+\angle ADK=45°+45°=90°$，

$\therefore \triangle CDK$ 是直角三角形，

$\therefore CK=\sqrt{DK^2+CD^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$，

$\therefore BD=\sqrt{22}$，

故答案为：$\sqrt{22}$.

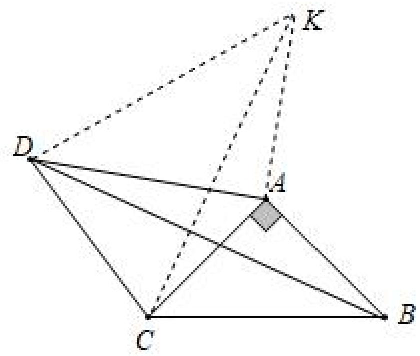


图3

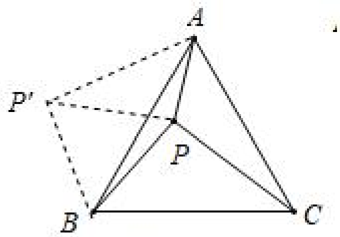


图 2

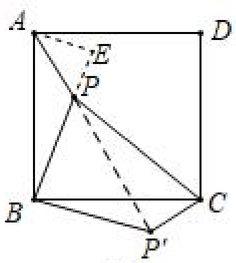


图1

【点评】本题是四边形综合题目，考查了正方形的性质、旋转的性质、等腰直角三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、勾股定理和勾股定理的逆定理等知识，本题综合性强，熟练掌握正方形的性质和旋转的性质是解题的关键，属于中考常考题型.

6.（2017 秋•鄄城区校级期中）下面是一道例题及其解答过程，请补充完整.

（1）如图 1，在等边三角形 ABC 内部有一点 P，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 $\angle APB$ 的度数.

解：将△APC绕点A逆时针旋转60°，得到△$AP'B$，连接PP'，则△APP'为等边三角形．

∵$PP'=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$．

∴△BPP'为<u>　直角　</u>三角形．

∴∠APB的度数为<u>　150°　　</u>．

（2）类比延伸

如图2，在正方形$ABCD$内部有一点P，若∠$APD=135°$，试判断线段PA、PB、PD之间的数量关系，并说明理由．

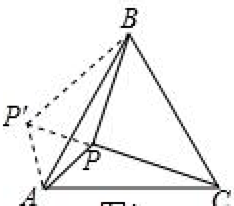


图1

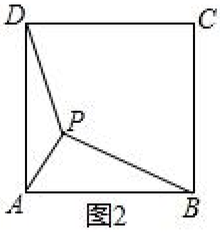


图2

【考点】旋转的性质；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质；正方形的性质．

【专题】常规题型．

【分析】（1）根据勾股定理的逆定理可得到△BPP'为直角三角形，且∠$BPP'=90°$，即可得到∠APB的度数；

（2）把△ADP绕点A顺时针旋转90°得到△ABP'，根据旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状可得$P'B=PD$，$P'A=PA$，然后求出△APP'是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质得出$PP'^2=2PA^2$，∠$PP'A=45°$，再求出∠$PP'B=90°$，然后利用勾股定理得出$PP'^2+P'B^2=PB^2$，等量代换得出$2PA^2+PD^2=PB^2$．

【解答】解：（1）如图1，将△APC绕点A逆时针旋转60°，得到△$AP'B$，连接PP'，则△APP'为等边三角形．

∵$PP'=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$．

∴△BPP'为直角三角形．

∴∠APB的度数为$90°+60°=150°$．

故答案为：直角；150°；

（2）$2PA^2+PD^2=PB^2$．理由如下：

如图 2，把△ADP 绕点 A 顺时针旋转 90°得到△ABP'，连接 PP'．

则 $P'B=PD$，$P'A=PA$，$\angle PAP'=90°$，

∴△APP' 是等腰直角三角形，

∴$PP'^2=PA^2+P'A^2=2PA^2$，$\angle PP'A=45°$，

∵$\angle APD=135°$，

∴$\angle AP'B=\angle APD=135°$，

∴$\angle PP'B=135°-45°=90°$，

在 Rt△$PP'B$ 中，由勾股定理得，$PP'^2+P'B^2=PB^2$，

∴$2PA^2+PD^2=PB^2$.

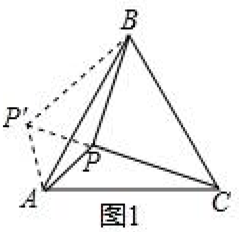


图1

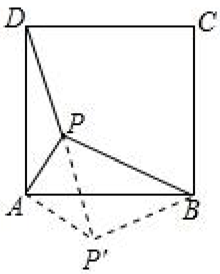


图2

【点评】本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．也考查了正方形的性质，等边三角形的判定与性质以及勾股定理的逆定理．

7.（2019•碑林区校级三模）问题提出

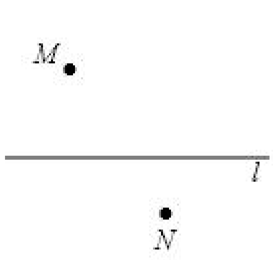
（1）如图，点 M、N 是直线 l 外两点，在直线 l 上找一点 K，使得 $MK+NK$ 最小．

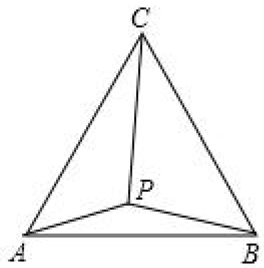
问题探究

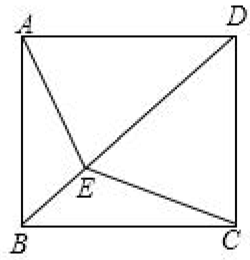
（2）在等边三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求$\angle APB$ 度数的大小．

问题解决

（3）如图，矩形 $ABCD$ 是某公园的平面图，$AB=30\sqrt{3}$米，$BC=60$ 米，现需要在对角线 BD 上修一凉亭 E，使得到公园出口 A、B，C 的距离之和最小．问：是否存在这样的点 E？若存在，请画出点 E 的位置，并求出 $EA+EB+EC$ 的和的最小值；若不存在，请说明理由．







【考点】四边形综合题．

【专题】矩形 菱形 正方形．

【分析】（1）根据两点间线段距离最短，连接点 M、N 是，与直线 l 交于点 K，点 K 即为所求；

（2）把△APB 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△ACP'，由旋转的性质可知 APP' 是等边三角形，所以∠$AP'P$＝60°，由勾股定理逆定理可知∠$PP'C$＝为直角，从而求得∠$AP'C$ 为 150°，所以∠APB 为 150°；

（3）把△ABE 绕点 B 逆时针旋转 60°得到△$A'BE'$，由旋转的性质，$A'B$＝AB＝$30\sqrt{3}$，BE'＝BE，$A'E'$＝AE，∠$E'BE$＝60°，$A'BA$＝60°，所以△$E'BE$ 是等边三角形，根据两点间线段距离最短，可知当 $EA+EB+EC$＝$A'C$ 时最短，连接 $A'C$，与 BD 的交点时，点 E 即为所求，此时 $EA+EB+EC$ 最短，最短距离为 $A'C$ 的长度，然后过点 A' 作 $A'G\perp BC$，利用勾股定理求出 $A'C$ 的长度，即求得 $EA+EB+EC$ 的和的最小值．

