2023年中考数学复习探究性试题汇编之特殊四边形

一．解答题（共15小题）

1．（2023•凤翔县模拟）问题提出：

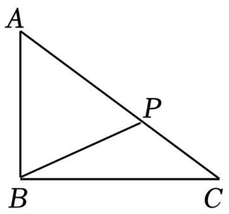
（1）如图①，在Rt△*ABC*中，∠*B*＝90°，*AB*＝5，*BC*＝12．若*P*是边*AC*上一点，则*BP*的最小值为 ______．

问题探究：

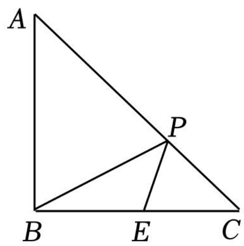
（2）如图②，在Rt△*ABC*中，*AB*＝*BC*，斜边*AC*的长为$4\sqrt{2}$，*E*是*BC*的中点，*P*是边*AC*上一点，试求*PB*+*PE*的最小值．

问题解决：

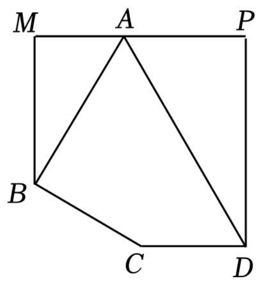
（3）某城区有一个五边形*MBCDP*空地（∠*M*＝∠*P*＝∠*PDC*＝90°，∠*C*＝150°），城建部门计划利用该空地建造一个居民户外活动广场，其中△*MAB*的部分规划为观赏区，用于种植各类鲜花，△*APD*部分规划为音乐区，供老年合唱团排练合唱或广场舞使用，四边形*ABCD*部分为市民健身广场，如图③所示．已知*AD*＝100米，*CD*＝50米，∠*BAD*＝60°，∠*ABC*＝90°．为了进一步提升服务休闲功能，满足市民游园和健身需求，现要在*AB*，*AD*上分别取点*E*，*F*，铺设一条由*CE*，*EF*，*FC*连接而成的步行景观道，已知铺设景观道的成本为100元/米，求铺设完这条步行景观道所需的最低成本．



图①



图②



图③

2．（2023•锡山区校级模拟）问题提出：已知矩形*ABCD*，点*E*为*AB*上的一点，*EF*⊥*AB*，交*BD*于点*F*．将△*EBF*绕点*B*顺时针旋转α（0°＜α＜90°）得到△*E*′*BF*′，则*AE*′与*DF*′有怎样的数量关系．

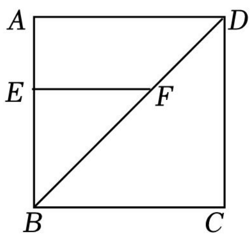


图1

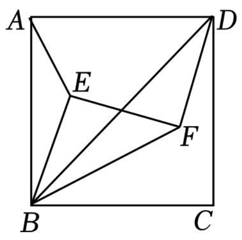


图2

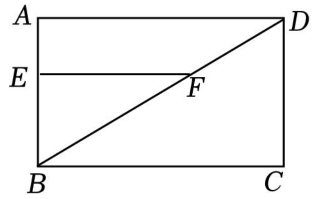


图3

【问题探究】

探究一：如图，已知正方形 $ABCD$，点 E 为 AB 上的一点，$EF\perp AB$，交 BD 于点 F.

（1）如图 1，直接写出$\dfrac{DF}{AE}$的值 ________；

（2）将△EBF 绕点 B 顺时针旋转到如图 2 所示的位置，连接 AE、DF，猜想 DF 与 AE 的数量关系，并证明你的结论；

探究二：如图，已知矩形 $ABCD$，点 E 为 AB 上的一点，$EF\perp AB$，交 BD 于点 F.

如图 3，若四边形 $ABCD$ 为矩形，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，将△$EBF$ 绕点 B 顺时针旋转α（0^o＜α≤90^o）得到△$E'BF'$（E、F 的对应点分别为 E'、F' 点），连接 AE'、DF'，则$\dfrac{AE'}{DF'}$的值是否随着α的变化而变化．若变化，请说明变化情况；若不变，请求出$\dfrac{AE'}{DF'}$的值．

【一般规律】

如图 3，若四边形 $ABCD$ 为矩形，$BC=mAB$，其它条件都不变，将△EBF 绕点 B 顺时针旋转α（0°＜α＜90°）得到△$E'BF'$，连接 AE'，DF'，请直接写出 AE' 与 DF' 的数量关系．

3．（2023•昔阳县模拟）综合与实践：

问题情境：如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是对角线 AC 上一点，连接 BE，过点 E 分别作 AC，BE 的垂线，分别交直线 BC，CD 于点 F，G．试猜想线段 BF 和 CG 的数量关系并加以证明．

数学思考：（1）请解答上述问题；

问题解决：（2）如图 2，在图 1 的条件下，将“正方形 $ABCD$”改为“矩形 $ABCD$”，其他条件不变．若 $AB=2$，$BC=3$，求$\dfrac{BF}{CG}$的值；

问题拓展：（3）在（2）的条件下，当点 E 为 AC 的中点时，请直接写出△CEG 的面积．

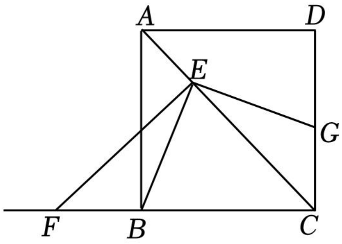


图1

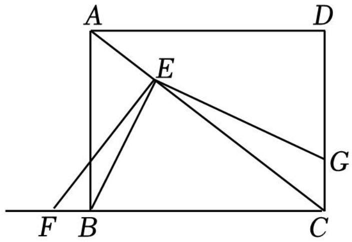
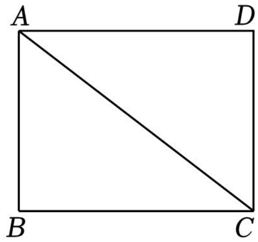


图2



备用图

4．（2023•金水区校级一模）如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=8$，将纸片折叠，使顶点 B 落在边 AD 上的 E 点处，折痕的一端 G 点在边 BC 上．

（1）如图 1，当折痕的另一端 F 在边 AB 上，且 $AF=\frac{8}{3}$ 时，则 $\angle BGE=$_______；

（2）如图 2，当折痕的另一端 F 在边 AD 上，点 E 与 D 点重合时，判断△FHD 和△DCG 是否全等？请说明理由．

（3）若 $BG=10$，当折痕的另一端 F 在边 AD 上，点 E 未落在边 AD 上，且点 E 到 AD 的距离为 2 时，直接写出 AF 的长．

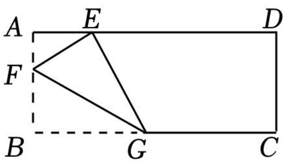


图1

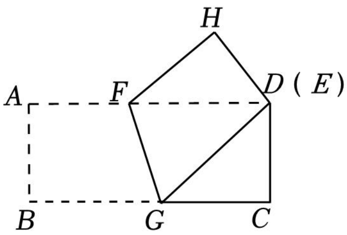


图2

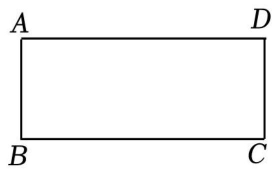


图3

5．（2023 春•汉阳区校级月考）如图 1，点 P 是 y 轴正半轴上一动点，点 C 是 x 轴正半轴上的动点，过点 P 作 $PD\perp CP$ 且 $CP=PD$．

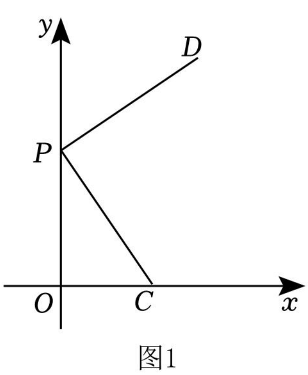


图1

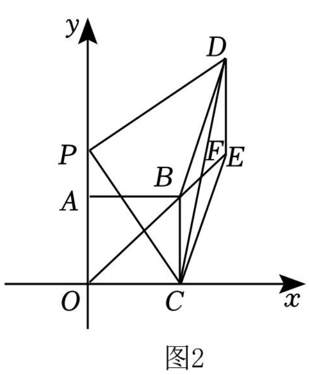


图2

（1）若点 C 的坐标为（6，0），点 P 的坐标为（0，8），求点 D 的坐标．

（2）如图 2，在（1）的条件下，点 A 的坐标为（0，6），点 B 的坐标为（6，6），连接 AB 和 CB 过点 D 作 $DE/\!/OA$ 交射线 OB 于点 E，连接 DC 交射线 OB 于点 F，试求点 F

的坐标.

（3）如图 2，连接 CE 和 BD，当 OC：OP＝_______时，四边形 $DECB$ 与四边形 $PDEC$ 的面积比为$\frac{12}{35}$.

6.（2023 春•广水市月考）阅读下面材料.

小炎遇到这个一个问题：如图 1，点 E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，$\angle EAF=45^\circ$，连接 EF，则 $EF=BE+DF$，试说明理由.

小炎是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法将这些分散的线段相对集中，她先尝试了翻折、旋转、平移的方法，最后发现线段 AB、AD 是共点并且相等的，于是找到解决问题的方法．她的方法是将△ABE 绕着点 A 逆时针旋转 90° 得到△ADG，再利用全等的知识解决这个问题（如图 2）.

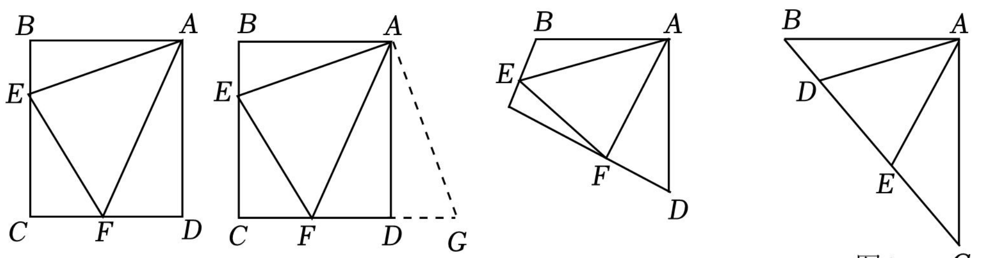


图1　图2　图3　图4

参考小炎同学思考问题的方法，解决下列问题：

（1）写出小炎的推理过程；

（2）如图 3，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，$\angle EAF=45^\circ$，若$\angle B$、$\angle D$ 都不是直角，则当$\angle B$ 与$\angle D$ 满足于 _______关系时，仍有 $EF=BE+DF$；

（3）如图 4，在△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点 D、E 均在边 BC 上，且$\angle DAE=45^\circ$，若 $BD=1$，$EC=2$，求 DE 的长.

7.（2023•庐阳区校级一模）如图 1，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=7$，$BC=10$，点 P 是 BC 边上的点，连结 AP，以 AP 为对称轴作△ABP 的轴对称图形△AQP.

（1）如图 1，连接 CQ，若 $CQ\parallel AP$，求 BP 的长；

（2）如图 2，当点 P，Q，D 三点共线时，恰有$\angle DCQ=\angle DPC$，求 BP 的长；

（3）如图 3，若点 P 在边 BC 运动的过程中，点 Q 到 CD 的最短距离为 1，求 BP 的长.

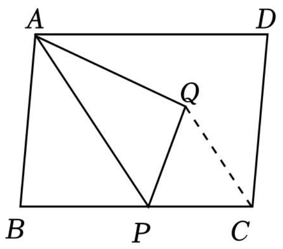


图1

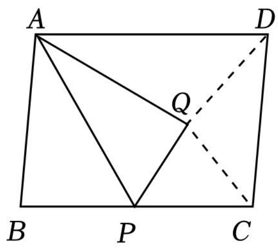


图2

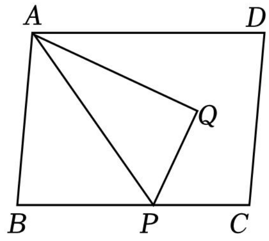


图3

8．（2022秋•云州区期末）综合与实践

问题情境：在矩形 $ABCD$ 中，E 为射线 BC 上一动点，连接 AE．

（1）如图1，当点 E 在 BC 边上时，将△ABE 沿 AE 翻折，使点 B 恰好落在对角线 BD 上点 F 处，AE 交 BD 于点 G．

基础探究：

①若 $\tan\angle DBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，试猜想△$ABF$ 的形状，并说明理由．

②当 $BC=6\sqrt{6}$，且 $EF=EC$ 时，求 AB 的长．

拓展探究：

（2）在②所得的矩形 $ABCD$ 中（仅保留 AB，BC 长），将矩形 $ABCD$ 沿 AE 进行翻折，点 C 的对应点为 C'，当 E，C'，D 三点共线时，请直接写出 BE 的长．

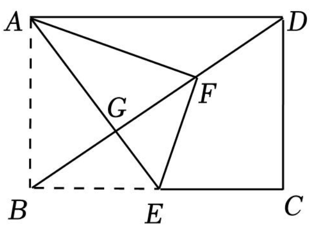
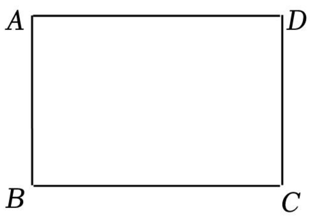
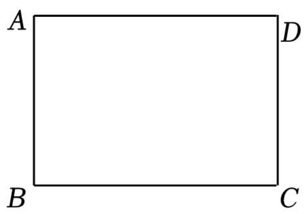


图1



备用图



备用图

9．（2022秋•南关区期末）如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，动点 P 从点 A 出发沿折线 AC—CB 以每秒5个单位长度的速度向终点 B 运动．当点 P 不与△ABC 的顶点重合时，过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，以 PD 为边在 PD 的下方作正方形 $PDEF$．设点 P 运动的时间为 t 秒．

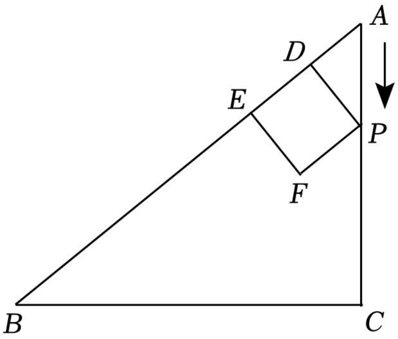
（1）用含 t 的代数式表示线段 PF 的长．

（2）当点 F 落在边 BC 上时，求 t 的值．

（3）作点 C 关于直线 PF 的对称点 C_1，

①当点 C_1 在△ABC 的内部时，求 t 的取值范围．

②连结 EC_1，当直线 EC_1 与△*ABC* 的边平行时，直接写出 t 的值．



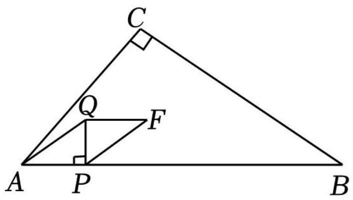
10．（2023•九台区模拟）如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝15，*BC*＝20．点 *P* 从点 *A* 出发，沿线段 *AB* 以每秒 4 个单位长度的速度向终点 *B* 匀速运动．当点 *P* 不与点 *A*、点 *B* 重合时，过点 *P* 作 *PQ*⊥*AB*，其中点 *Q* 在 *AB* 上方，∠*QAP*＝∠*ABC*，以 *AQ*、*AP* 为邻边作▱*APFQ*．设点 *P* 运动的时间为 t（秒）．

（1）边 *AB* 的长为 _______；点 *C* 到边 *AB* 的距离为 _______．

（2）当点 *F* 落在边 *BC* 上时，求 t 的值．

（3）设线段 *QF* 与边 *BC* 交于点 *M*，线段 *PF* 与边 *BC* 交于点 *N*，当 *MN*＝5 时，求 *AP* 的长．

（4）连结 *CP*，沿直线 *CP* 将▱*APFQ* 剪开，当剪开的两部分可以拼成一个不重叠无缝隙的三角形时，直接写出 t 的值．



11．（2022 秋•二七区期末）数学兴趣小组活动中，刘老师展示一个问题情境，供同学们探究：

问题情境：如图，Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*AB*＝10，*AC*＝8，点 *P* 为斜边 *AB* 上不与 *A*，*B* 重合的一个动点，过点 *P* 作 *PQ*⊥*AC* 于点 *Q*，分别过 *P*，*Q* 作 *PD*∥*AC*，*QD*∥*AB*，*PD* 交 *QD* 于点 *D*，请讨论可能发现的结论．

以下是讨论过程：

小明：我发现四边形 *APDQ* 是平行四边形，

理由：由作图可知，*PD*∥*AC*，*QD*∥*AB*，四边形 *APDQ* 是平行四边形

小亮：我和小明想法一样，但还可以用全等三角形来解决．

理由：∵*PD*∥*AC*，*QD*∥*AB*，∴∠*DPQ*＝∠*AQP*，∠*DQP*＝∠*APQ*．

又∵$PQ=QP$，∴$\triangle PDQ\cong\triangle QAP$．∴$PD=AQ$，$QD=PA$．

所以四边形$APDQ$是平行四边形

小红：我发现如果点 D 恰好落在 BC 上时，点P为AB 的中点．

请仔细阅读讨论过程，完成下述任务：

（1）小明推导四边形$APDQ$是平行四边形的依据是

____

，小亮推导四边形$APDQ$是平行四边形的依据是

____

，其中小亮得出$\triangle PDQ\cong\triangle QAP$的依据是

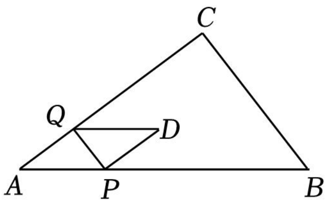
____

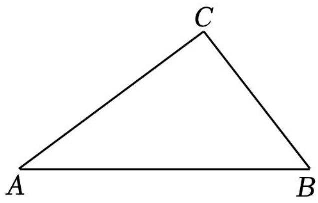
（填序号）；

①SSS；②SAS；③AAS；④ASA；⑤HL．

（2）当点D恰好落在BC上时，请证明小红的结论；

（3）若PD的中点为E，当点E恰好落在$\triangle ABC$一边的垂直平分线上时，直接写出此时AP的长．





备用图

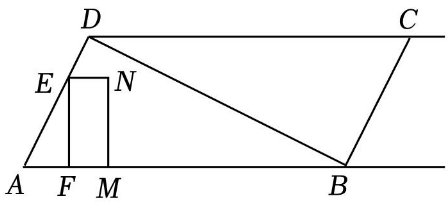
12．（2023•龙川县校级开学）如图①，在平行四边形$ABCD$中，$\angle ADB=90°$，$AD=2\sqrt{5}$，$BD=4\sqrt{5}$，点F从点A出发以每秒1个单位长度的速度沿射线AB方向运动．设点F的运动时间为t秒，点F出发后，过点F作AB的垂线，交折线$AD-DC$于点E，以EF为边向右作矩形$EFMN$，使$EF=2FM$．设矩形$EFMN$与$\triangle BCD$重叠部分的面积为S．

（1）当点N落在BD上时，求t的值；

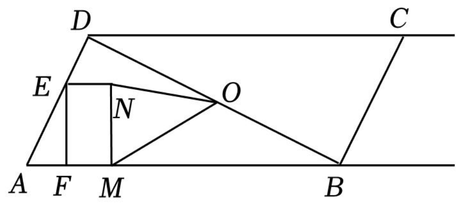
（2）当点F在线段AB上运动时，用含t的代数式表示线段BM的长；

（3）当矩形$EFMN$与$\triangle BCD$重叠部分的图形不是三角形时，求S与t的函数关系式；

（4）如图②，点O为BD的中点，连接ON，OM，设矩形$EFMN$与$\triangle OMN$的面积比为k，当$\frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$时，直接写出$t$的取值范围．



图①



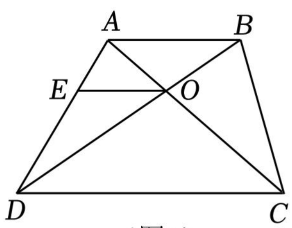
图②

13．（2023•龙川县校级开学）如图 1，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB∥CD$，又 $AB=30$，$CD=50$．

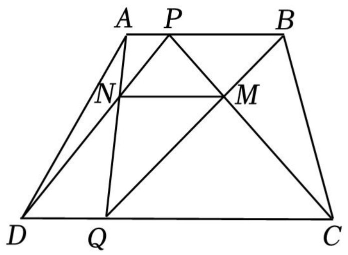
（1）对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OE∥CD$ 交 AD 于点 E，试求 OE 的长．

（2）如图 2，动点 P 由点 A 出发沿 AB 向点 B 移动，速度为 3 单位/分，同时动点 Q 由点 D 出发沿 DC 向点 C 移动，速度为 5 单位/分，又 AQ 与 DP 交于点 N，CP 与 BQ 交于点 M．猜想：对于动点 P 和 Q 在运动过程中的任一时刻（分别不与 A，B 和 C，D 重合），始终有 $MN∥AB$，请加以证明．

（3）设梯形 $ABCD$ 的面积为 S，试问，在（2）题点 P，Q 的运动过程中，四边形 $PNQM$ 的面积是否发生变化？如发生变化，请加以说明；如不发生变化，请求出它的面积（用 S 的代数式表示）．



（图1）



（图2）

14．（2022 秋•东阳市期末）在矩形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AD、BC 上，且 $DE=5$，$CF=2$，将矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，使点 D 恰好与点 B 重合，点 C 落在点 C' 处，如图 1．

（1）求证：$BE=BF$；

（2）点 P 为线段 EF 上一动点，过点 P 作 $PH⊥BE$、$PG⊥BF$，以 PH、PG 为邻边构造平行四边形 $PHQG$，如图 2．

①求平行四边形 $PHQG$ 的周长．

②当点 P 从点 E 运动到点 F 时，求出点 Q 的运动路径长．

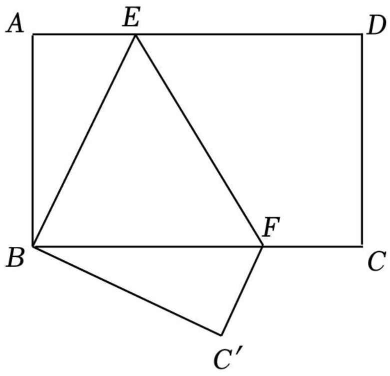


图1

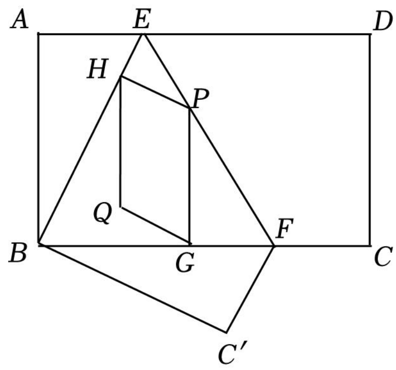


图2

15．（2022秋•船营区校级期末）实践与探究

操作一：如图①是一张矩形纸片，点 E 在边 AB 上，把△BCE 沿直线 CE 翻折，使点 B 落在对角线 AC 上的点 F 处，连结 DF，且点 E、F、D 在同一直线上．

（1）若∠CEB＝70°，则∠EDC＝_______°．

（2）当 AE＝2 时，求 BE 的长．小明对求 BE 的长进行了解答，

下面是部分解答过程：

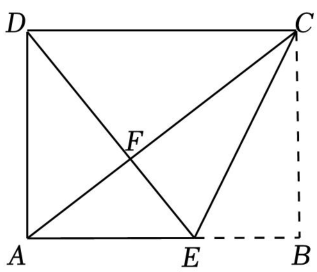
如图①，设 BE 的长为 x，则由折叠知，EF＝EB＝x，∠DEC＝∠BEC．

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴AB∥CD，DC＝AB＝2+x．

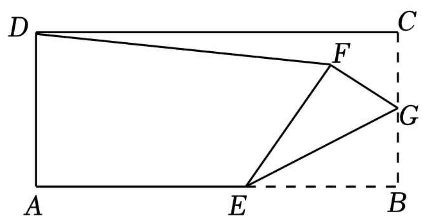
∴∠DCE＝∠BEC，∴∠DCE＝∠DEC，∴DE＝DC＝2+x．∴DF＝2．

请你补全余下的解答过程．

操作二：如图②，矩形纸片中，AB＝3，BC＝2，点 G 是 BC 的中点，点 E 是 AB 边上的一动点，将△BGE 沿 EG 所在直线翻折得到△FEG，连结 DF，则线段 DF 的最小值是 _______．



图①



图②

2023年中考数学复习探究性试题汇编之特殊四边形

参考答案与试题解析

一．解答题（共15小题）

1．（2023•凤翔县模拟）问题提出：

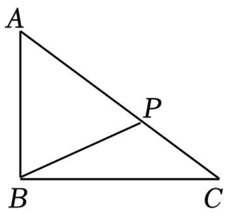
（1）如图①，在Rt△ABC中，∠B＝90°，AB＝5，BC＝12．若P是边AC上一点，则BP的最小值为 $\underline{\frac{60}{13}}$．

问题探究：

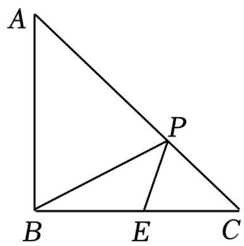
（2）如图②，在Rt△ABC中，AB＝BC，斜边AC的长为$4\sqrt{2}$，E是BC的中点，P是边AC上一点，试求PB+PE的最小值．

问题解决：

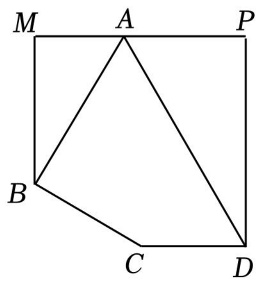
（3）某城区有一个五边形$MBCDP$空地（∠M＝∠P＝∠PDC＝90°，∠C＝150°），城建部门计划利用该空地建造一个居民户外活动广场，其中△MAB的部分规划为观赏区，用于种植各类鲜花，△APD部分规划为音乐区，供老年合唱团排练合唱或广场舞使用，四边形$ABCD$部分为市民健身广场，如图③所示．已知AD＝100米，CD＝50米，∠BAD＝60°，∠ABC＝90°．为了进一步提升服务休闲功能，满足市民游园和健身需求，现要在AB，AD上分别取点E，F，铺设一条由CE，EF，FC连接而成的步行景观道，已知铺设景观道的成本为100元/米，求铺设完这条步行景观道所需的最低成本．



图①



图②



图③

【考点】四边形综合题．

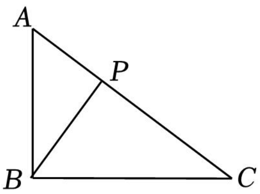
【专题】几何综合题；压轴题；运算能力；推理能力；应用意识．

【分析】（1）当BP⊥AC于点P时，BP的值最小，利用勾股定理可得AC＝13，再运用面积法即可求得答案；

（2）以AB，BC为边作正方形$ABCD$，连接DE，DP．当D，P，E三点共线时，PB+PE最小，最小值为DE的长，利用勾股定理即可求得答案；

（3）如图③，分别延长 AB，DC，交于点 N，连接 AC，可证得△AND 是等边三角形，求得 $AC=CD\cdot\tan\angle ADC=50\tan60^\circ=50\sqrt{3}$（米），分别作点 C 关于 AB，AD 的对称点 C'，C''，在 AN，AD 上任取点 E，F，连接 CC'，CC''，CE，$C'E$，CF，$C''F$，设 O 是 AC 与 $C'C''$的交点，根据 $CE+EF+CF=C'E+EF+C''F\geqslant C'C''$，可得 E，F，C'，C''在一条直线上时，$CE+EF+CF$ 有最小值 $C'C''$，连接 AC'，AC''，证得△$AC'C$ 和△$AC''C$ 为等边三角形，四边形 $AC'CC''$为菱形，再结合解直角三角形即可求得答案.

【解答】解：（1）当 $BP\perp AC$ 于点 P 时，BP 的值最小，如图①，



图①

在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=5$，$BC=12$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BP=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，

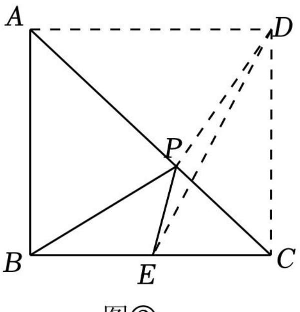
$\therefore BP=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}$;

故答案为：$\frac{60}{13}$.

（2）在 Rt△ABC 中，$\because AB=BC$，$AC=4\sqrt{2}$，E 是 BC 的中点，

$\therefore AB=BC=4$，$BE=CE=2$.

如图②，以 AB，BC 为边作正方形 $ABCD$，连接 DE，DP.



图②

由正方形的轴对称性，得 $PB=PD$，

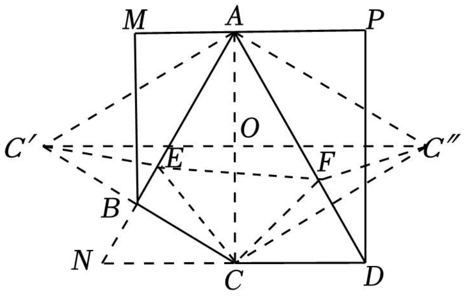
$\because PE+PD\geqslant DE$，

$\therefore$当 D，P，E 三点共线时，$PB+PE$ 最小，最小值为 DE 的长.

由勾股定理，得 $DE=\sqrt{CD^2+CE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∴$PB+PE$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

（3）如图③，分别延长 AB，DC，交于点 N，连接 AC.



图③

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=360°-(150°+90°+60°)=60°$，

∵$\angle BAD=60°$，

∴$\triangle AND$ 是等边三角形，

∴$AN=AD=ND=2CD=100$（米），C 是 ND 的中点，$\angle NAC=\angle DAC=30°$，

∴$AC=CD\cdot\tan\angle ADC=50\tan60°=50\sqrt{3}$（米）.

分别作点 C 关于 AB，AD 的对称点 C'，C''，在 AN，AD 上任取点 E，F，连接 CC'，CC''，CE，$C'E$，CF，$C''F$，设 O 是 AC 与 $C'C''$的交点.

由轴对称的性质，得 $C'E=CE$，$C''F=CF$，

∴$CE+EF+CF=C'E+EF+C''F\geqslant C'C''$，即 E，F，C'，C''在一条直线上时，$CE+EF+CF$ 有最小值 $C'C''$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，∵$\angle BAC=30°$，$AC=50\sqrt{3}$米，

∴$BC=\frac{1}{2}AC=25\sqrt{3}$（米），$CC'=2BC=50\sqrt{3}$（米）.

连接 AC'，AC''.