【解答】解：（1）如图 1，连接点 M、N，与直线 l 交于点 K，点 K 即为所求．

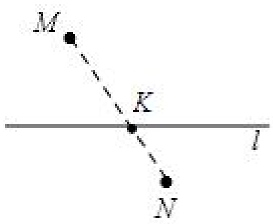


图1

（2）如图 2，把△APB 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△$AP'C$，

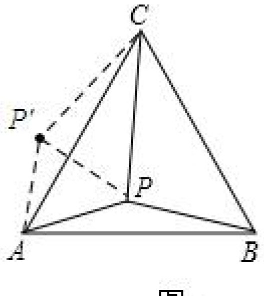


图2

由旋转的性质，$P'A$＝PA＝3，$P'C$＝PB＝4，∠PAP'＝60°，

∴$\triangle APP'$ 是等边三角形，

∴$PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，

∵$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PP'^2+P'C^2=PC^2$，

∴$\angle PP'C=90°$，

∴$\angle AP'C=\angle AP'P+\angle PP'C=60°+90°=150°$；

故$\angle APB=\angle AP'C=150°$；

（3）如图连接 AC，设在$\triangle ABC$ 内一点 M，把$\triangle ABM$ 绕点 B 逆时针旋转 60°得到$\triangle GBM'$，由旋转的性质，$GB=AB=30\sqrt{3}$，$BM'=BM$，$GM=AM$，$GB=AB$，$\angle M'BM=60°$，$\angle GBA=60°$，

∴$\triangle M'BM$、$\triangle GAB$ 是等边三角形，

∴$BM=MM'$，

∴$MA+MB+MC=GM'+MM'+MC$，

根据两点间线段距离最短，可知当 $MA+MB+MC=GC$ 时最短，

∵$\triangle GAB$ 是等边三角形，

∴以 AC 为一边作等边三角形 ACF，

∴$MA+MB+MC$ 最小值为 BF 的长，

此时点 M 在线段 BF 上，

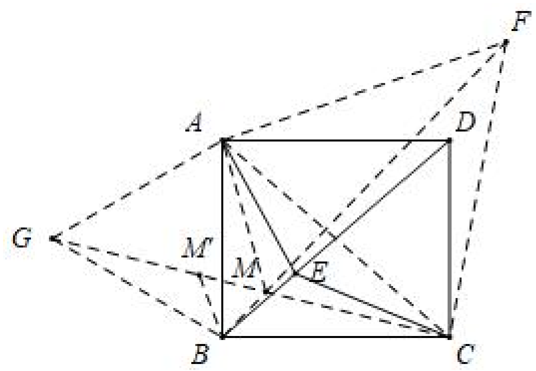
∴点 M 为 CG、BF 的交点．

若点 M 与点 E 重合，即 M 在对角线 BD 上，

则点 M 为 BF 与 BD 的交点，此时点 M（E）与点 B 重合，

显然不符合题意，故点 M 不在对角线 BD 上，

即对角线 BD 上不存在这样的点 E，使得到公园出口 A、B，C 的距离之和最小．



【点评】本题是四边形综合题，主要考查了旋转知识、三角形全等、特殊角直角三角形、等边三角形的性质和勾股定理，熟练掌握旋转知识构建全等三角形是解题的关键．

8．（2018•禹会区一模）如图（1），P 为△ABC 所在平面上一点，且∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°，则点 P 叫做△ABC 的费马点．

（1）如果点 P 为锐角△ABC 的费马点，且∠ABC＝60°．

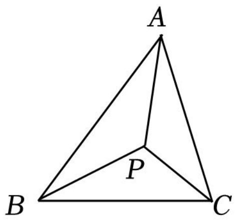
①求证：△ABP∽△BCP；

②若 PA＝3，PC＝4，则 PB＝__$2\sqrt{3}$__．

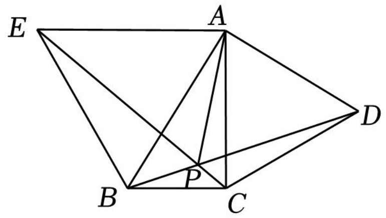
（2）已知锐角△ABC，分别以 AB、AC 为边向外作正△ABE 和正△ACD，CE 和 BD 相交于 P 点．如图（2）

①求∠CPD 的度数；

②求证：P 点为△ABC 的费马点．



（1）



（2）

【考点】相似形综合题．

【专题】计算题；综合题；图形的相似．

【分析】（1）①根据题意，利用内角和定理及等式性质得到一对角相等，利用两角相等的三角形相似即可得证；

②由三角形 ABP 与三角形 BCP 相似，得比例，将 PA 与 PC 的长代入求出 PB 的长即可；

（2）①根据三角形 ABE 与三角形 ACD 为等边三角形，利用等边三角形的性质得到两对边相等，两个角为 60°，利用等式的性质得到夹角相等，利用 SAS 得到三角形 ACE 与三角形 ABD 全等，利用全等三角形的对应角相等得到∠1＝∠2，再由对顶角相等，得到∠5＝∠6，即可求出所求角度数；

②由三角形 ADF 与三角形 CPF 相似，得到比例式，变形得到积的恒等式，再由对顶角相等，利用两边成比例，且夹角相等的三角形相似得到三角形 AFP 与三角形 CFD 相似，利用相似三角形对应角相等得到∠APF 为 60°，由∠APD+∠DPC，求出∠APC 为 120°，

进而确定出$\angle APB$与$\angle BPC$都为120°，即可得证.

【解答】（1）证明：①∵$\angle PAB+\angle PBA=180°-\angle APB=60°$，$\angle PBC+\angle PBA=\angle ABC=60°$，

∴$\angle PAB=\angle PBC$，

又∵$\angle APB=\angle BPC=120°$，

∴$\triangle ABP\backsim\triangle BCP$，

②解：∵$\triangle ABP\backsim\triangle BCP$，

∴$\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}$，

∴$PB^2=PA\cdot PC=12$，

∴$PB=2\sqrt{3}$；

故答案为：$2\sqrt{3}$；

（2）解：①∵$\triangle ABE$与$\triangle ACD$都为等边三角形，

∴$\angle BAE=\angle CAD=60°$，$AE=AB$，$AC=AD$，

∴$\angle BAE+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC$，即$\angle EAC=\angle BAD$，

在$\triangle ACE$和$\triangle ABD$中，

$$\begin{cases}AC=AD\\ \angle EAC=\angle BAD\\ EA=AB\end{cases}$$，

∴$\triangle ACE\cong\triangle ABD$（$SAS$），

∴$\angle 1=\angle 2$，

∵$\angle 3=\angle 4$，

∴$\angle CPD=\angle 6=\angle 5=60°$；

②证明：方法一：∵$\triangle ADF\backsim\triangle CFP$，

∴$\frac{AF}{CP}=\frac{DF}{PF}$，

∴$AF\cdot PF=DF\cdot CP$，

∵$\angle AFP=\angle CFD$，

∴$\triangle AFP\backsim\triangle CDF$.