∵AB 是 CC'的中垂线，$\angle ACB=\angle BCD-\angle ACD=60°$，

∴$\triangle AC'C$ 为等边三角形，

同理$\triangle AC''C$ 为等边三角形，

∴$AC=AC''=CC''=AC'=CC'$，

∴四边形 $AC'CC''$为菱形，

∴O 是 $C'C''$的中点，$\angle C'OC=90°$.

在 $Rt\triangle C'CO$ 中，∵$\angle BCO=\angle BCD-90°=60°$，

∴$\angle CC'C''=30°$，

$\therefore CO=\frac{1}{2}C'C=25\sqrt{3}$（米），

$\therefore C'O=CO \cdot \tan\angle BCO=25\sqrt{3}\tan 60°=75$（米），

$\therefore C'C''=2C'O=150$（米），

$\therefore 150\times 100=15000$（元）．

答：铺设完这条步行景观道所需的最低成本为15000元．

【点评】本题是四边形综合题，考查了直角三角形性质，勾股定理，解直角三角形，等边三角形的判定和性质，正方形性质，菱形的判定和性质，轴对称的性质等，解题的关键是作对称，根据两点之间线段最短解决问题．

2．（2023•锡山区校级模拟）问题提出：已知矩形$ABCD$，点E为AB上的一点，$EF\perp AB$，交BD于点F．将$\triangle EBF$绕点B顺时针旋转α（$0°<\alpha<90°$）得到$\triangle E'BF'$，则AE'与DF'有怎样的数量关系．

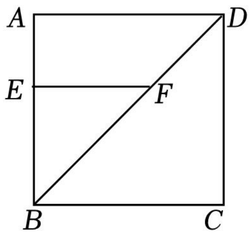


图1

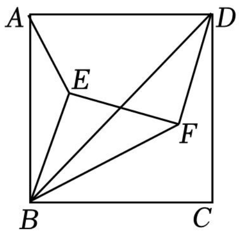


图2

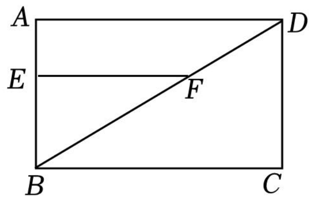


图3

【问题探究】

探究一：如图，已知正方形$ABCD$，点E为AB上的一点，$EF\perp AB$，交BD于点F．

（1）如图1，直接写出$\frac{DF}{AE}$的值 __$\sqrt{2}$__；

（2）将$\triangle EBF$绕点B顺时针旋转到如图2所示的位置，连接AE、DF，猜想DF与AE的数量关系，并证明你的结论；

探究二：如图，已知矩形$ABCD$，点E为AB上的一点，$EF\perp AB$，交BD于点F．

如图3，若四边形$ABCD$为矩形，$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，将$\triangle EBF$绕点$B$顺时针旋转$\alpha$（$0^o<\alpha\leqslant 90^o$）得到$\triangle E'BF'$（$E$、$F$的对应点分别为$E'$、$F'$点），连接$AE'$、$DF'$，则$\frac{AE'}{DF'}$的值是否随着$\alpha$的变化而变化．若变化，请说明变化情况；若不变，请求出$\frac{AE'}{DF'}$的值．

【一般规律】

如图3，若四边形$ABCD$为矩形，$BC=mAB$，其它条件都不变，将$\triangle EBF$绕点B顺时针旋转α（$0°<\alpha<90°$）得到$\triangle E'BF'$，连接AE'，DF'，请直接写出AE'与DF'

的数量关系．

【考点】相似形综合题．

【专题】等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；图形的相似；推理能力．

【分析】问题探究

探究一：（1）直接利用等腰直角三角形的性质计算即可得出结论；

（2）先判断出$\frac{BF}{BE}=\frac{BD}{AB}=\sqrt{2}$，进而得出△$ABE$∽△$DBF$，即可得出结论；

探究二：

先画出图形得到图3，利用勾股定理得到$BD=\sqrt{3}AB$，再证明△BEF∽△BAD得到$\frac{BE}{AB}=\frac{BF}{BD}$，则$\frac{BF}{BE}=\frac{BD}{BA}=\sqrt{3}$，接着利用旋转的性质得∠$ABE'$＝∠$DBF'$，$BE'$＝$BE$，$BF'$＝$BF$，所以$\frac{BF'}{BE'}=\frac{BD}{BA}=\sqrt{3}$，然后根据相似三角形的判定方法得到△$ABE'$∽△$DBF'$，再利用相似的性质可得$\frac{DF'}{AE'}=\frac{BD}{AB}=\sqrt{3}$；

一般规律

作$FM\perp AD$，垂足为M．依据勾股定理可得Rt△ABD中，$BD=\sqrt{AB^{2}+AD^{2}}=\sqrt{1+m^{2}}AB$，再根据△$DMF$∽△$ABD$，可得$\frac{DF}{MF}=\frac{DB}{AB}=\sqrt{1+m^{2}}$，即可得出$DF=\sqrt{1+m^{2}}AE$；

【解答】解：问题探究：

探究一：（1）∵BD是正方形$ABCD$的对角线，

∴∠ABD＝45°，$BD=\sqrt{2}AB$，

∵$EF\perp AB$，

∴∠BEF＝90°，

∴∠BFE＝∠ABD＝45°，

∴BE＝EF，

∴$BF=\sqrt{2}BE$，

∴$DF=BD-BF=\sqrt{2}AB-\sqrt{2}BE=\sqrt{2}(AB-BE)=\sqrt{2}AE$，

∴$\frac{DF}{AE}=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$；

（2）$DF=\sqrt{2}AE$，

理由：由（1）知，$BF=\sqrt{2}BE$，$BD=\sqrt{2}AB$，

$\therefore\frac{BF}{BE}=\frac{BD}{AB}=\sqrt{2}$，

由旋转知，$\angle ABE=\angle DBF$，

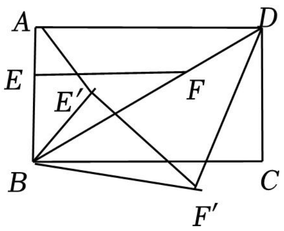
$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DBF$，

$\therefore\frac{DF}{AE}=\frac{BD}{AB}=\sqrt{2}$，

$\therefore DF=\sqrt{2}AE$；

探究二：

$\because$四边形 $ABCD$ 为矩形，



$\therefore AD=BC=\sqrt{2}AB$，

$\therefore BD=\sqrt{3}AB$，

$\because EF\perp AB$，

$\therefore EF\parallel AD$，

$\therefore\triangle BEF\backsim\triangle BAD$，

$\therefore\frac{BE}{AB}=\frac{BF}{BD}$,

$\therefore\frac{BF}{BE}=\frac{BD}{BA}=\sqrt{3}$，

$\because\triangle EBF$ 绕点 B 顺时针旋转α（0°＜α＜90°）得到$\triangle E'BF'$，

$\therefore\angle ABE'=\angle DBF'$，$BE'=BE$，$BF'=BF$，

$\therefore\frac{BF'}{BE'}=\frac{BD}{BA}=\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle ABE'\backsim\triangle DBF'$，

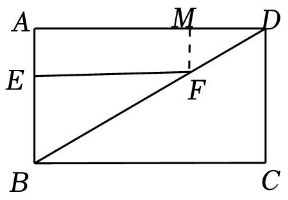
$\therefore\frac{DF'}{AE'}=\frac{BD}{AB}=\sqrt{3}$.

即 $DF'=\sqrt{3}AE'$；

一般规律：

AE 与 DF 的数量关系是：$DF=\sqrt{1+m^2}AE$；

理由：如图，作 $FM\perp AD$，垂足为 M.



$\because \angle A=\angle AEF=\angle AMF=90^{\circ}$，

$\therefore$四边形 $AEFM$ 是矩形，

$\therefore FM=AE$，

$\because AD=BC=mAB$，

$\therefore$Rt$\triangle ABD$ 中，$BD=\sqrt{1+m^{2}}AB$，

$\because MF\parallel AB$，

$\therefore \triangle DMF\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{DF}{MF}=\frac{DB}{AB}=\sqrt{1+m^{2}}$，

$\therefore DF=\sqrt{1+m^{2}}MF=\sqrt{1+m^{2}}AE$.

【点评】本题是相似形综合题，主要考查了相似三角形的判定和性质，旋转的性质，等腰直角三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，判断出$\triangle BCE$ 是等边三角形是解本题的关键.

3.（2023•昔阳县模拟）综合与实践：

问题情境：如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是对角线 AC 上一点，连接 BE，过点 E 分别作 AC，BE 的垂线，分别交直线 BC，CD 于点 F，G．试猜想线段 BF 和 CG 的数量关系并加以证明.

数学思考：（1）请解答上述问题；

问题解决：（2）如图 2，在图 1 的条件下，将“正方形 $ABCD$”改为“矩形 $ABCD$”，其他条件不变．若 $AB=2$，$BC=3$，求$\frac{BF}{CG}$的值；

问题拓展：（3）在（2）的条件下，当点 E 为 AC 的中点时，请直接写出$\triangle CEG$ 的面积.

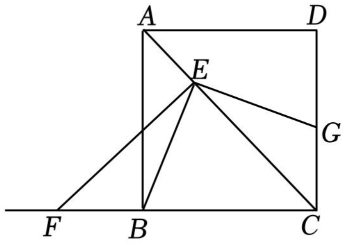


图1

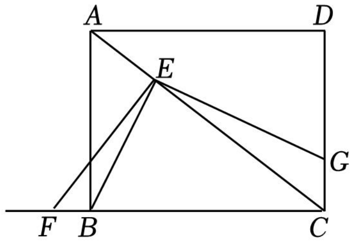
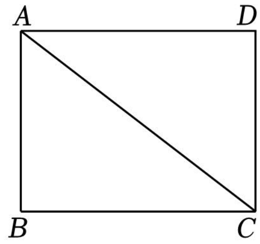


图2



备用图

【考点】相似形综合题．

【专题】图形的全等；矩形 菱形 正方形；图形的相似；解直角三角形及其应用；推理能力．

【分析】（1）由正方形的性质得出$\angle ABC=\angle D=90°$，$AB=BC=CD=AD$，证出$\angle FEB=\angle CEG$，由“ASA”可证$\triangle BEF\cong\triangle GEC$，由全等三角形的性质得出$BF=CG$；

（2）证明$\triangle BFE\backsim\triangle GCE$，由相似三角形的性质得出$\frac{BF}{CG}=\frac{EF}{EC}$，求出$\tan\angle ECF=\frac{2}{3}$，则可得出答案；

（3）过点E作$EM\perp CD$于M，$EN\perp BC$于点N，证出$DM=CM=1$，$BN=CN=\frac{3}{2}$，由（2）知$\triangle BFE\backsim\triangle GCE$，由相似三角形的性质证出$\angle EBF=\angle G$，由锐角三角函数的定义得出$\tan\angle EBN=\frac{EN}{BN}=\frac{2}{3}=\tan G=\frac{EM}{GM}$，求出$CG$的长，根据三角形面积公式可得出答案．

【解答】（1）证明：$BF=CG$，理由如下：

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle ABC=\angle D=90°$，$AB=BC=CD=AD$，

∴$\angle BAC=\angle ACB=45°$，$\angle ACD=\angle DAC=45°$，

∵$EF\perp AC$，

∴$\angle FEC=90°$，

∴$\angle EFC=90°-\angle ACF=90°-45°=45°$，

∴$\angle EFC=\angle ECF=\angle ECG$，

∴$EF=EC$，

∵$BE\perp EG$，

∴$\angle BEG=90°$，

∴$\angle BEG=\angle FEG$，

∴$\angle BEC+\angle CEG=\angle BEG+\angle FEB$，

∴$\angle FEB=\angle CEG$，

∴$\triangle BEF\cong\triangle GEC$（$ASA$），

∴$BF=CG$；

（2）∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$\angle BCD=90^{\circ}$，

∴$\angle BCE+\angle ACD=90^{\circ}$，

∵$EF\perp AC$，

∴$\angle FEC=90^{\circ}$，

∴$\angle BCE+\angle EFB=90^{\circ}$，$\angle FEB+\angle BEC=90^{\circ}$，

∴$\angle EFB=\angle ECG$，

又∵$BE\perp EG$，

∴$\angle CEG+\angle BEC=90^{\circ}$，

∴$\angle FEB=\angle CEG$，

∴$\triangle BFE\backsim\triangle GCE$，

∴$\frac{BF}{CG}=\frac{EF}{EC}$,

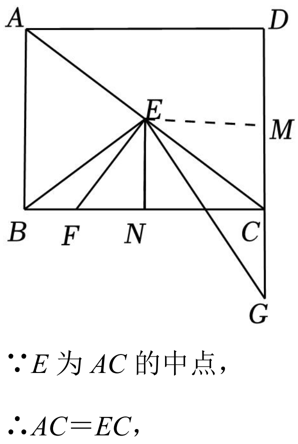
在Rt$\triangle ABC$中，$\tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$,

∴$\tan\angle ECF=\frac{2}{3}$,

∴$\frac{EF}{EC}=\frac{2}{3}$,

∴$\frac{BF}{CG}=\frac{2}{3}$;

（3）过点E作$EM\perp CD$于M，$EN\perp BC$于点N，



∵E为AC的中点，

∴$AC=EC$，

∵$EM\perp DC$，$AD\perp DC$，

∴$EM /\!/ AD$，

∴$\frac{CM}{DM}=\frac{EC}{AE}$,

∴$DM=CM=1$，

同理可得 $BN=CN=\frac{2}{3}$,

由（2）知△BFE∽△GCE，

∴$\angle EBF=\angle G$，

∴$\tan\angle EBN=\frac{EN}{BN}=\frac{2}{3}=\tan G=\frac{EM}{GM}$,

∴$\frac{\frac{3}{2}}{CG+1}=\frac{2}{3}$,

∴$CG=\frac{5}{4}$,

∴$S_{\triangle CEG}=\frac{1}{2}CG\bullet EM=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$.