∴$\angle APF=\angle ACD=60°$，

∴$\angle APC=\angle CPD+\angle APF=120°$，

∴$\angle BPC=120°$，

∴$\angle APB=360^\circ-\angle BPC-\angle APC=120^\circ$，

∴P 点为△ABC 的费马点．

方法二：由①知：$\angle CPD=60^\circ$，

∴$\angle BPC=180^\circ-\angle CPD=120^\circ$，

由①知：$\angle 1=\angle 2$，

∴A，P，C，D 共圆，

∴$\angle APC+\angle ADC=180^\circ$，

∴$\angle APC=180^\circ-\angle ADC=120^\circ$，

∴$\angle APB=360^\circ-\angle BPC-\angle APC=120^\circ$，

∴P 点为△ABC 的费马点．

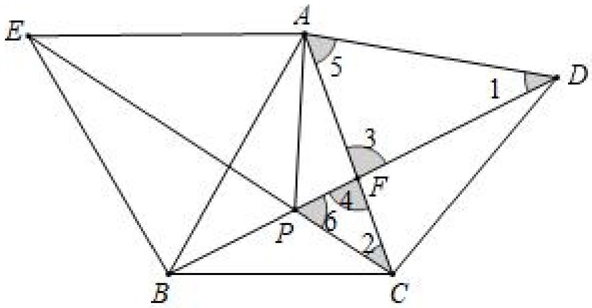


图2

【点评】此题属于相似形综合题，涉及的知识有：相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，费马点的定义，以及等边三角形的性质，熟练掌握判定与性质是解本题的关键．

9．（2016 秋•盐城校级月考）【方法呈现】：

（1）已知，点 P 是正方形 $ABCD$ 内的一点，连 PA、PB、PC．将△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90° 到△$P'CB$ 的位置（如图 1），设 AB 的长为 a，PB 的长为 b（$b<a$），求△PAB 旋转到△$P'CB$ 的过程中边 PA 所扫过区域（图 1 中阴影部分）的面积；

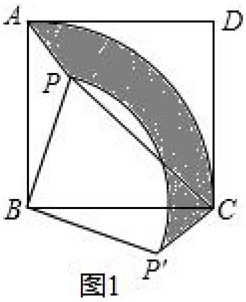


图1

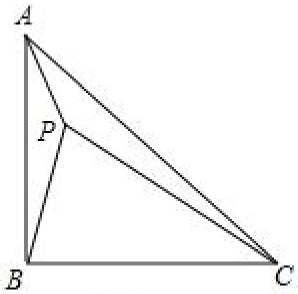


图2

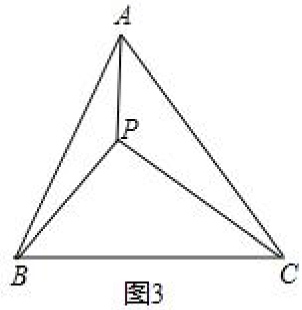


图3

【实际运用】:

（2）如图 2，点 P 是等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 内一点，$AB=BC$，连接 PA，PB，PC．若 $PA=2$，$PB=4$，$PC=6$，求$\angle APB$ 的大小；

【拓展延伸】:

（3）如图 3，点 P 是等边$\triangle ABC$ 内一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，则$\triangle APC$ 的面积是 $\underline{\frac{9\sqrt{3}}{4}+3}$（直接填答案）

【考点】四边形综合题．

【分析】(1）依题意，将$\triangle P'CB$ 逆时针旋转 90°可与$\triangle PAB$ 重合，此时阴影部分面积＝扇形 BAC 的面积－扇形 BPP'的面积，根据旋转的性质可知，两个扇形的中心角都是 90°，可据此求出阴影部分的面积．

（2）连接 PP'，求出$\triangle PBP'$是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得 $PP'=4\sqrt{3}$，$\angle BP'P=45°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle CP'P=90°$，然后计算即可得解；

（3）根据全等三角形的面积相等求出$\triangle APB$ 与$\triangle APC$ 的面积之和等于四边形 $APCP_1$ 的面积，然后根据等边三角形的面积与直角三角形的面积列式计算即可得解，同理求出$\triangle ABP$ 和$\triangle BPC$ 的面积的和，$\triangle APC$ 和$\triangle BPC$ 的面积的和，从而求出$\triangle ABC$ 的面积，然后根据$\triangle BPC$ 的面积＝$\triangle ABC$ 的面积－$\triangle APB$ 与$\triangle APC$ 的面积的和计算即可得解．

【解答】解：（1）∵将$\triangle PAB$ 绕点 B 顺时针旋转 90°到$\triangle P'CB$ 的位置，

∴$\triangle PAB\cong\triangle P'CB$，

∴$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle P'CB}$，

$S_{阴影}=S_{扇形BAC}-S_{扇形BPP'}=\frac{\pi}{4}(a^2-b^2)$；

（2）如图 2，连接 PP'．

∵将△PAB绕 B 点顺时针旋转 90°，与△$P'CB$ 重合，

∴△PAB≌△$P'CB$，∠PBP'＝90°，

∴BP＝BP'，∠APB＝∠$CP'B$，AP＝CP'＝2，

∴△PBP'是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PB$＝$4\sqrt{2}$，∠$BP'P$＝45°．

在△CPP'中，∵PP'＝$4\sqrt{2}$，CP'＝2，PC＝6，

∴$PP'^2+CP'^2$＝PC^2，

∴△$CP'P$ 是直角三角形，∠$CP'P$＝90°，

∴∠$CP'B$＝∠$BP'P$+∠$CP'P$＝45°+90°＝135°；

（3）如图 3①，将△PAB 绕 A 点逆时针旋转 60°得到△P_1AC，连接 PP_1，

∴△APB≌△AP_1C，

∴AP＝AP_1，∠PAP_1＝60°，CP_1＝BP＝4，

∴△PAP_1 是等边三角形，

∴PP_1＝AP＝3，

∵CP＝5，CP_1＝4，PP_1＝3，

∴$PP_1^2+CP_1^2$＝CP^2，

∴△CP_1P 是直角三角形，∠CP_1P＝90°，

∴$S_{\triangle APP1}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$S_{\triangle PP1C}=\frac{1}{2}\times3\times4$＝6，

∴$S_{四边形APCP1}$＝$S_{\triangle APP1}+S_{\triangle PP1C}=\frac{9\sqrt{3}}{4}+6$；

∵△APB≌△AP_1C，

∴$S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}$＝$S_{四边形APCP1}=\frac{9\sqrt{3}}{4}+6$；

如图 3②，同理可求：△ABP 和△BPC 的面积的和$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times4=4\sqrt{3}+6$，

△APC 和△BPC 的面积的和$=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{25\sqrt{3}}{4}+6$，

∴△ABC 的面积$=\frac{1}{2}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+6+4\sqrt{3}+6+\frac{25\sqrt{3}}{4}+6\right)=\frac{25\sqrt{3}}{4}+9$，

∴△APC 的面积＝△ABC 的面积－△APB 与△BPC 的面积的和＝$\left(\frac{25\sqrt{3}}{4}+9\right)-\left(4\sqrt{3}+6\right)$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+3$．

故答案为$\frac{9\sqrt{3}}{4}+3$．

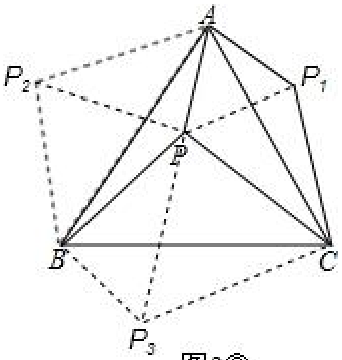


图3②

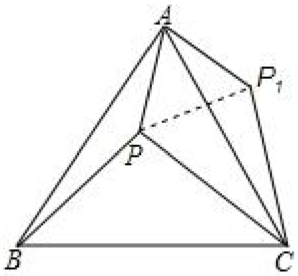


图3①

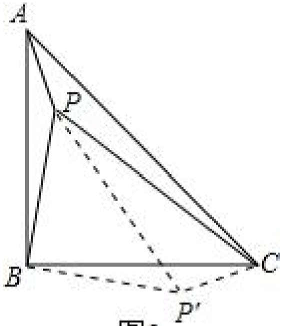


图2

【点评】本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．也考查了勾股定理的逆定理以及等腰直角三角形的判定与性质，三角形的面积，其中（3）较为复杂，求出△*ABC* 的面积是解题的关键．

10．（2015 秋•高青县期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 *ABC* 内有一点 *P*，且 *PA*＝3，*PB*＝4，*PC*＝5，求∠*APB* 的度数；

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造△*AP*′ *C*，连接 *PP*′，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

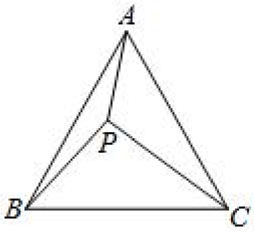


图 1

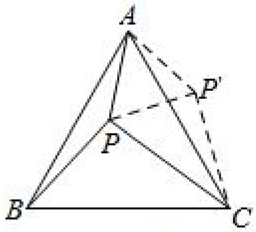


图 2

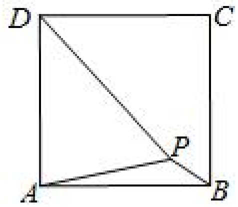


图 3

（1）请你回答：图 1 中∠*APB* 的度数等于<u> 150° </u>．（直接写答案）

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，在正方形 *ABCD* 内有一点 *P*，且 $PA=2\sqrt{2}$，$PB=1$，$PD=\sqrt{17}$．

（2）求∠*APB* 的度数；

（3）求正方形的边长．

【考点】旋转的性质；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质；正方形的性质．

【分析】（1）把△*APB* 绕点 *A* 逆时针旋转 60°得到△*ACP*′，由旋转的性质可得 *P*′*A*＝*PA*，*P*′*C*＝*PB*，∠*PAP*′＝60°，证出△*APP*′是等边三角形，由等边三角形的性质求出 *PP*′＝*PA*＝3，∠*AP*′*P*＝60°，再由勾股定理逆定理求出∠*PP*′*C*＝90°，求出∠*AP*′*C*，即为∠*APB* 的度数；

（2）把△*APB* 绕点 *A* 逆时针旋转 90°得到△*ADP*′，由旋转的性质可得 *P*′*A*＝*PA*，*P*′*D*＝*PB*，∠*PAP*′＝90°，证出△*APP*′是等腰直角三角形，由等腰直角三角形的性质求出 *PP*′，∠*AP*′*P*＝45°，再利用勾股定理逆定理求出∠*PP*′*D*＝90°，然后求出∠*AP*′*D*，即为∠*APB* 的度数；

（3）求出点 *P*′、*P*、*B* 三点共线，过点 *A* 作 *AE*⊥*PP*′于 *E*，根据等腰直角三角形的性质求出 $AE=PE=\frac{1}{2}PP'$，然后求出 *BE*，在 Rt△*ABE* 中，利用勾股定理求出 *AB* 即可．

【解答】解：（1）如图 2，把△*APB* 绕点 *A* 逆时针旋转 60°得到△*ACP*′，

由旋转的性质，*P*′*A*＝*PA*＝3，*P*′*D*＝*PB*＝4，∠*PAP*′＝60°，∠*APB*＝∠*AP*′*C*，

∴△*APP*′是等边三角形，

∴*PP*′＝*PA*＝3，∠*AP*′*P*＝60°，

∵$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PP'^2+P'C^2=PC^2$，

∴∠*PP*′*C*＝90°，

∴$\angle AP'C=\angle AP'P+\angle PP'C=60°+90°=150°$；

故$\angle APB=\angle AP'C=150°$；

故答案为：150°．

（2）如图3，把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ADP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=2\sqrt{2}$，$P'D=PB=1$，$\angle PAP'=90°$，

∴$\triangle APP'$是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PA=4$，$\angle AP'P=45°$，

∵$PP'^2+P'D^2=4^2+1^2=17$，$PD^2=(\sqrt{17})^2=17$，

∴$PP'^2+P'D^2=PD^2$，

∴$\angle PP'D=90°$，

∴$\angle AP'D=\angle AP'P+\angle PP'D=45°+90°=135°$，

故$\angle APB=\angle AP'D=135°$，

（3）∵$\angle APB+\angle APP'=135°+45°=180°$，

∴点P'、P、B三点共线，

过点A作$AE\perp PP'$于E，

则$AE=PE=\frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}\times 4=2$，

∴$BE=PE+PB=2+1=3$，

在Rt$\triangle ABE$中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

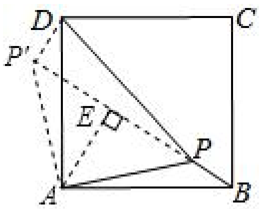


图3

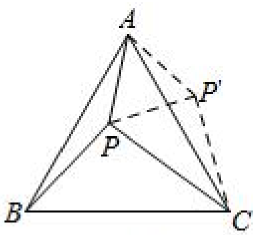


图 2

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，正方形的性质，勾股定理以及勾股定理逆定理的应用，全等三角形的判定与性质，求正方形的边长有一定的难度，作辅

助线构造出直角三角形是解题的关键．

11．（2015 秋•丰润区校级期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求$\angle APB$ 的度数．小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造$\triangle AP'C$，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

（1）请你回答：图 1 中$\angle APB$ 的度数等于 150°．

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

（2）如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 $PA=2\sqrt{2}$，$PB=1$，$PD=\sqrt{17}$，求$\angle APB$ 的度数和正方形的边长．

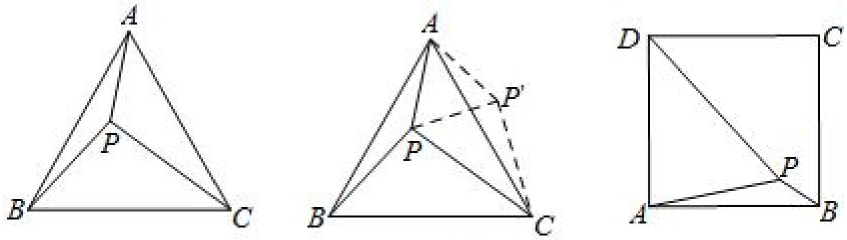


图 1　　图 2　　图 3

【考点】旋转的性质；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质；正方形的性质．

【专题】阅读型．

【分析】（1）把$\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转 60°得到$\triangle ACP'$，根据旋转的性质可得 $P'A=PA$，$P'C=PB$，$\angle PAP'=60°$，然后求出$\triangle APP'$是等边三角形，根据等边三角形的性质求出 $PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'C=90°$，然后求出$\angle AP'C$，即为$\angle APB$ 的度数；

（2）把$\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转 90°得到$\triangle ADP'$，根据旋转的性质可得 $P'A=PA$，$P'D=PB$，$\angle PAP'=90°$，然后判断出$\triangle APP'$是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质求出 PP'，$\angle AP'P=45°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'D=90°$，然后求出$\angle AP'D$，即为$\angle APB$ 的度数；再求出点 P'、P、B 三点共线，过点 A 作 $AE\perp PP'$于 E，根据等腰直角三角形的性质求出 $AE=PE=\frac{1}{2}PP'$，然后求出 BE，在 Rt$\triangle ABE$ 中，利用勾股定理列式求出 AB 即可．

【解答】解：（1）如图 2，把$\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转 60°得到$\triangle ACP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=3$，$P'D=PB=4$，$\angle PAP'=60°$，