【点评】本题是相似形综合题，考查了正方形的性质，矩形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的定义，勾股定理，等腰直角三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定与性质及相似三角形的判定与性质．

4．（2023•金水区校级一模）如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=8$，将纸片折叠，使顶点 B 落在边 AD 上的 E 点处，折痕的一端 G 点在边 BC 上．

（1）如图 1，当折痕的另一端 F 在边 AB 上，且$AF=\frac{8}{3}$时，则$\angle BGE=$__60°__；

（2）如图 2，当折痕的另一端 F 在边 AD 上，点 E 与 D 点重合时，判断△FHD 和△DCG 是否全等？请说明理由．

（3）若 $BG=10$，当折痕的另一端 F 在边 AD 上，点 E 未落在边 AD 上，且点 E 到 AD 的距离为 2 时，直接写出 AF 的长．

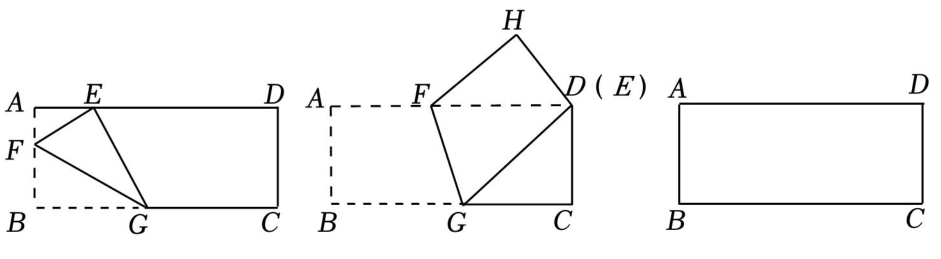


图1　　图2　　图3

【考点】四边形综合题．

【专题】综合题；几何直观．

【分析】（1）根据折叠的性质可得 $EF=BF$，$\angle FEG=\angle B=90°$，从而得到$EF=BF=AB-AF=\frac{16}{3}$，在 Rt△AEF 中，$sin\angle AEF=\frac{AF}{EF}=\frac{1}{2}$，可得$\angle AEF=30°$，即可求解；

（2）根据矩形的性质和折叠的性质可得$\angle H=\angle C=90°$，$\angle HDF=\angle GDC$，即可；

（3）点 E 在 AD 的下方时，设 EH 与 AD 相交于点 K，过点 E 作 MN∥CD 分别交 AD、BC 于 M、N，然后求出 EM、EN，在 Rt△ENG 中，利用勾股定理列式求出 GN，再根据△GEN 和△EKM 相似，利用相似三角形对应边成比例列式求出 EK、KM，再求出 KH，然后根据△FKH 和△EKM 相似，利用相似三角形对应边成比例列式求解即可；当 EG∥CD 时，此时点 E 在 AD 的上方时，则 $MG=CD=AB=8$，$EM\perp AD$，此时 E 到 AD 的距离为 2，符合题意，证明四边形 $EHFM$ 为矩形，即可求解．

【解答】解：（1）由折叠的性质得：$EF=BF$，$\angle FEG=\angle B=90°$，

∵$AF=\frac{8}{3}$，$AB=8$，

∴$EF=BF=AB-AF=\frac{16}{3}$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle A=\angle B=90°$，$AD\perp BC$，

∴$\angle AEG+\angle BGE=180°$，

在 Rt△AEF 中，$sin\angle AEF=\frac{AF}{EF}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle AEF=30°$，

∴$\angle AEG=120°$，

∴$\angle BGE=60°$；

故答案为：$60°$．

（2）全等．

证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle A=\angle B=\angle C=\angle ADC=90°$，$AB=CD$，

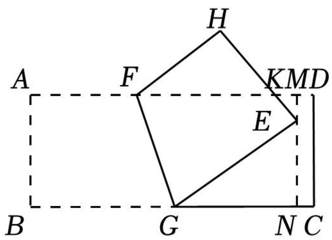
由题意知：$\angle A=\angle H=\angle B=\angle HDG=90°$，$CD=AB=HD$，

∴$\angle H=\angle C=90°$，$\angle FDH=\angle GDC$，

在△*FHD* 和△*GCD* 中，$\begin{cases}\angle H=\angle C\\HD=CD\\\angle FDH=\angle GDC\end{cases}$，

∴△*FHD*≌△*GCD*（*ASA*）.

（3）如图，点 *E* 在 *AD* 的下方时，设 *EH* 与 *AD* 相交于点 *K*，过点 *E* 作 *MN*∥*CD* 分别交 *AD*、*BC* 于 *M*、*N*，



∵*E* 到 *AD* 的距离为 2*cm*，

∴*EM*＝2，*EN*＝8﹣2＝6，

在 Rt△*ENG* 中，$GN=\sqrt{EG^2-EN^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∵∠*GEN*+∠*KEM*＝180°﹣∠*GEH*＝180°﹣90°＝90°，∠*GEN*+∠*NGE*＝180°﹣90°＝90°，

∴∠*KEM*＝∠*NGE*，

又∵∠*ENG*＝∠*KME*＝90°，

∴△*GEN*∽△*EKM*，

∴$\frac{EK}{EG}=\frac{KM}{EN}=\frac{EM}{GN}$,

即$\frac{EK}{10}=\frac{KM}{6}=\frac{2}{8}$,

解得$EK=\frac{5}{2}$，$KM=\frac{3}{2}$,

∴$KH=EH-EK=8-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$,

∵∠*FKH*＝∠*EKM*，∠*H*＝∠*EMK*＝90°，

∴△*FKH*∽△*EKM*，

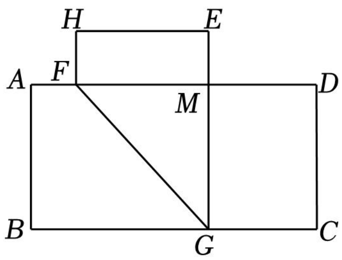
∴$\frac{FH}{EM}=\frac{KH}{KM}$,

即$\frac{FH}{2}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{3}{2}}$,

解得$FH=\frac{22}{3}$,

$\therefore AF = FH = \dfrac{22}{3}$.

如图，当 $EG\parallel CD$ 时，此时点 E 在 AD 的上方时，则 $MG=CD=AB=8$，$EM\perp AD$，



$\because EG=BG=10$，

$\therefore EM=2$，

此时 E 到 AD 的距离为 2，符合题意，

根据题意得：$\angle H=\angle E=\angle EMF=90°$，

$\therefore$四边形 $EHFM$ 为矩形，

$\therefore FH=EM=2$，

$\therefore AF=HF=2$；

综上所述，$AF = \dfrac{22}{3}$或 2.

【点评】本题考查了翻折变换的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，熟记翻折前后两个图形能够重合得到相等的线段和角是解题的关键，本题难点在于（3）作辅助线构造出相似三角形.

5.（2023 春•汉阳区校级月考）如图 1，点 P 是 y 轴正半轴上一动点，点 C 是 x 轴正半轴上的动点，过点 P 作 $PD\perp CP$ 且 $CP=PD$.

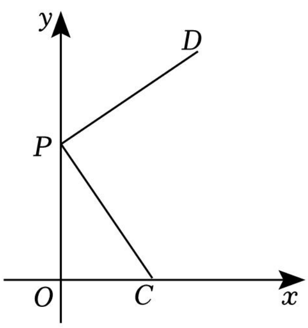


图1

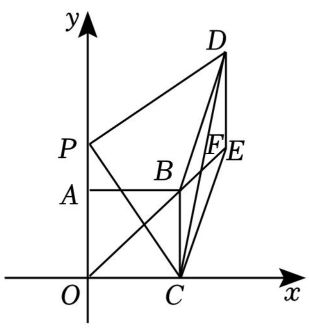


图2

（1）若点 C 的坐标为（6，0），点 P 的坐标为（0，8），求点 D 的坐标.

（2）如图 2，在（1）的条件下，点 A 的坐标为（0，6），点 B 的坐标为（6，6），连接 AB 和 CB 过点 D 作 $DE\parallel OA$ 交射线 OB 于点 E，连接 DC 交射线 OB 于点 F，试求点 F

的坐标．

（3）如图2，连接 CE 和 BD，当 OC：OP＝__$\frac{3}{7}$或$\frac{14}{35}$__时，四边形 $DECB$ 与四边形 $PDEC$ 的面积比为$\frac{12}{35}$．

【考点】四边形综合题．

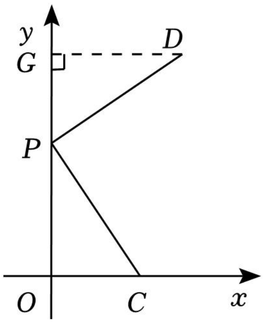
【专题】综合题；运算能力．

【分析】（1）过点 D 作 $DG\perp y$ 轴，利用全等三角形的判定得出△CPO≌△PDG（AAS），再由其性质得出 DG＝PO＝8，GP＝CO＝6，即可求解；

（2）根据点 B 的坐标得出直线 OB 所在的直线解析式为 y＝x，然后即可确定 E（8，8），DE＝6＝BC，再由平行四边形的判定得出四边形 $DECB$ 为平行四边形，利用其性质即可求解；

（3）过点 D 作 $DG\perp y$ 轴，延长 DE 交 x 轴于点 H，设 OC＝x，OP＝y，由（1）得 DG＝y，OG＝x+y，由（2）得 OA＝AB＝BC＝DE＝x，分别表示出两个四边形的面积，然后解方程即可．

【解答】解：（1）过点 D 作 $DG\perp y$ 轴，如图所示：



∴∠DG）＝∠POC＝90°，∠DPG+∠PDG＝90°，

∵点 C 的坐标为（6，0），点 P 的坐标为（0，8），

∴OC＝6，OP＝8，

∵$PD\perp CP$，

∴∠DPG+∠OPC＝90°，

∴∠OPC＝∠PDG，

∵CP＝PD，

∴△CPO≌△PDG（AAS），

∴DG＝PO＝8，GP＝CO＝6，

∴$OG=PO+GP=14$，

∴点 D 的坐标为（8，14）.

（2）∵点 B 的坐标为（6，6），

∴直线 OB 所在的直线解析式为 $y=x$，

由（1）得点 D 的坐标为（8，14），

∴E（8，8），

∴$DE=14-8=6=BC$，

∵点 A 的坐标为（0，6），点 B 的坐标为（6，6），点 C 的坐标为（6，0），

∴$BC\parallel AO$，

∵$DE\parallel OA$，

∴$DE\parallel BC$，

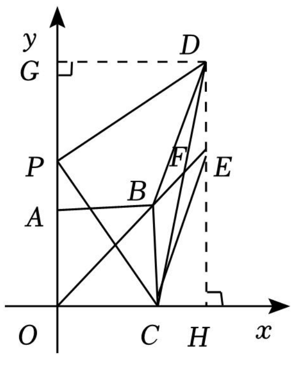
∴四边形 $DECB$ 为平行四边形，

∴点 F 为线段 CD 的中点，

∵D 的坐标为（8，14），点 C 的坐标为（6，0），

∴$F(\frac{8+6}{2}，\frac{14+0}{2})$即 F（7，7）.

（3）过点 D 作 $DG\perp y$ 轴，延长 DE 交 x 轴于点 H，



设 $OC=x$，$OP=y$，

由（1）得 $DG=y$，$OG=x+y$，

由（2）得 $OA=AB=BC=DE=x$，

∵$DE\parallel OA$，$DG\perp y$，

∴$\angle DGP=\angle GOC=\angle DHO=90°$，

∴四边形 $DGOH$ 为矩形，

∴$DH=GO=x+y$，

∴$EH=DH-DE=y$，$CH=y-x$，

∴四边形 $DECB$ 的面积为：$x(y-x)$；

四边形 $PDEC$ 的面积为 $S_{矩形DGOH}-2S_{\triangle POC}-2S_{\triangle EHC}=y(x+y)-2\times\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y(y-x)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy$；

∵四边形 $DECB$ 与四边形 $PDEC$ 的面积比为$\frac{12}{35}$，

∴$\frac{x(y-x)}{\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy}=\frac{12}{35}$，

整理得：$35\cdot\frac{x}{y}+6\cdot\frac{y}{x}=29$，

令$\frac{x}{y}=k$，

∴方程整理为 $35k^2-29k+6=0$，

解得：$k=\frac{3}{7}$或$k=\frac{14}{35}$，

即$\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$或$\frac{14}{35}$，

∴OC：$OP=\frac{3}{7}$或$\frac{14}{35}$，

故答案为：$\frac{3}{7}$或$\frac{14}{35}$.

【点评】本题主要考查坐标与图形，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定，理解题意，作出相应辅助线是解题关键.

6．（2023 春•广水市月考）阅读下面材料.

小炎遇到这个一个问题：如图 1，点 E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，$\angle EAF=45°$，连接 EF，则 $EF=BE+DF$，试说明理由.

小炎是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法将这些分散的线段相对集中，她先尝试了翻折、旋转、平移的方法，最后发现线段 AB、AD 是共点并且相等的，于是找到解决问题的方法．她的方法是将$\triangle ABE$ 绕着点 A 逆时针旋转 90°得到$\triangle ADG$，再利用全等的知识解决这个问题（如图 2）.

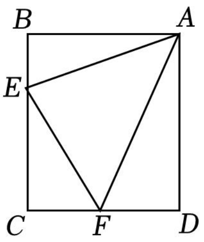


图1

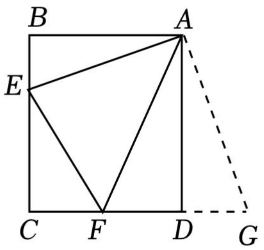


图2

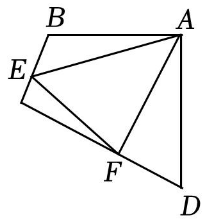


图3

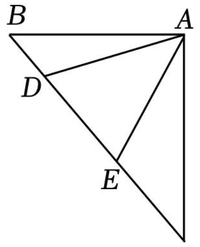


图4

参考小炎同学思考问题的方法，解决下列问题：

（1）写出小炎的推理过程；

（2）如图3，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=90°$，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，$\angle EAF=45°$，若 $\angle B$、$\angle D$ 都不是直角，则当 $\angle B$ 与 $\angle D$ 满足于 $\underline{\quad\angle B+\angle D=180°\quad}$ 关系时，仍有 $EF=BE+DF$；

（3）如图4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D、E 均在边 BC 上，且 $\angle DAE=45°$，若 $BD=1$，$EC=2$，求 DE 的长．

【考点】四边形综合题．

【专题】综合题；几何直观．

【分析】（1）如图所示，将 $\triangle ABE$ 绕着点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ADG$，先证明 C、D、G 三点共线，然后推出 $\angle GAF=45°=\angle EAF$，即可利用 SAS 证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$，得到 $EF=GF$，由此即可证明；

（2）当 $\angle B+\angle ADC=180°$，结论成立，如图所示，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ADG$，则 $BE=DG$，$AE=AG$，$\angle BAE=\angle DAG$，$\angle B=\angle ADG$，先证明 C、D、G 三点共线，再证明 $\angle GAF=45°=\angle EAF$，即可利用 SAS 证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$ 得到 $EF=GF$，由此即可证明 $EF=BE+DF$；

（3）如图所示，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ACG$，则 $\angle B=\angle ACG$，$BD=CG=1$，$AD=AG$，证明 $\angle GAE=45°=\angle DAE$，即可利用 SAS 证明 $\triangle ADE\cong\triangle AGE$，得到 $GE=DE$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CEG$ 中，由勾股定理得 $GE=\sqrt{5}$，则 $DE=GE=\sqrt{5}$.

【解答】解：（1）如图所示，将 $\triangle ABE$ 绕着点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ADG$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=AD$，$\angle B=\angle ADC=\angle BAD=90°$，

由旋转的性质可得 $AE=AG$，$BE=DG$，$\angle BAE=\angle DAG$，$\angle ADG=\angle B=90°$，

∴$\angle ADC+\angle ADG=180°$，即 C、D、G 三点共线，

∵$\angle BAE+\angle DAE=90°$，

∴$\angle DAG+\angle DAE=90°$，即$\angle EAG=90°$，

∵$\angle EAF=45°$，

∴$\angle GAF=45°=\angle EAF$，

又∵$AF=AF$，

∴$\triangle AEF\cong\triangle AGF$（$SAS$），

∴$EF=GF$，

又∵$GF=DF+DG$，$DG=BE$，

∴$EF=BE+DF$.