∴$\triangle APP'$ 是等边三角形，

∴$PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，

∵$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PP'^2+P'C^2=PC^2$，

∴$\angle PP'C=90°$，

∴$\angle AP'C=\angle AP'P+\angle PP'C=60°+90°=150°$；

故$\angle APB=\angle AP'C=150°$；

故答案为 150°．

（2）如图 3，把$\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转 90°得到$\triangle ADP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=2\sqrt{2}$，$P'D=PB=1$，$\angle PAP'=90°$，

∴$\triangle APP'$ 是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PA=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，$\angle AP'P=45°$，

∵$PP'^2+P'D^2=4^2+1^2=17$，$PD^2=(\sqrt{17})^2=17$，

∴$PP'^2+P'D^2=PD^2$，

∴$\angle PP'D=90°$，

∴$\angle AP'D=\angle AP'P+\angle PP'D=45°+90°=135°$，

故$\angle APB=\angle AP'D=135°$，

∵$\angle APB+\angle APP'=135°+45°=180°$，

∴点 P'、P、B 三点共线，

过点 A 作 $AE\perp PP'$ 于 E，

则 $AE=PE=\frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}\times4=2$，

∴$BE=PE+PB=2+1=3$，

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

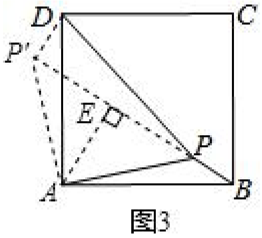


图3

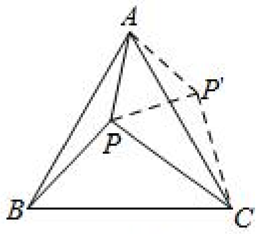


图 2

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，正方形的性质，勾股定理以及勾股定理逆定理的应用，全等三角形的判定与性质，求正方形的边长有一定的难度，作辅助线构造出直角三角形是解题的关键．

12．（2014•河南）（1）探究发现

下面是一道例题及其解答过程，请补充完整．

如图 1，在等边三角形 ABC 内部有一点 P，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$．求$\angle APB$ 的度数．

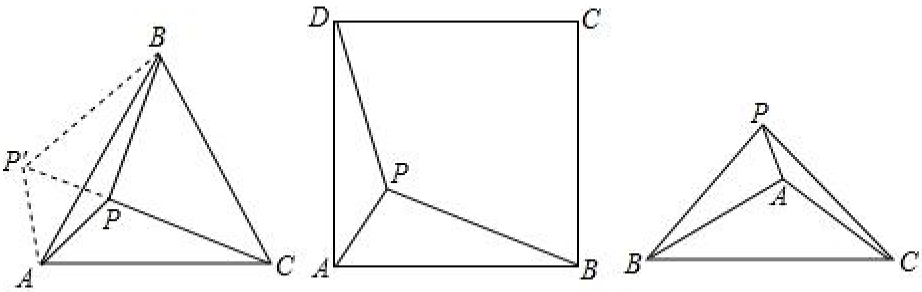


图1　　图2　　图3

解：将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△$AP'B$，连接 PP'，则△APP'为等边三角形．

∵$P'P=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$

△BPP'为<u>　直角　</u>三角形

∴$\angle APB$ 的度数为<u>　150°　</u>．

（2）类比延伸

如图 2，在正方形 $ABCD$ 内部有一点 P，若$\angle APD=135°$，试判断线段 PA、PB、PD 之间的数量关系，并说明理由．

（3）联想拓展

如图 3，在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$．点 P 在直线 AB 上方且$\angle APB=60°$，试判断是否存在常数 k，满足$(kPA)^2+PB^2=PC^2$．若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由．

【考点】四边形综合题．

【专题】矩形 菱形 正方形．

【分析】（1）根据勾股定理的逆定理可得到△BPP' 为直角三角形，且∠BPP' ＝90°，即可得到∠APB 的度数；

（2）把△ADP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到△ABP'，根据旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状可得 $P'B$＝PD，$P'A$＝PA，然后求出△APP' 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质得出 PP'^2＝$2PA^2$，∠$PP'A$＝45°，再求出∠$PP'B$＝90°，然后利用勾股定理得出 $PP'^2+P'B^2=PB^2$，等量代换得出 $2PA^2+PD^2=PB^2$．

（3）将△APC 绕 A 点顺时针旋转 120° 得到△$AP'B$，连接 PP'，过点 A 作 $AH\perp PP'$，论证 $PP'=\sqrt{3}PA$，再根据勾股定理代换即可．

【解答】解：（1）如图 1，将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△$AP'B$，连接 PP'，则△APP' 为等边三角形．

∵PP'＝PA＝3，PB＝4，$P'B$＝PC＝5，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$．

∴△BPP' 为直角三角形．

∴∠APB 的度数为 90°+60°＝150°．

故答案为：直角；150°；

（2）$2PA^2+PD^2=PB^2$．理由如下：

如图 2，把△ADP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到△ABP'，连接 PP'．

则 $P'B$＝PD，$P'A$＝PA，∠PAP'＝90°，

∴△APP' 是等腰直角三角形，

∴$PP'^2=PA^2+P'A^2=2PA^2$，∠$PP'A$＝45°，

∵∠APD＝135°，

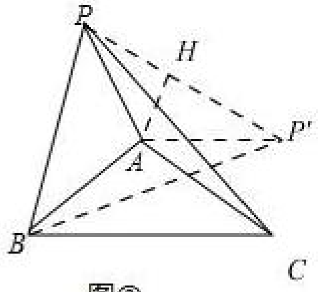
∴∠$AP'B$＝∠APD＝135°，

∴∠$PP'B$＝135°－45°＝90°，

在 Rt△$PP'B$ 中，由勾股定理得，$PP'^2+P'B^2=PB^2$，

∴$2PA^2+PD^2=PB^2$．

（3）$k=\pm\sqrt{3}$．



图③

证明：如图③

将△APC 绕 A 点顺时针旋转 120° 得到△$AP'B$，连接 PP'，过点 A 作 $AH\perp PP'$，

可得∠APP'＝30°，$PP'=\sqrt{3}PA$，$PC=P'B$，

∵∠APB＝60°，

∴∠BPP'＝90°，

∴$P'P^2+BP^2=P'B^2$，

∴（$\sqrt{3}PA$）$^2+PB^2=PC^2$

∵（kPA）$^2+PB^2=PC^2$，

∴$k=\pm\sqrt{3}$.

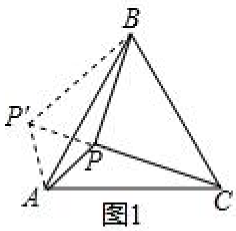


图1

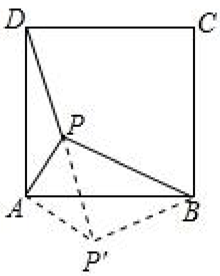


图2

【点评】本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．也考查了正方形的性质，等边三角形的判定与性质以及勾股定理的逆定理．

13．（2012 秋•昌平区期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求∠APB 的度数．

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造△$AP'C$，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

请你回答：图 1 中∠APB 的度数等于__150°____．

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

（1）如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 $PA=2\sqrt{2}$，$PB=1$，$PD=\sqrt{17}$，则$\angle APB$ 的度数等于__135°____，正方形的边长为__$\sqrt{13}$__；

（2）如图 4，在正六边形 $ABCDEF$ 内有一点 P，且 $PA=2$，$PB=1$，$PF=\sqrt{13}$，则$\angle APB$ 的度数等于__120°____，正六边形的边长为__$\sqrt{7}$__．