（2）当$\angle B+\angle ADC=180°$时，仍有$EF=BE+DF$，理由如下：

如图所示，将$\triangle ABE$绕点A逆时针旋转$90°$得到$\triangle ADG$，

∴$BE=DG$，$AE=AG$，$\angle BAE=\angle DAG$，$\angle B=\angle ADG$

∵$\angle B+\angle ADC=180°$，$\angle B=\angle ADG$，

∴$\angle ADC+\angle ADG=180°$，即$C$、$D$、$G$三点共线，

∵$\angle BAD=90°$

∴$\angle BAE+\angle DAE=90°$，

∴$\angle DAG+\angle DAE=90°$，即$\angle EAG=90°$，

∵$\angle EAF=45°$，

∴$\angle GAF=45°=\angle EAF$，

又∵$AF=AF$，

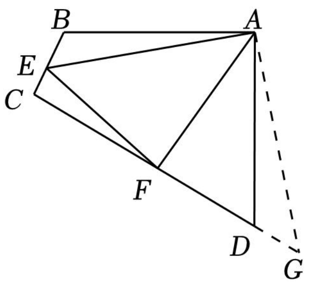
∴$\triangle AEF\cong\triangle AGF$（$SAS$），

∴$EF=GF$，

又∵$GF=DF+DG$，$DG=BE$，

∴$EF=BE+DF$，

故答案为：$\angle B+\angle D=180°$；



（3）如图所示，将$\triangle ABD$绕点A逆时针旋转$90°$得到$\triangle ACG$，

∴$\angle B=\angle ACG$，$BD=CG=1$，$AD=AG$，

∵$\angle BAC=90°$，

∴$\angle B+\angle ACB=90°$，$\angle BAD+\angle CAD=90°$，

∴$\angle CAG+\angle CAD=90°$，$\angle ACG+\angle ACB=90°$，即$\angle ECG=90°$，$\angle DAG=90°$，

∵$\angle DAE=45°$，

∴$\angle GAE=45°=\angle DAE$，

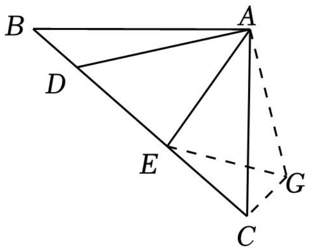
又∵$AE=AE$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle AGE$（$SAS$），

∴$GE=DE$，

在 Rt$\triangle CEG$ 中，由勾股定理得$GE=\sqrt{CE^2+CG^2}=\sqrt{5}$，

∴$DE=GE=\sqrt{5}$.



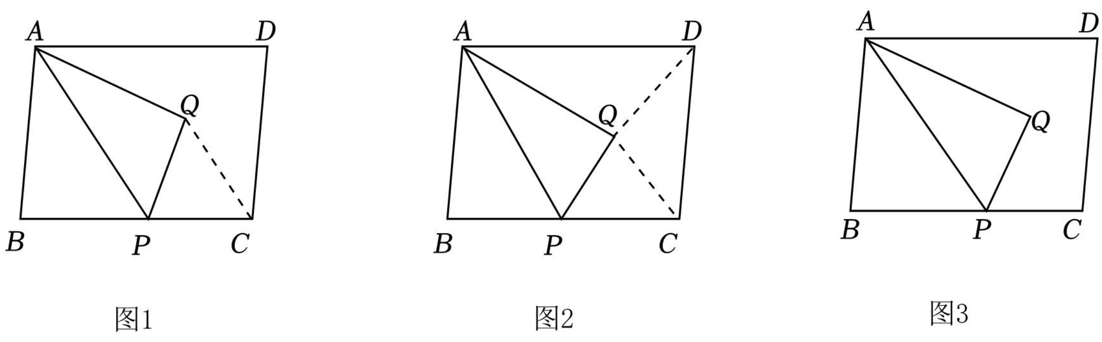
【点评】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，旋转的性质，勾股定理等等，正确作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

7.（2023•庐阳区校级一模）如图 1，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=7$，$BC=10$，点 P 是 BC 边上的点，连结 AP，以 AP 为对称轴作$\triangle ABP$ 的轴对称图形$\triangle AQP$.

（1）如图 1，连接 CQ，若 $CQ\parallel AP$，求 BP 的长；

（2）如图 2，当点 P，Q，D 三点共线时，恰有$\angle DCQ=\angle DPC$，求 BP 的长；

（3）如图 3，若点 P 在边 BC 运动的过程中，点 Q 到 CD 的最短距离为 1，求 BP 的长.



【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】（1）由轴对称的性质可得：$BP=QP$，$\angle APB=\angle APQ$，再由平行线性质可得$\angle APQ=\angle PQC$，$\angle APB=\angle PCQ$，推出$\angle PQC=\angle PCQ$，再利用等角对等边即可求得答案；

（2）由平行四边形性质可得：$CD=AB=7$，$AD=BC=10$，$AD\parallel BC$，再利用轴对称性质可推出$PD=AD=10$，设$BP=x$，则$PQ=x$，$DQ=PD-PQ=10-x$，再由相似三角形性质即可求得答案；

（3）如图3，以点A为圆心，AB为半径作$\odot A$，延长AQ交CD于H，交BC的延长线于E，过点P作$PF\parallel AQ$交AB于F，设$BP=a$，根据题意可得：当$AQ\perp CD$时，$QH=1$，$\angle AHD=90°$，$AH=8$，利用勾股定理可得$DH=6$，再分别证得：$\triangle BAE\backsim\triangle DHA$，$\triangle BPE\backsim\triangle DAH$，可得出：$BF=\frac{3}{5}a$，$FP=\frac{4}{5}a$，$AF=AB-BF=7-\frac{3}{5}a$，再运用等腰三角形性质可推出$FP=AF$，建立方程求解即可得出答案．

【解答】解：（1）如图1，

∵$\triangle AQP$与$\triangle ABP$关于AP对称，$BC=10$，

∴$BP=QP$，$\angle APB=\angle APQ$，

∵$CQ\parallel AP$，

∴$\angle APQ=\angle PQC$，$\angle APB=\angle PCQ$，

∴$\angle PQC=\angle PCQ$，

∴$QP=CP$，

∴$BP=CP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times10=5$；

（2）如图2，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，$AB=7$，$BC=10$，

∴$CD=AB=7$，$AD=BC=10$，$AD\parallel BC$，

∴$\angle APB=\angle DAP$，

∵$\triangle AQP$与$\triangle ABP$关于AP对称，

∴$\triangle AQP\cong\triangle ABP$，

∴$\angle APB=\angle APQ$，$PQ=BP$，

∴$\angle DAP=\angle APQ$，

∴$PD=AD=10$，

设$BP=x$，则$PQ=x$，

∴$DQ=PD-PQ=10-x$，

∵$\angle CDQ=\angle PDC$，$\angle DCQ=\angle DPC$，

∴$\triangle DCQ\backsim\triangle DPC$，

∴$\frac{DQ}{CD}=\frac{CD}{DP}$，即$DQ\bullet DP=CD^2$，

∴$10(10-x)=7^2$，

解得：$x=\frac{51}{10}$，

∴$BP=\frac{51}{10}$；

（3）如图3，以点A为圆心，AB为半径作⊙A，延长AQ交CD于H，交BC的延长线于E，过点P作$PF\parallel AQ$交AB于F，

设$BP=a$，

∵$AQ=AB=7$，

∴点Q始终在⊙A上运动，

∵点Q到CD的最短距离为1，

∴当$AQ\perp CD$时，$QH=1$，

∴$\angle AHD=90°$，$AH=AQ+QH=7+1=8$，

在Rt$\triangle ADH$中，$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$\angle B=\angle D$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAE=\angle AHD=90°$，

∴$\triangle BAE\backsim\triangle DHA$，

∴$\frac{BE}{AD}=\frac{AE}{AH}=\frac{AB}{DH}$，即$\frac{BE}{10}=\frac{AE}{8}=\frac{7}{6}$，

∴$BE=\frac{35}{3}$，$AE=\frac{28}{3}$，

∵$PF\parallel AQ$，

∴$\angle BFP=\angle BAE=90°$，

∵$\angle B=\angle D$，

∴$\triangle BPE\backsim\triangle DAH$，

∴$\dfrac{BF}{DH}=\dfrac{FP}{AH}=\dfrac{BP}{AD}$，即$\dfrac{BF}{6}=\dfrac{FP}{8}=\dfrac{a}{10}$，

∴$BF=\dfrac{3}{5}a$，$FP=\dfrac{4}{5}a$，

∴$AF=AB-BF=7-\dfrac{3}{5}a$，

∵$PF\parallel AQ$，

∴$\angle APF=\angle PAQ$，

∵$\triangle AQP\cong\triangle ABP$，

∴$\angle PAB=\angle PAQ$，

∴$\angle APF=\angle PAB$，

∴$FP=AF$，

∴$\dfrac{4}{5}a=7-\dfrac{3}{5}a$，

解得：$a=5$，

∴$BP=5$．

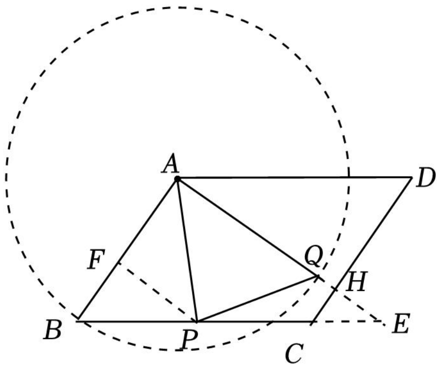


图3

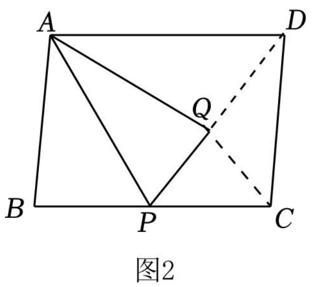


图2

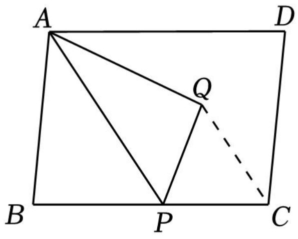


图1

【点评】本题是平行四边形综合题，考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定和性质，轴对称性质，勾股定理，解直角三角形，圆的性质等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形．

8．（2022秋•云州区期末）综合与实践

问题情境：在矩形 $ABCD$ 中，E 为射线 BC 上一动点，连接 AE．

（1）如图1，当点 E 在 BC 边上时，将△ABE 沿 AE 翻折，使点 B 恰好落在对角线 BD 上点 F 处，AE 交 BD 于点 G．

基础探究：

①若 $\tan\angle DBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，试猜想△$ABF$ 的形状，并说明理由．

②当 $BC=6\sqrt{6}$，且 $EF=EC$ 时，求 AB 的长．

拓展探究：

（2）在②所得的矩形 $ABCD$ 中（仅保留 AB，BC 长），将矩形 $ABCD$ 沿 AE 进行翻折，点 C 的对应点为 C'，当 E，C'，D 三点共线时，请直接写出 BE 的长．

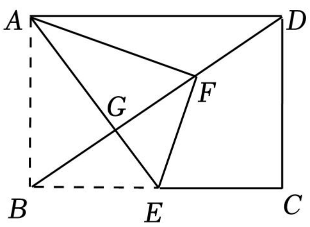
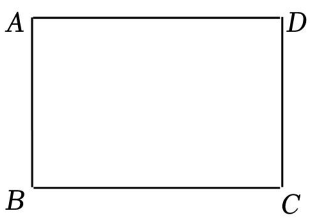
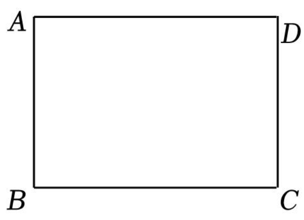


图1



备用图



备用图

【考点】四边形综合题．

【专题】矩形 菱形 正方形；推理能力；应用意识．

【分析】（1）①根据 $\tan\angle DBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得出 $\angle DBC=30°$，则 $\angle ABD=60°$，然后根据折叠的性质得出 $AB=AF$，即可得出结论；

②根据 $BC=6\sqrt{6}$，且 $EF=EC$ 得出，$BE=3\sqrt{6}$，根据互余关系得出 $\angle DBC=\angle BAE$，再

利用三角函数得出边的比例关系求值即可；

（2）分点 E 在 BC 边上和 E 点在 BC 延长线上两种情况讨论求值即可．

【解答】解：（1）①∵$\tan\angle DBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴$\angle DBC=30°$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle ABD=60°$，

由折叠知，$AB=AF$，

∴$\triangle ABF$ 是等边三角形；

②∵$BC=6\sqrt{6}$，且 $EF=EC$，

∴$BE=3\sqrt{6}$，

∵$\angle DBC+\angle BEA=90°$，$\angle BAE+\angle BEA=90°$，

∴$\angle DBC=\angle BAE$，

∴$\tan\angle DBC=\tan\angle BAE$，

即$\frac{CD}{BC}=\frac{BE}{AB}$,

∵$AB=CD$，

∴$AB=\sqrt{BC\cdot BE}=\sqrt{3\sqrt{6}\cdot 6\sqrt{6}}=6\sqrt{3}$；

（2）当 E，C'，D 三点共线时，分以下两种情况：

①如图 2，当点 E 在 BC 延长线上时，

∵$AB=6\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$CD=AB=6\sqrt{3}$，$AB\parallel BC$，

∴$\angle ADB'=\angle BED$，

由折叠知，$AB=AB'$，

在$\triangle ADB'$和$\triangle DEC$ 中，

$\begin{cases}\angle B'=\angle DCE=90° \\ \angle ADB'=\angle DEC \\ AB'=DC\end{cases}$，

∴$\triangle ADB'\cong\triangle DEC$（$AAS$），

∴$DE=AD=6\sqrt{6}$，

∴$CE=\sqrt{ED^2-CD^2}=\sqrt{(6\sqrt{6})^2-(6\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}$，

即 $BE=BC+CE=6\sqrt{6}+6\sqrt{3}$；

②如图 3，当点 E 在 BC 边上时，

∵$AD\parallel BC$，矩形 $ABCD$ 沿 AE 折叠，

∴$\angle DAE=\angle AEB=\angle AED$，

∴$AD=DE$，

∴$CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=6\sqrt{3}$，

∴$BE=BC-CE=6\sqrt{6}-6\sqrt{3}$，

综上所述，BE 的长为 $6\sqrt{6}+6\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{6}-6\sqrt{3}$．

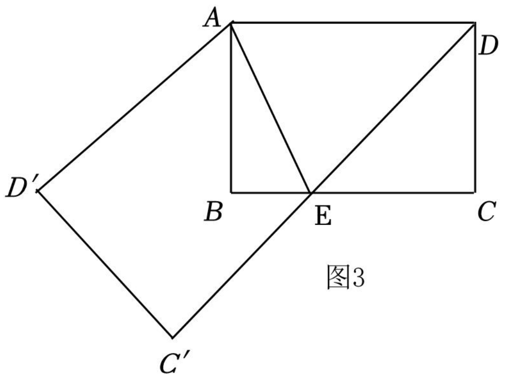


图3

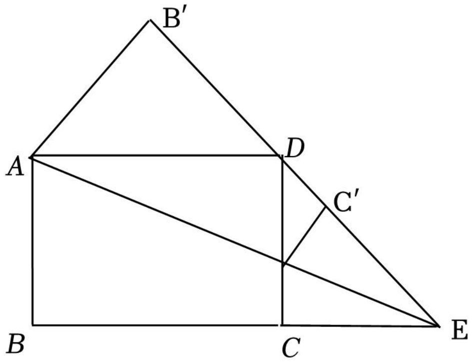


图2

【点评】本题主要考查矩形的性质，勾股定理，三角函数等知识，熟练掌握矩形的性质，勾股定理，三角函数等知识是解题的关键．

9．（2022 秋•南关区期末）如图，在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$AB=5$，动点 P 从点 A 出发沿折线 AC—CB 以每秒 5 个单位长度的速度向终点 B 运动．当点 P 不与△ABC 的顶点重合时，过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，以 PD 为边在 PD 的下方作正方形 $PDEF$．设点 P 运动的时间为 t 秒．

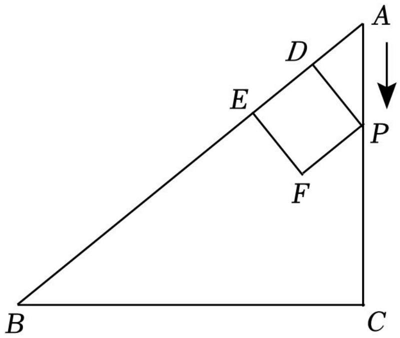
（1）用含 t 的代数式表示线段 PF 的长．

（2）当点 F 落在边 BC 上时，求 t 的值．

（3）作点 C 关于直线 PF 的对称点 C_1，

①当点 C_1 在$\triangle ABC$ 的内部时，求 t 的取值范围．

②连结 EC_1，当直线 EC_1 与$\triangle ABC$ 的边平行时，直接写出 t 的值．



【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；压轴题；运算能力；推理能力；应用意识．

【分析】（1）分两种情况：①当点 P 在边 AC 上，即 $0<t<\frac{3}{5}$时，②当点 P 在边 BC 上，即$\frac{3}{5}<t<\frac{7}{5}$时，运用相似三角形的判定和性质分别得 PF 的长即可；

（2）由题意得：$AP=5t$，$PC=3-5t$，由（1）知：$DP=PF=4t$，$\triangle APD\backsim\triangle ABC$，利用相似三角形性质可得 $AD=3t$，再由$\triangle APD\backsim\triangle PFC$，即可求得答案；

（3）①如图，取 AC、BC 的中点 M、N，分别求得点 P 与点 M、N 重合时对应的 t 值，即可求得答案；

②分三种情况：当 $0<t<\frac{3}{5}$且 $EC_1\parallel AC$ 时；当 $0<t<\frac{3}{5}$且 $EC_1\parallel BC$ 时；当$\frac{3}{5}<t<\frac{7}{5}$且 $EC_1\parallel BC$ 时；分别求得 t 的值即可．

【解答】解：（1）由题意得 $AP=5t$，

①当点 P 在边 AC 上，即 $0<t<\frac{3}{5}$时，如图，

在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\because PD\perp AB$，

$\therefore \angle ADP=90°$，

$\therefore \angle ADP=\angle C$，

∵ $\angle PAD=\angle BAC$，

∴ $\triangle APD\backsim\triangle ABC$，

∴ $\frac{PD}{AP}=\frac{BC}{AB}$，即 $\frac{PD}{5t}=\frac{4}{5}$，

∴ $PD=4t$，

∵四边形 $PDEF$ 是正方形，

∴ $PF=PD=4t$；

②当点 P 在边 BC 上，即 $\frac{3}{5}<t<\frac{7}{5}$ 时，如图，

∵ $AC+CP=5t$，$AC+BC=3+4=7$，

∴ $BP=7-5t$，

∵ $\angle BDP=\angle C=90°$，$\angle PBD=\angle ABC$，

∴ $\triangle BPD\backsim\triangle BAC$，

∴ $\frac{PD}{BP}=\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{PD}{7-5t}=\frac{3}{5}$，

∴ $PD=\frac{21-15t}{5}$，

∵四边形 $PDEF$ 是正方形，

∴ $PF=PD=\frac{21-15t}{5}$；

综上所述，线段 $PF=\begin{cases}4t(0<t<\frac{3}{5})\\ \frac{21-15t}{5}(\frac{3}{5}<t<\frac{7}{5})\end{cases}$.

（2）如图，$AP=5t$，点 F 在 BC 边上，

∴ $PC=AC-AP=3-5t$，

由（1）知：$DP=PF=4t$，$\triangle APD\backsim\triangle ABC$，

∴ $\frac{AD}{AP}=\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{AD}{5t}=\frac{3}{5}$，

∴ $AD=3t$，

∵四边形 $PDEF$ 是正方形，

∴ $\angle DPF=90°$，

∴ $\angle APD+\angle FPC=90°$，

∵$\angle ADP=\angle C=90°$，

∴$\angle APD+\angle A=90°$，

∴$\angle A=\angle FPC$，

∴$\triangle APD\backsim\triangle PFC$，

∴$\dfrac{AD}{AP}=\dfrac{PC}{PF}$，即$\dfrac{3t}{5t}=\dfrac{3-5t}{4t}$，

解得：$t=\dfrac{15}{37}$；

（3）①如图，取 AC、BC 的中点 M、N，

则 $AM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{3}{2}$，$CN=\dfrac{1}{2}BC=2$，

当点 P 运动到点 M 时，直线 PF 与 MN 重合，

∴$5t=\dfrac{3}{2}$，

解得：$t=\dfrac{3}{10}$，

当点 P 运动到点 N 时，直线 PF 与 MN 重合，

∴$5t=3+2$，

解得：$t=1$，

∴当 C 关于直线 PF 的对称点 C_1 在$\triangle ABC$ 的内部时，t 的取值范围为$\dfrac{3}{10}<t<\dfrac{3}{5}$或$\dfrac{3}{5}<t<1$．

②当 $0<t<\dfrac{3}{5}$且 $EC_1\parallel AC$ 时，如图，连接 CC_1 交 PF 于 H，交 AB 于 G，

则 $AP=5t$，$AD=3t$，$PD=4t$，$CP=3-5t$，$\angle CHP=\angle DPF=90°$，

$CC_1=2CH=\dfrac{24-40t}{5}$，$AE=7t$，

∵$PF\parallel AB$，

∴$\angle AGC=\angle CHP=90°$，

∴$AB\cdot CG=AC\cdot BC$，即 $5CG=3\times 4$，

∴$CG=\dfrac{12}{5}$，

∴$C_1G=CC_1-CG=\dfrac{24-40t}{5}-\dfrac{12}{5}=\dfrac{12-40t}{5}$，

$\because AG=\sqrt{AC^2-CG^2}=\sqrt{3^2-(\frac{12}{5})^2}=\frac{9}{5}$,

$\therefore EG=AE-AG=7t-\frac{9}{5}$,

$\because EC_1 \parallel AC$,

$\therefore \frac{C_1G}{EG}=\frac{CG}{AG}$,

$\therefore C_1G \bullet AG=CG \bullet EG$，即$\frac{12-40t}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{12}{5}\times$（$7t-\frac{9}{5}$），

解得：$t=\frac{18}{65}$;

当$0<t<\frac{3}{5}$且$EC_1 \parallel BC$时，如图，连接CC_1交PF于H，延长EC_1交AC于G，

$\because C_1$、C关于直线PF对称，

$\therefore CC_1=2CH$，$CC_1 \perp PH$，

$\because AP=5t$，$AD=3t$，$PD=4t$，$CP=3-5t$，$\angle CHP=\angle DPF=90°$，

$\therefore CC_1 \parallel DP$，

$\therefore \angle C_1CG=\angle APD$，

$\because EC_1 \parallel BC$，

$\therefore \angle AGE=\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CGC_1=180°-90°=90°$，

$\because \angle ADP=90°$，

$\therefore \angle CGC_1=\angle ADP=\angle CHP$，

$\therefore \triangle CC_1G \backsim \triangle PAD \backsim \triangle CPH$，

$\therefore \frac{CH}{CP}=\frac{PD}{AP}$，即$\frac{CH}{3-5t}=\frac{4t}{5t}$,

$\therefore CH=\frac{12-20t}{5}$,

$\therefore CC_1=2CH=\frac{24-40t}{5}$,

$\because \frac{CG}{CC_1}=\frac{PD}{AP}$，即$\frac{CG}{\frac{24-40t}{5}}=\frac{4t}{5t}$,

$\therefore CG=\frac{96-160t}{25}$,

$\because DE=PD=4t$,

$\therefore AE=AD+DE=3t+4t=7t$,

$\because EG \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{AG}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$，即$\dfrac{AG}{3}=\dfrac{7t}{5}$，

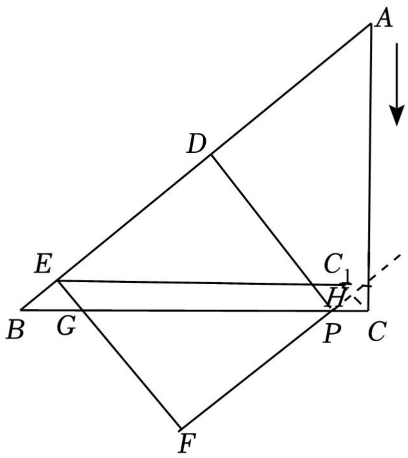
$\therefore AG=\dfrac{21t}{5}$，

$\because AG+CG=AC$，

$\therefore \dfrac{21t}{5}+\dfrac{96-160t}{25}=3$，

解得：$t=\dfrac{21}{55}$；

当$\dfrac{3}{5}<t<\dfrac{7}{5}$且$EC_1 \parallel BC$时，如图，连接$CC_1$交$PF$于$H$，设$EF$交$BC$于$G$，



$\because C_1$、C关于直线PF对称，

$\therefore CC_1=2CH$，$CC_1 \perp PH$，

$\because AC+CP=5t$，$BP=7-5t$，$BD=\dfrac{4}{5}(7-5t)$，$PF=PD=\dfrac{3}{5}(7-5t)$，$CP=5t-3$，$\angle CHP=\angle EFP=90^\circ$，

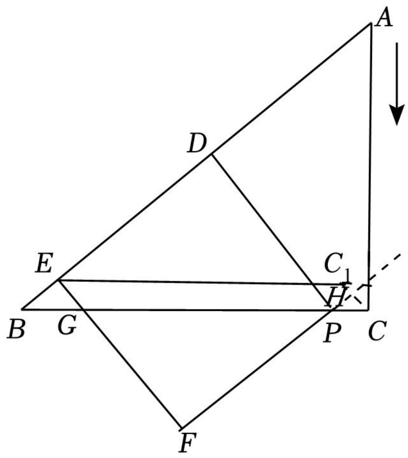
$\therefore CC_1 \parallel EF$，$BE=BD-DE=\dfrac{4}{5}(7-5t)-\dfrac{3}{5}(7-5t)=\dfrac{1}{5}(7-5t)$，$EG=\dfrac{3}{20}(7-5t)$，$BG=\dfrac{1}{4}(7-5t)$，

$\therefore \angle C_1CP=\angle BGE$，

$\because EC_1 \parallel BC$，

$\therefore$四边形CC_1EG是平行四边形，

$\therefore CC_1=EG=\dfrac{3}{20}(7-5t)$，



$\therefore CH=\frac{3}{40}$（7﹣5$t$），

$\because \angle BEG=\angle GFP=\angle CHP=90^\circ$，$\angle CPH=\angle FPG$，$\angle BGE=\angle PGF$，

$\therefore \triangle CPH\backsim\triangle GPF\backsim\triangle GBE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{PG}{PF}=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{4}$，$\frac{CP}{CH}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$，

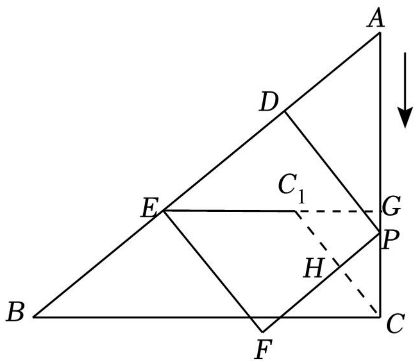
$\therefore PG=\frac{5}{4}PF=\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}$（7﹣5$t$）$=\frac{3}{4}$（7﹣5$t$），$CP=\frac{5}{3}CH=\frac{5}{3}\times\frac{3}{40}$（7﹣5$t$）$=\frac{1}{8}$（7﹣5$t$），

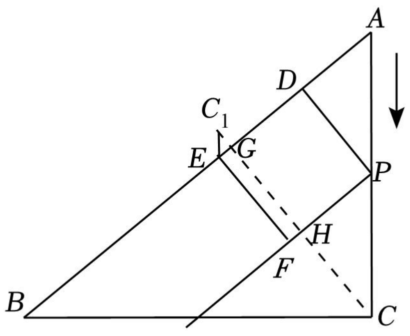
$\because BG+PG+CP=BC=4$，

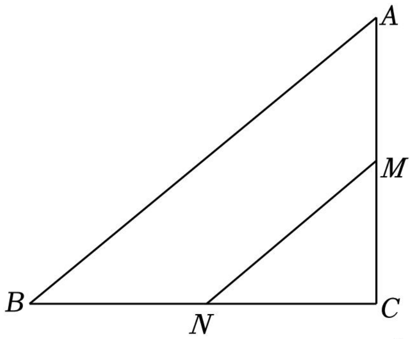
$\therefore \frac{1}{4}$（7﹣5t）$+\frac{3}{4}$（7﹣5t）$+\frac{1}{8}$（7﹣5t）$=4$，

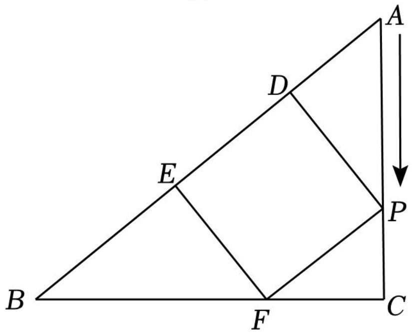
解得：$t=\frac{31}{45}$；

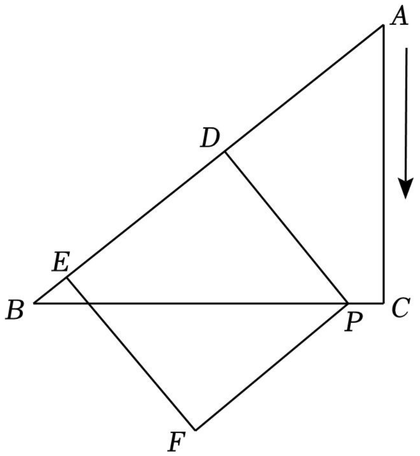
综上所述，t的值为$\frac{21}{55}$或$\frac{18}{65}$或$\frac{31}{45}$.