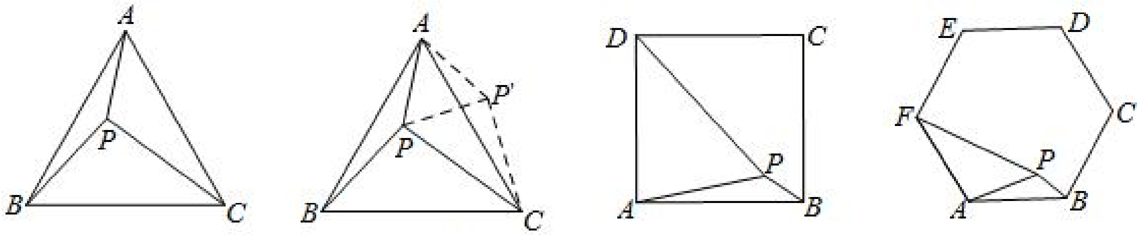


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

【考点】旋转的性质；等边三角形的性质；勾股定理的逆定理；正方形的性质；正多边形和圆．

【专题】几何综合题．

【分析】阅读材料：把△APB 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△ACP'，根据旋转的性质可得 $P'A=PA$，$P'C=PB$，$\angle PAP'=60°$，然后求出△APP'是等边三角形，根据等边三角形的性质求出 $PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'C=90°$，然后求出$\angle AP'C$，即为$\angle APB$ 的度数；

（1）把△APB 绕点 A 逆时针旋转 90°得到△ADP'，根据旋转的性质可得 $P'A=PA$，$P'D=PB$，$\angle PAP'=90°$，然后判断出△APP'是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质求出 PP'，$\angle AP'P=45°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'D=90°$，然后求出$\angle AP'D$，即为$\angle APB$ 的度数；再求出点 P'、P、B 三点共线，过点 A 作 $AE\perp PP'$于 E，根据等腰直角三角形的性质求出 $AE=PE=\frac{1}{2}PP'$，然后求出 BE，在 Rt△ABE 中，利用勾股定理列式求出 AB 即可；

（2）把△APB 绕点 A 逆时针旋转 120°得到△AFP'，根据旋转的性质可得 $P'A=PA$，$P'F=PB$，$\angle PAP'=120°$，然后求出△APP'是底角为 30°的等腰三角形，过点 A 作 $AM\perp PP'$于 M，设 PP'与 AF 相交于 N，求出 $AM=1$，再求出 PP'，$\angle AP'P=30°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'F=90°$，然后求出$\angle AP'F$，即为$\angle APB$ 的度数；根据 $P'F$、AM 的长度得到 $P'F=AM$，利用“角角边”证明△AMN 和△$FP'N$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $AN=FN$，$P'N=MN$，然后求出 MN，在 Rt△AMN 中，利用勾股定理列式求出 AN，然后求出 AF 即可．

【解答】解：阅读材料：把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转$60°$得到$\triangle ACP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=3$，$P'D=PB=4$，$\angle PAP'=60°$，

∴$\triangle APP'$是等边三角形，

∴$PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，

∵$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PP'^2+P'C^2=PC^2$，

∴$\angle PP'C=90°$，

∴$\angle AP'C=\angle AP'P+\angle PP'C=60°+90°=150°$；

故$\angle APB=\angle AP'C=150°$；

（1）如图3，把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转$90°$得到$\triangle ADP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=2\sqrt{2}$，$P'D=PB=1$，$\angle PAP'=90°$，

∴$\triangle APP'$是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PA=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，$\angle AP'P=45°$，

∵$PP'^2+P'D^2=4^2+1^2=17$，$PD^2=\sqrt{17}^2=17$，

∴$PP'^2+P'D^2=PD^2$，

∴$\angle PP'D=90°$，

∴$\angle AP'D=\angle AP'P+\angle PP'D=45°+90°=135°$，

故，$\angle APB=\angle AP'D=135°$，

∵$\angle APB+\angle APP'=135°+45°=180°$，

∴点P'、P、B三点共线，

过点A作$AE\perp PP'$于E，

则$AE=PE=\frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}\times4=2$，

∴$BE=PE+PB=2+1=3$，

在$Rt\triangle ABE$中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$；

（2）如图4，∵正六边形的内角为$\frac{1}{6}\times(6-2)\cdot180°=120°$，

∴把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转$120°$得到$\triangle AFP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=2$，$P'F=PB=1$，$\angle PAP'=120°$，

$\therefore \angle APP' = \angle AP'P = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$，

过点 A 作 $AM \perp PP'$ 于 M，设 PP' 与 AF 相交于 N，

则 $AM = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2} \times 2 = 1$，

$P'M = PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

$\therefore PP' = 2PM = 2\sqrt{3}$，

$\because PP'^2 + P'F^2 = (2\sqrt{3})^2 + 1^2 = 13$，$PF^2 = \sqrt{13}^2 = 13$，

$\therefore PP'^2 + P'F^2 = PF^2$，

$\therefore \angle PP'F = 90°$，

$\therefore \angle AP'F = \angle AP'P + \angle PP'F = 30° + 90° = 120°$，

故，$\angle APB = \angle AP'F = 120°$，

$\because P'F = AM = 1$，

$\because \triangle AMN$ 和 $\triangle FP'N$ 中，

$$\begin{cases} \angle PP'F = \angle AMN = 90° \\ \angle P'NF = \angle ANM \\ P'F = AM \end{cases}，$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle FP'N$（$AAS$），

$\therefore AN = FN$，$P'N = MN = \frac{1}{2}P'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $Rt\triangle AMN$ 中，$AN = \sqrt{AM^2 + MN^2} = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$，

$\therefore AF = 2AN = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$.

故答案为：150°；（1）135°，$\sqrt{13}$；（2）120°，$\sqrt{7}$.

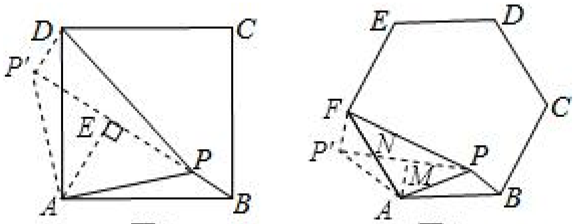
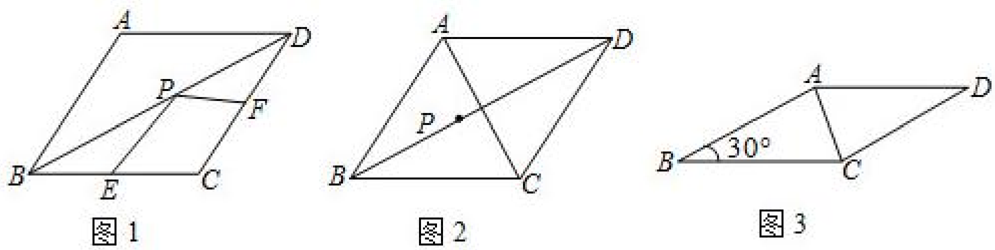


图3　图4

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，正方形的性质，勾股定理以及勾股定理逆定理的应用，全等三角形的判定与性质，（1）（2）两问求多边形的边长有一定的难度，作辅助线构造出直角三角形与全等三角形是解题的关键．

14．数学上称“费马点”是位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点．现定义：菱形对角线上一点到该对角线同侧两条边上的两点距离最小的点称为类费马点．例如：

菱形 $ABCD$，P 是对角线 BD 上一点，E、F 是边 BC 和 CD 上的两点，若点 P 满足 PE 与 PF 之和最小，则称点 P 为类费马点.