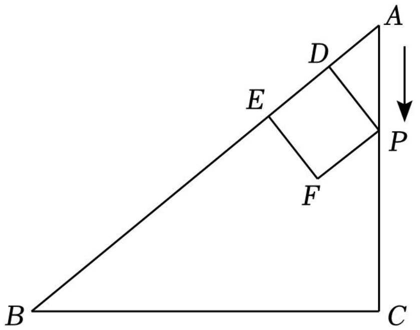












【点评】本题是四边形综合题，考查了正方形的性质，直角三角形性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，轴对称性质，动点问题等；解题关键是运用分类讨论思想和方程思想解决问题．

10．（2023•九台区模拟）如图，在△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝15，BC＝20．点 P 从点 A 出发，沿线段 AB 以每秒 4 个单位长度的速度向终点 B 匀速运动．当点 P 不与点 A、点 B 重合时，过点 P 作 PQ⊥AB，其中点 Q 在 AB 上方，∠QAP＝∠ABC，以 AQ、AP 为邻

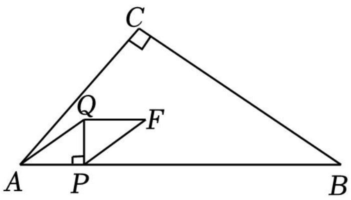
边作▱$APFQ$．设点 P 运动的时间为 t（秒）．

（1）边 AB 的长为 __25__；点 C 到边 AB 的距离为 __12__．

（2）当点 F 落在边 BC 上时，求 t 的值．

（3）设线段 QF 与边 BC 交于点 M，线段 PF 与边 BC 交于点 N，当 $MN=5$ 时，求 AP 的长．

（4）连结 CP，沿直线 CP 将▱$APFQ$ 剪开，当剪开的两部分可以拼成一个不重叠无缝隙的三角形时，直接写出 t 的值．



【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；压轴题；运算能力；推理能力．

【分析】（1）由勾股定理可得 $AB=25$，如图，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，利用 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，即可求得答案；

（2）如图，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于 G，先证明$\triangle APQ\cong\triangle PGF$（$AAS$），可得 $AP=PG$，再利用等腰三角形的判定和性质得出 $PG=BG$，得出 $AP=PG=BG=\frac{1}{3}AB=\frac{25}{3}$，即可求得答案；

（3）如图，过点 N 作 $NK\perp AB$ 于 K，由$\triangle AQP\backsim\triangle BAC$，可得$\frac{PQ}{AC}=\frac{AQ}{AB}=\frac{AP}{BC}$，求得 $PQ=3t$，$AQ=5t$，利用等腰三角形性质可得 $PN=BN=5t-5$，$BK=PK=\frac{1}{2}BP=\frac{25-4t}{2}$，再由$\triangle BNK\backsim\triangle BAC$，可得$\frac{BK}{BC}=\frac{BN}{AB}$，即$\frac{\frac{25-4t}{2}}{20}=\frac{5t-5}{25}$，求得 $t=\frac{11}{4}$，即可得出答案；

（4）分两种情况：①当 CP 经过 QF 的中点 L 时，②当 CP 经过 AQ 的中点 S 时，分别利用相似三角形的判定和性质即可．

【解答】解：（1）∵$\angle ACB=90°$，$AC=15$，$BC=20$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25$；

如图，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

$\therefore \frac{1}{2} \times 25CH = \frac{1}{2} \times 15 \times 20$，

$\therefore CH = 12$；

故答案为：25；12．

（2）当点 F 落在边 BC 上时，如图，过点 F 作 $FG \perp AB$ 于 G，

由题意得：$AP = 4t$，

$\because$ 四边形 $APFQ$ 是平行四边形，

$\therefore QF = AP = 4t$，$PF = AQ$，$QF \parallel AP$，$AQ \parallel PF$，

$\therefore \angle FPG = \angle QAP$，

$\because PQ \perp AB$，$FG \perp AB$，

$\therefore \angle APQ = \angle PGF = 90^\circ$，

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle PGF$（$AAS$），

$\therefore AP = PG$，

$\because \angle QAP = \angle ABC$，

$\therefore \angle FPG = \angle ABC$，

$\therefore PF = BF$，

$\because FG \perp AB$，

$\therefore PG = BG$，

$\therefore AP = PG = BG = \frac{1}{3}AB = \frac{25}{3}$，

$\therefore 4t = \frac{25}{3}$，

解得：$t = \frac{25}{12}$；

（3）如图，过点 N 作 $NK \perp AB$ 于 K，

$\because AP = 4t$，$BP = 25 - 4t$，

$\because \angle QAP = \angle ABC$，$\angle APQ = \angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore \triangle AQP \backsim \triangle BAC$，

$\therefore \frac{PQ}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{BC}$，即 $\frac{PQ}{15} = \frac{AQ}{25} = \frac{4t}{20}$，

$\therefore PQ = 3t$，$AQ = 5t$，

∴$PF=AQ=5t$，

∵$QF\parallel AB$，

∴$\angle F=\angle FPB$，$\angle FMB=\angle B$，

∵$\angle FPB=\angle B$，

∴$\angle F=\angle FMB$，

∴$FN=MN=5$，

∴$PN=BN=5t-5$，

∵$NK\perp AB$，

∴$BK=PK=\frac{1}{2}BP=\frac{25-4t}{2}$，

∵$\angle B=\angle B$，$\angle BKN=\angle C=90°$，

∴$\triangle BNK\backsim\triangle BAC$，

∴$\frac{BK}{BC}=\frac{BN}{AB}$，即$\frac{\frac{25-4t}{2}}{20}=\frac{5t-5}{25}$，

解得：$t=\frac{11}{4}$，

∴$AP=4\times\frac{11}{4}=11$，

故AP的长为11；

（4）∵沿直线CP将▱$APFQ$剪开的两部分可以拼成一个不重叠无缝隙的三角形，

∴CP必定经过QF的中点或AQ的中点，

①当CP经过QF的中点L时，如图，过点C作$CH\perp AB$于H，延长QF交CH于G，延长AQ交CP于R，

∵L是QF的中点，

∴$QL=FL$，

∵$AQ\parallel PF$，

∴$\angle RQL=\angle PFL$，

∵$\angle RLQ=\angle PLF$，

∴$\triangle RLQ\cong\triangle PLF$（$AAS$），

∴此时沿直线CP将▱$APFQ$剪开的两部分可以拼成一个不重叠无缝隙的三角形，

∵$CH\perp AB$，$AC\perp BC$，

∴$AB \cdot CH = AC \cdot BC$，即 $25CH = 15 \times 20$，

∴$CH = 12$，

∵$AP = QF = 4t$，$AQ = 5t$，$PQ = 3t$，$AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$，

∴$PH = AH - AP = 9 - 4t$，

∵$\angle QPH = \angle PHG = \angle QGH = 90°$，

∴四边形 $PQGH$ 是矩形，

∴$QG = PH = 9 - 4t$，$GH = PQ = 3t$，

∴$CG = CH - GH = 12 - 3t$，

∵$QL = FL = \frac{1}{2}QF = 2t$，

∴$LG = QG - QL = 9 - 6t$，

∵$\angle PQL = \angle CGL = 90°$，$\angle PLQ = \angle CLG$，

∴$\triangle PLQ \backsim \triangle CLG$，

∴$\frac{LG}{CG} = \frac{QL}{PQ}$，即$\frac{9-6t}{12-3t} = \frac{2t}{3t}$，

解得：$t = \frac{1}{4}$；

②当 CP 经过 AQ 的中点 S 时，如图，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H，交 AQ 于 M，

由①知：$AP = QF = 4t$，$AQ = 5t$，$PQ = 3t$，$CH = 12$，$AH = 9$，

∵S 是 AQ 的中点，

∴$AS = SQ = \frac{5}{2}t$，

∵$\angle AHC = \angle APQ = 90°$，$\angle MAH = \angle QAP$，

∴$\triangle AMH \backsim \triangle AQP$，

∴$\frac{AM}{AQ} = \frac{MH}{PQ} = \frac{AH}{AP}$，即$\frac{AM}{5t} = \frac{MH}{3t} = \frac{9}{4t}$，

∴$AM = \frac{45}{4}$，$MH = \frac{27}{4}$，

∴$SM = AS - AM = \frac{5}{2}t - \frac{45}{4}$，$CM = CH - MH = 12 - \frac{27}{4} = \frac{21}{4}$，

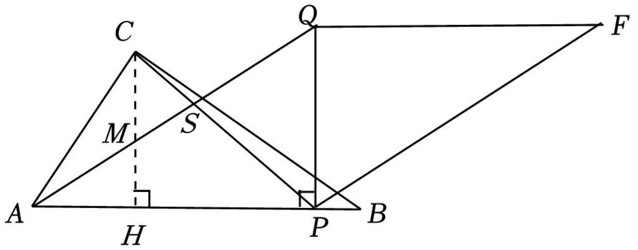
∵$CH \parallel PQ$，

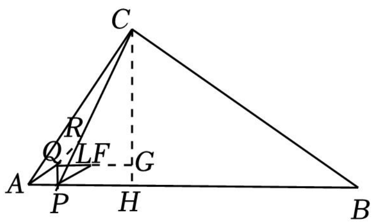
∴$\triangle SCM \backsim \triangle SPQ$，

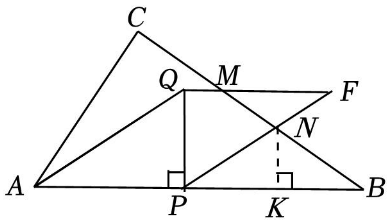
$\therefore \frac{CM}{PQ}=\frac{SM}{SQ}$，即$\frac{\frac{21}{4}}{3t}=\frac{\frac{5}{2}t-\frac{45}{4}}{\frac{5}{2}t}$，

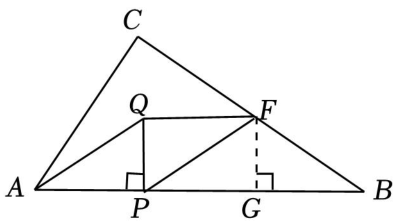
解得：$t=\frac{25}{4}$；

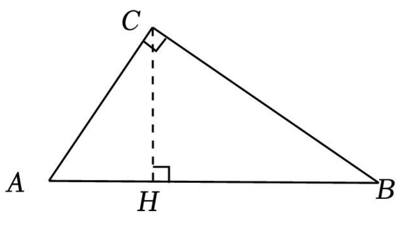
综上所述，t 的值为$\frac{1}{4}$或$\frac{25}{4}$.











【点评】本题是四边形综合题，考查了平行四边形性质，矩形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等，解题关键是添加辅助线构造全等三角形和相似三角形.

11.（2022 秋•二七区期末）数学兴趣小组活动中，刘老师展示一个问题情境，供同学们探究：

问题情境：如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$AB=10$，$AC=8$，点 P 为斜边 AB 上不与 A，B 重合的一个动点，过点 P 作 $PQ\perp AC$ 于点 Q，分别过 P，Q 作 $PD\parallel AC$，$QD\parallel AB$，PD 交 QD 于点 D，请讨论可能发现的结论．

以下是讨论过程：

小明：我发现四边形 $APDQ$ 是平行四边形，

理由：由作图可知，$PD\parallel AC$，$QD\parallel AB$，四边形 $APDQ$ 是平行四边形

小亮：我和小明想法一样，但还可以用全等三角形来解决．

理由：∵$PD\parallel AC$，$QD\parallel AB$，∴$\angle DPQ=\angle AQP$，$\angle DQP=\angle APQ$．

又∵$PQ=QP$，∴△PDQ≌△QAP．∴$PD=AQ$，$QD=PA$．

所以四边形 $APDQ$ 是平行四边形

小红：我发现如果点 D 恰好落在 BC 上时，点 P 为 AB 的中点．

请仔细阅读讨论过程，完成下述任务：

（1）小明推导四边形 $APDQ$ 是平行四边形的依据是

<u>　两组对边分别平行的四边形是平行四边形　</u>

，小亮推导四边形 $APDQ$ 是平行四边形的依据是

<u>　两组对边分别相等的四边形是平行四边形　</u>

，其中小亮得出△PDQ≌△QAP 的依据是

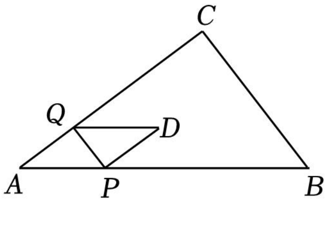
<u>　④　</u>

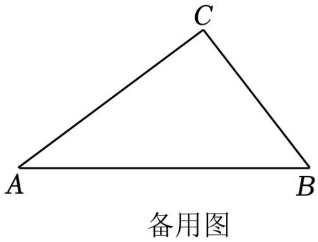
（填序号）；

①SSS；②SAS；③AAS；④ASA；⑤HL．

（2）当点 D 恰好落在 BC 上时，请证明小红的结论；

（3）若 PD 的中点为 E，当点 E 恰好落在△ABC 一边的垂直平分线上时，直接写出此时 AP 的长．





备用图

【考点】四边形综合题．

【专题】多边形与平行四边形；推理能力；应用意识．

【分析】（1）根据讨论过程得出结论即可；

（2）先证四边形 $PBDQ$ 是平行四边形，然后根据四边形 $APDQ$ 是平行四边形，得出 $QD=AP$，即可得出 $AP=PB$，结论得证；

（3）分三种情况，设 $AP=x$，则 $AQ=\frac{4}{5}x$，$PE=\frac{2}{5}x$，利用三角形相似得出比例关系计算即可．

【解答】解：（1）由题意知，小明推导四边形 $APDQ$ 是平行四边形的依据是：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

小亮推导四边形 $APDQ$ 是平行四边形的依据是：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

小亮得出 $\triangle PDQ\cong\triangle QAP$ 的依据是 ASA，

故答案为：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；④；

（2）如图 1，当点 D 恰好落在 BC 上时，

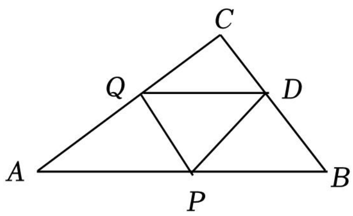


图1

$\because PQ\perp AC$，

$\therefore \angle AQP=\angle C=90°$，

$\therefore PQ\parallel BC$，

又$\because QD\parallel AB$，

$\therefore$四边形 $PBDQ$ 是平行四边形，

$\therefore QD=PB$，

由讨论可知四边形 $APDQ$ 是平行四边形，

$\therefore QD=AP$，

$\therefore AP=PB$，即点 P 为 AB 的中点；

（3）满足条件的 AP 的值为$\frac{10}{3}$或$\frac{125}{33}$或 5；

分三种情况，设 $AP=x$，则 $AQ=\frac{4}{5}x$，$PE=\frac{2}{5}x$，

①如图 2 中，当点 E 落在线段 AC 的垂直平分线 MN 上时，

∵$PD // AC$，$MN // BC$，

∴$\angle A=\angle EPN$，$\angle B=\angle PNE$，

∴$\triangle PEN \backsim \triangle ACB$，

∴$\frac{PE}{PN}=\frac{4}{5}$,

即$\frac{\frac{2}{5}x}{5-x}=\frac{4}{5}$,

解得$x=\frac{10}{3}$;

②如图 3 中，当点 E 落在线段 AB 的垂直平分线 MN 上时，

同理可得$\triangle PEN \backsim \triangle ABC$，

∴$\frac{PE}{PN}=\frac{5}{4}$,

即$\frac{\frac{2}{5}x}{5-x}=\frac{5}{4}$,

解得$x=\frac{125}{33}$;

③如图 4 中，当点 E 落在线段 BC 的垂直平分线上时，点 M 与点 P 重合，点 N 与点 D 重合，

∴$x=5$；

综上所述，满足条件的 AP 的长为$\frac{10}{3}$或$\frac{125}{33}$或 5．

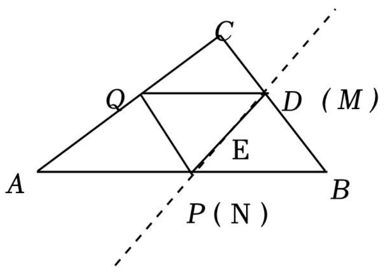


图4

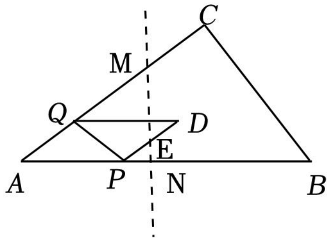


图3

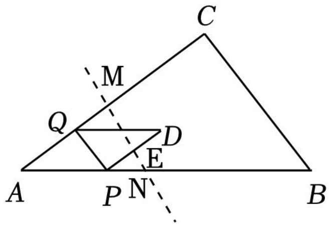


图2

【点评】本题主要考查平行四边形的性质，直角三角形的性质，相似三角形的判定和性质等知识，熟练掌握平行四边形的性质，直角三角形的性质，相似三角形的判定和性质等知识是解题的关键．