（1）如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 P 是 BD 上的类费马点

①E 为 BC 的中点，F 为 CD 的中点，则 $PE+PF=$__4__.

②E 为 BC 上一动点，F 为 CD 上一动点，且∠$ABC=60°$，则 $PE+PF=$__$2\sqrt{3}$__.

（2）如图 2，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，连接 AC，点 P 是△ABC 的费马点，（即 PA，PB，PC 之和最小），①当∠$ABC=60°$ 时，$BP=$__$\frac{4\sqrt{3}}{3}$__.

②当∠$ABC=30°$ 时，你能找到△ABC 的费马点 P 吗？画图做简要说明，并求此时 $PA+PB+PC$ 的值.

【考点】四边形综合题.

【专题】矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；推理能力.

【分析】(1) ①取 AB 的中点 E'，连接 PE'，通过 SAS 证明△BEP≌△$BE'P$，得 $PE=PE'$，再证四边形 $AE'FD$ 是平行四边形即可得出答案；

②由①知 $PE+PF=E'F$，$E'F$ 的最小值为 AB 与 CD 之间的距离，则过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，利用三角函数即可求出 CH 的值；

(2)①将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得△$BP'C'$，连接 PP'，$PA+PB+PC=PA+PP'+P'C'$，则当 P、P'在线段 AC'上时，$PA+PB+PC$ 最小值为 AC'的长，可证出 $BP=\frac{1}{3}AC'$；

②将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得△$BP'C'$，连接 PP'，$PA+PB+PC=PA+PP'+P'C'$，则当 P、P'在线段 AC'上时，$PA+PB+PC$ 最小值为 AC'的长，且点 P 是△ABC 内部的费马点，利用勾股定理求出 AC'的长即可.

【解答】解：(1) ①取 AB 的中点 E'，连接 PE'，

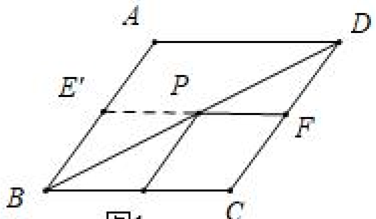


图1

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$BC=AB=CD$，$\angle ABP=\angle CBP$，

∵点 E，E'分别是 AB，BC 的中点，

∴$BE=BE'$，

在△BEP 和△$BE'P$ 中，

$$\begin{cases}BE=BE'\\ \angle EBP=\angle E'BP\\ BP=BP\end{cases}，$$

∴△BEP≌△$BE'P$（SAS），

∴$PE=PE'$，

∴$PE+PF=PE'+PF$，

∴当 E'、P、F 三点共线时，$PE+PF$ 最小值为 $E'F$ 的长，

∵$AE'=DF$，$AE'\parallel DF$，

∴四边形 $AE'FD$ 是平行四边形，

∴$E'F=AB=4$，

∴$PE+PF=4$，

故答案为：4；

②由①知 $PE+PF=E'F$，若 E、F 为动点，则 $E'F$ 的最小值为 AB 与 CD 之间的距离，

∴过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，

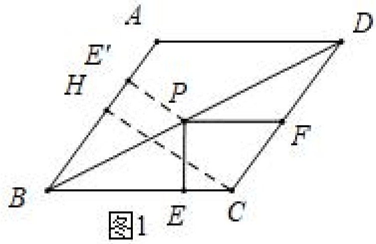


图1

在 Rt△BCH 中，

$\sin\angle CBH=\frac{CH}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$CH=2\sqrt{3}$，

∵点 P 是 BD 上的类费马点

∴$PE+PF$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$；

故答案为：$2\sqrt{3}$；

（2）①如图 2，将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得△$BP'C'$，连接 PP'，

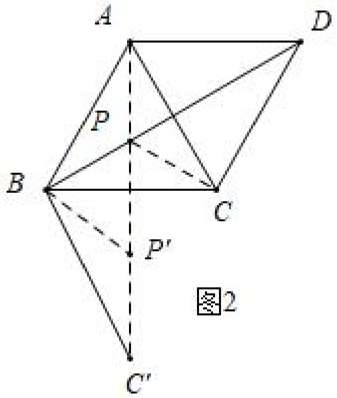


图2

∴$BP=BP'$，$PC=P'C'$，$\angle PBP'=60°$，

∴△BPP'是等边三角形，

∴$PP'=PB$，

∴$PA+PB+PC=PA+PP'+P'C'$，

∴当 P、P'在线段 AC'上时，$PA+PB+PC$ 最小值为 AC'的长，

∴连接 AC'，AC'与 BD 的交点为 P 点，

∵$AB=BC=4$，$\angle ABC=120°$，

∴$\angle BAP=\angle ABP=30°$，$AC'=4\sqrt{3}$，

∴$AP=BP$，

同理 $BP'=CP'$，

∴$BP=\frac{1}{3}AC'=\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

故答案为：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

②如图 3，将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得△$BP'C'$，连接 PP'，

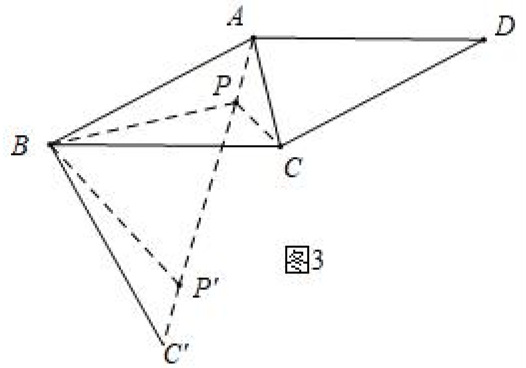


图3

∴$BP=BP'$，$PC=P'C'$，$\angle PBP'=60°$，$\angle CBC'=60°$，

∴△BPP'是等边三角形，

∴$PP'=PB$，

∴$PA+PB+PC=PA+PP'+P'C'$，

∴当P、P'在线段AC'上时，$PA+PB+PC$最小值为AC'的长，

且点P是△ABC内部的费马点，

∵$\angle ABC'=90°$，$AB=BC'=4$，

∴$AC'=\sqrt{AB^2+BC'^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

∴此时$PA+PB+PC$的最小值为$4\sqrt{2}$.

【点评】本题主要考查了菱形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定与性质，两点之间，线段最短，轴对称﹣最短路径等知识，利用旋转法添加辅助线是解决问题的关键.

15.（2021秋•北碚区校级期中）如图1，D、E、F是等边三角形ABC中不共线三点，连接AD、BE、CF，三条线段两两分别相交于D、E、F．已知$AF=BD$，$\angle EDF=60°$．

（1）证明：$EF=DF$；

（2）如图2，点M是ED上一点，连接CM，以CM为边向右作△CMG，连接EG．若$EG=EC+EM$，$CM=GM$，$\angle GMC=\angle GEC$，证明：$CG=CM$.

（3）如图3，在（2）的条件下，当点M与点D重合时，若$CD\perp AD$，$GD=4$，请问在△ACD内部是否存在点P使得P到△ACD三个顶点距离之和最小，若存在请直接写出距离之和的最小值；若不存在，试说明理由.

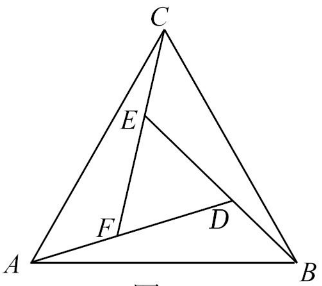


图1

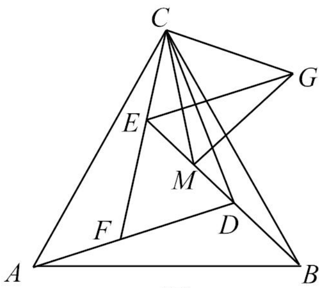


图2

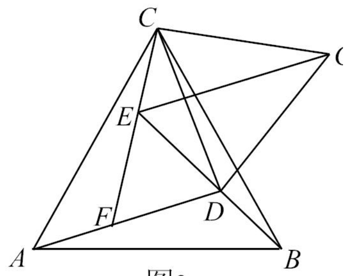


图3

【考点】三角形综合题.

【专题】图形的全等；等腰三角形与直角三角形；平移、旋转与对称；运算能力；推理能力；模型思想.

【分析】(1）可先推出$\angle CAF=\angle ABD$，再证$\triangle ACF\cong\triangle BAD$，即可得出结论；

(2）在EF上截取$EN=EM$，连接MN，可推出$\triangle EMN$是等边三角形，可证$\triangle NCM\cong\triangle EGM$，然后推出$\triangle CMG$是等边三角形，从而问题得证；

(3）先求得$AD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，将$\triangle DPC$绕点D顺时针旋转60°至$\triangle DQG$，连接AG，可得$\triangle PDQ$是等边三角形，于是$AP+PD+CP=AP+PQ+QG$，故当A、P、Q、G共线时，$AP+PD+CP$最小$=AG$，最后解斜三角形ADG，从而求得.

【解答】(1）证明：如图1，

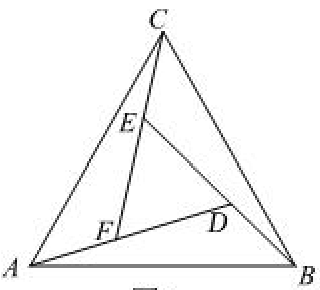


图1

∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$AC=AB$，

$\angle ACB=60°$，

∴$\angle CAF+\angle DAB=60°$，

∵$\angle EDF=60°$，

∴$\angle DAB+\angle ABD=60°$，

∴$\angle CAF=\angle ABD$，

∵$AF=BD$，

∴△ACF≌△BAD（SAS），

∴EF＝DF；

（2）证明：如图2，

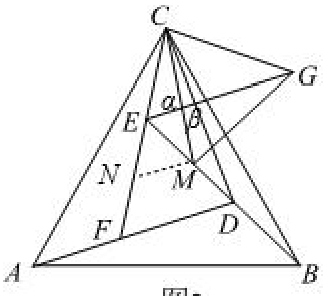


图2

由（1）知，

EF＝DF，∠EDF＝60°，

∴△DEF是等边三角形，

∴∠DEF＝60°，

在EF上截取EN＝EM，连接MN，

∴CN＝CE+EN＝CE+EM＝EG，

∴△EMN是等边三角形，

∴∠CNM＝60°，

∵∠GMC＝∠GEC，∠α＝∠β，

∴∠NCM＝∠EGM，

∵CM＝GM，

∴△NCM≌△EGM（SAS），

∴∠MEG＝∠CNM＝60°，

∴∠CEG＝180°﹣∠MEG﹣∠FED＝60°，

∴∠GME＝∠GEC＝60°，

∵CM＝GM，

∴△CMG是等边三角形，

∴CG＝CM；

（3）解：如图3，

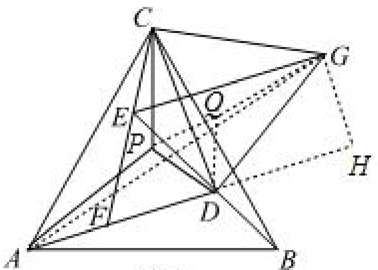


图3

由（1）（2）知，

△DEF 和△CDG 是等边三角形，

∴∠CFD＝60°，CD＝GD＝4，

∵CD⊥AD，

∴∠CDF＝90°，

∴AD＝CF= $\frac{CD}{sin60°}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$,

将△DPC 绕点 D 顺时针旋转 60°至△DQG，连接 AG，

∴AD＝DQ，CP＝QG，

∴△PDQ 是等边三角形，

∴PD＝PQ，

∴AP+PD+CP＝AP+PQ+QG，

∴当 A、P、Q、G 共线时，AP+PD+CP 最小＝AG，

作 GH⊥AD 于 H，

在 Rt△DGH 中，

GH= $\frac{1}{2}DG$＝2，

DH= $\frac{\sqrt{3}}{2}DG$＝$2\sqrt{3}$，

∴AH＝AD+DH= $\frac{8\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$,

∴AG= $\sqrt{GH^2+AH^2}$

$=\sqrt{(\frac{14\sqrt{3}}{3})^2+2^2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{39}$,

∴AP+PD+CP 的最小值是$\frac{4}{3}\sqrt{39}$.

【点评】本题考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，旋转的性质和应用

等知识，解决问题的关键是掌握“费马点”模型及“截长补短”等题型．

考点卡片

1．全等三角形的判定与性质

（1）全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具．在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件．

（2）在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形．

2．等边三角形的性质

（1）等边三角形的定义：三条边都相等的三角形叫做等边三角形，等边三角形是特殊的等腰三角形．

①它可以作为判定一个三角形是否为等边三角形的方法；

②可以得到它与等腰三角形的关系：等边三角形是等腰三角形的特殊情况．在等边三角形中，腰和底、顶角和底角是相对而言的．

（2）等边三角形的性质：等边三角形的三个内角都相等，且都等于60°．

等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴；它的任意一角的平分线都垂直平分对边，三边的垂直平分线是对称轴．

3．勾股定理的逆定理

（1）勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．

说明：

①勾股定理的逆定理验证利用了三角形的全等．

②勾股定理的逆定理将数转化为形，作用是判断一个三角形是不是直角三角形．必须满足较小两边平方的和等于最大边的平方才能做出判断．

（2）运用勾股定理的逆定理解决问题的实质就是判断一个角是不是直角．然后进一步结合其他已知条件来解决问题．

注意：要判断一个角是不是直角，先要构造出三角形，然后知道三条边的大小，用较小的两条边的平方和与最大的边的平方比较，如果相等，则三角形为直角三角形；否则不是．

4．三角形综合题

三角形综合题．

5．正方形的性质

（1）正方形的定义：有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

（2）正方形的性质

①正方形的四条边都相等，四个角都是直角；

②正方形的两条对角线相等，互相垂直平分，并且每条对角线平分一组对角；

③正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.

④两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形，同时，正方形又是轴对称图形，有四条对称轴.

6．四边形综合题

四边形综合题.

7．正多边形和圆

（1）正多边形与圆的关系

把一个圆分成 n（n 是大于 2 的自然数）等份，依次连接各分点所得的多边形是这个圆的内接正多边形，这个圆叫做这个正多边形的外接圆.

（2）正多边形的有关概念

①中心：正多边形的外接圆的圆心叫做正多边形的中心.

②正多边形的半径：外接圆的半径叫做正多边形的半径.

③中心角：正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.

④边心距：中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.

8．圆的综合题

圆的综合题.

9．旋转的性质

（1）旋转的性质：

____ ①对应点到旋转中心的距离相等. ____ ②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角. ____ ③旋转前、后的图形全等. ____（2）旋转三要素：①旋转中心； ②旋转方向； ③旋转角度. ____ 注意：三要素中只要任意改变一个，图形就会不一样.

10．相似形综合题

相似形综合题.