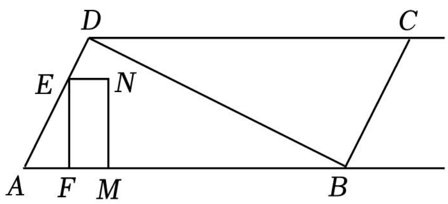
12．（2023•龙川县校级开学）如图①，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADB=90°$，$AD=2\sqrt{5}$，$BD=4\sqrt{5}$，点 F 从点 A 出发以每秒 1 个单位长度的速度沿射线 AB 方向运动．设点 F 的运动时间为 t 秒，点 F 出发后，过点 F 作 AB 的垂线，交折线 $AD-DC$ 于点 E，以 EF 为边向右作矩形 $EFMN$，使 $EF=2FM$．设矩形 $EFMN$ 与△BCD 重叠部分的面积为 S．

（1）当点 N 落在 BD 上时，求 t 的值；

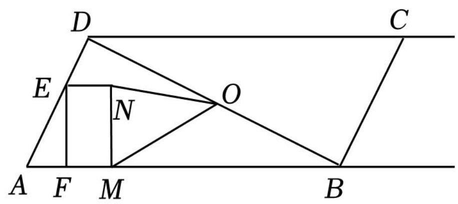
（2）当点 F 在线段 AB 上运动时，用含 t 的代数式表示线段 BM 的长；

（3）当矩形 $EFMN$ 与△BCD 重叠部分的图形不是三角形时，求 S 与 t 的函数关系式；

（4）如图②，点 O 为 BD 的中点，连接 ON，OM，设矩形 $EFMN$ 与△OMN 的面积比为 k，当 $\frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$ 时，直接写出 t 的取值范围．



图①



图②

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；压轴题；运算能力；推理能力．

【分析】（1）利用勾股定理可得 $AB=10$，再由$\triangle AEF\backsim\triangle ABD$，可得 $AE=\sqrt{5}t$，$EF=2t$，$DE=2\sqrt{5}-\sqrt{5}t$，再根据 $EF=2FM$，建立方程求解即可得出答案；

（2）分三种情况：当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时，当 $2<t\leqslant 8$ 时，当 $8<t\leqslant 10$ 时，分别计算线段 BM 的长；

（3）分两种情况：当 $2<t\leqslant 8$ 时，当 $8<t\leqslant 10$ 时，分别求出 S 与 t 的函数关系式；

（4）分三种情况：当 $0<t\leqslant 2$ 时，当 $2<t\leqslant 4$ 时，当 $4<t\leqslant 12$ 时，根据矩形 $EFMN$ 与$\triangle OMN$ 的面积比为 k，$\frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$，列不等式求解即可．

【解答】解：（1）如图①，$\because\angle ADB=90°$，$AD=2\sqrt{5}$，$BD=4\sqrt{5}$，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2}=10$，

$\because$点 F 从点 A 出发以每秒 1 个单位长度的速度沿射线 AB 方向运动 t 秒，

$\therefore AF=t$，

$\because EF\perp AB$，

$\therefore\angle AFE=\angle ADB=90°$，

$\because\angle EAF=\angle BAD$，

$\therefore\triangle AEF\backsim\triangle ABD$，

$\therefore\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BD}=\frac{AF}{AD}$，即$\frac{AE}{10}=\frac{EF}{4\sqrt{5}}=\frac{t}{2\sqrt{5}}$，

$\therefore AE=\sqrt{5}t$，$EF=2t$，

$\therefore DE=AD-AE=2\sqrt{5}-\sqrt{5}t$，

$\because$四边形 $EFMN$ 是矩形，

$\therefore FM=EN$，$EN/\!/FM$，即 $EN/\!/AB$，

$\therefore\triangle DEN\backsim\triangle DAB$，

$\therefore\frac{EN}{AB}=\frac{DE}{AD}$，即$\frac{EN}{10}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}t}{2\sqrt{5}}$，

$\therefore EN=10-5t$，

$\because EF=2FM$，

$\therefore 2t=2(10-5t)$，

解得：$t=\frac{5}{3}$；

（2）由（1）得 $AF=t$，$EF=2t$，

∵$EF=2FM$，

∴$FM=\frac{1}{2}EF=t$，

当$0\leqslant t\leqslant 2$时，点E在边AD上，

∴$BM=AB-AF-FM=10-t-t=10-2t$；

当$2<t\leqslant 8$时，点E在边DC上，点M在边AB上，如图②，

过点D作$DH\perp AB$于点H，

则$DH\cdot AB=AD\cdot BD$，即$10DH=2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}$，

∴$DH=4$，

∴$EF=DH=4$，

∴$FM=\frac{1}{2}EF=2$，

∴$BM=AB-AF-FM=10-t-2=8-t$；

当$8<t\leqslant 10$时，点M在线段AB的延长线上，如图③，

∵$AB=10$，$AF=t$，$FM=2$，

∴$BM=AF+FM-AB=t+2-10=t-8$；

综上所述，线段BM的长为$10-2t$（$0\leqslant t\leqslant 2$）或$8-t$（$2<t\leqslant 8$）或$t-8$（$8<t\leqslant 10$）．

（3）如图④，当$2<t\leqslant 8$时，重叠部分为梯形$EGKN$，

过点D作$DH\perp AB$于点H，

由（2）知：$DH=4$，

∴$AH\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$，

∴$HF=AF-AH=t-2$，

∵$DH\perp AB$，$EF\perp AB$，

∴$DH\parallel EF$，

∵$AB\parallel CD$，

∴四边形$DEFH$是平行四边形，

∵$\angle DHF=90^\circ$，

∴四边形 $DEFH$ 是矩形，

∴$DE=HF=t-2$，$DN=t-2+2=t$，

∴$\tan\angle CDB=\frac{EG}{DE}=\frac{NK}{DN}=\frac{AD}{BD}$，

即$\frac{EG}{t-2}=\frac{NK}{t}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$，

∴$EG=\frac{t-2}{2}$，$NK=\frac{1}{2}t$，

∴$S=\frac{1}{2}\times(EG+NK)\times EN=\frac{1}{2}\times(\frac{t-2}{2}+\frac{1}{2}t)\times2=t-1$；

如图⑤，当 $8<t\leqslant10$ 时，重叠部分为五边形 $EGBKN$，

过点 B 作 $BT\perp CD$ 于点 T，

则 $BT=4$，$BF=10-t$，$BM=2-(10-t)=t-8$，

∴$FG=BF\cdot\tan\angle ABD=(10-t)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(10-t)$，$KM=2BM=2(t-8)$，

∴$S=S_{矩形EFMN}-S_{\triangle BFG}-S_{\triangle BMK}=8-\frac{1}{2}\times(10-t)\times\frac{1}{2}(10-t)-\frac{1}{2}\times(t-8)\times2(t-8)$

$=-\frac{5}{4}t^2+21t-81$；

综上所述，S 与 t 的函数关系式为 $S=\begin{cases}t-1(2<t\leq8)\\-\frac{5}{4}t^2+21t-81(8<t\leq10)\end{cases}$.

（4）如图⑥，过点 O 作 $OW\perp AB$ 于点 W，$OH\perp MN$ 于点 L，

当 $0<t\leqslant2$ 时，$AF=FM=t$，$EF=2t$，

∵点 O 为 BD 的中点，

∴$OB=OD$，

∵$OW\perp AB$，$DH\perp AB$，

∴$OW\parallel DH$，

∴W 是 BH 的中点，

∴$BW=\frac{AB-AH}{2}=\frac{10-2}{2}=4$，

∴$OL=MW=AB-BW-AF-FM=10-4-t-t=6-2t$，

∵矩形 $EFMN$ 与△OMN 的面积比为 k，

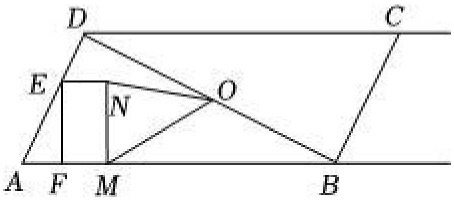
$\therefore \frac{2t^2}{t(6-2t)}=k$，

$\because \frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$，

$\therefore \frac{1}{2}\leq \frac{2t^2}{t(6-2t)}\leq 1$，

解得：$1\leqslant t\leq \frac{3}{2}$；

当 $2<t\leqslant 4$ 时，如图⑦，



图②

$AF=t$，$EF=MN=4$，$FM=2$，$OL=4-t$，

$\because$ 矩形 $EFMN$ 与 $\triangle OMN$ 的面积比为 k，

$\therefore \frac{8}{8-2t}=k$，

$\because \frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$，

$\therefore \frac{1}{2}\leq \frac{8}{8-2t}\leq 1$，

此时无解；

当 $4<t\leqslant 12$ 时，

$AF=t$，$EF=MN=4$，$FM=2$，$OL=t-4$，

$\because$ 矩形 $EFMN$ 与 $\triangle OMN$ 的面积比为 k，

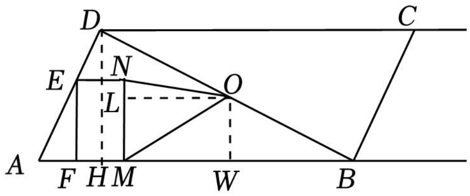
$\therefore \frac{8}{2t-8}=k$，

$\because \frac{1}{2}\leq k\leqslant 1$，

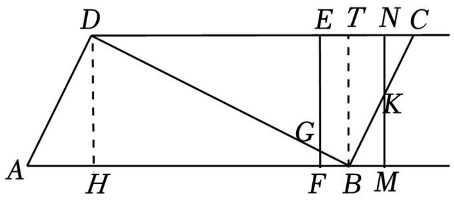
$\therefore \frac{1}{2}\leq \frac{8}{2t-8}\leq 1$，

$\therefore 8\leqslant t\leqslant 12$；

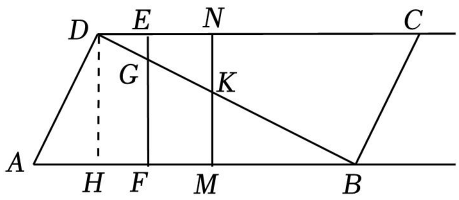
综上所述，t 的取值范围为 $1\leqslant t\leq \frac{3}{2}$或 $8\leqslant t\leqslant 12$．



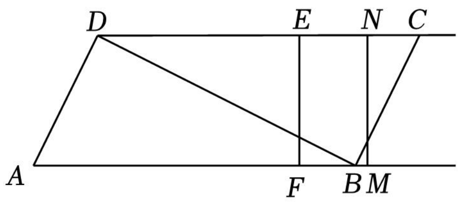
图⑥



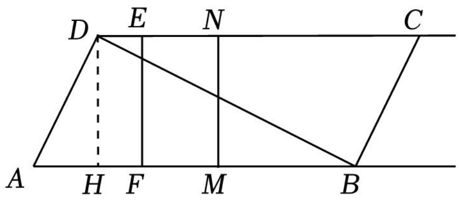
图⑤



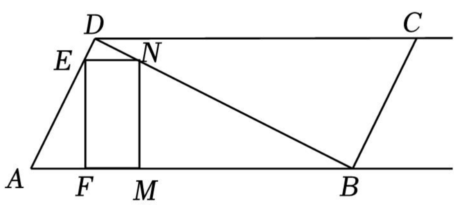
图④



图③



图②



图①

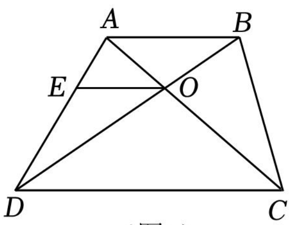
【点评】本题是平行四边形四边形的综合应用，主要考查了锐角三角形函数的定义、相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质、梯形的面积、三角形的面积、矩形的判定和性质、动点问题，运用数形结合思想根据题意画出符合题意的图形是解题的关键．

13．（2023•龙川县校级开学）如图 1，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，又 $AB=30$，$CD=50$．

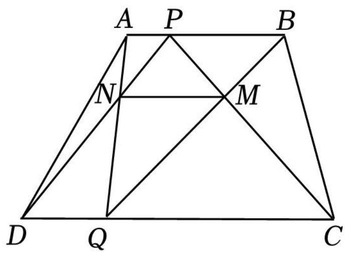
（1）对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OE // CD$ 交 AD 于点 E，试求 OE 的长．

（2）如图 2，动点 P 由点 A 出发沿 AB 向点 B 移动，速度为 3 单位/分，同时动点 Q 由点 D 出发沿 DC 向点 C 移动，速度为 5 单位/分，又 AQ 与 DP 交于点 N，CP 与 BQ 交于点 M．猜想：对于动点 P 和 Q 在运动过程中的任一时刻（分别不与 A，B 和 C，D 重合），始终有 $MN // AB$，请加以证明．

（3）设梯形 $ABCD$ 的面积为 S，试问，在（2）题点 P，Q 的运动过程中，四边形 $PNQM$ 的面积是否发生变化？如发生变化，请加以说明；如不发生变化，请求出它的面积（用 S 的代数式表示）．



（图1）



（图2）

【考点】四边形综合题．

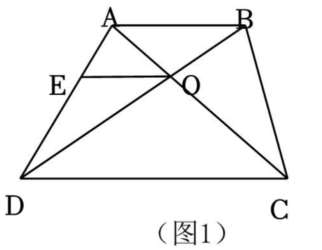
【专题】几何综合题；压轴题；推理能力．

【分析】（1）由 $AB // CD$，可得△AOB∽△COD，进而可得$\frac{OA}{AC}=\frac{3}{8}$，再由 $OE // CD$，可得△AOE∽△ACD，运用相似三角形性质即可求得答案；

（2）设动点 P、Q 的运动时间为 x 分，由题意得：$AP=3x$，$DQ=5x$，$BP=30-3x$，$CQ=50-5x$，可证得：△APN∽△QDN，△BPM∽△QCM，利用相似三角形性质可得$\frac{NQ}{AQ}=\frac{MQ}{BQ}$，再结合∠$MQN$=∠$BQA$，可得△$QMN$∽△$QBA$，得出∠$QMN$=∠$QBA$，再利用平行线判定定理即可证得结论；

（3）设梯形 $ABCD$ 的高为 h，则 $S=\frac{AB+CD}{2}\times h=40h$，$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}CD\bullet h=25h$，$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}AB\bullet h=15h$，利用相似三角形性质可得出：$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle PCD}}=(\frac{PN}{PD})^2=(\frac{3}{8})^2=\frac{9}{64}$，$\frac{S_{\triangle QMN}}{S_{\triangle QAB}}=(\frac{QN}{AQ})^2=(\frac{5}{8})^2=\frac{25}{64}$，再由 $S_{四边形PNQM}=S_{\triangle PMN}+S_{\triangle QMN}$，即可求得答案．

【解答】（1）解：如图 1，∵$AB // CD$，



（图1）

∴△AOB∽△COD，

∴$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$,

∴$\frac{OA}{AC}=\frac{3}{8}$,

∵OE∥CD，

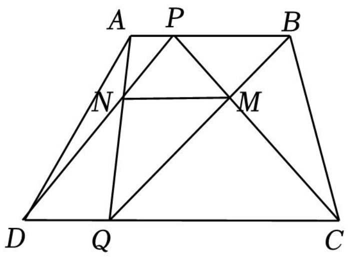
∴△AOE∽△ACD，

∴$\frac{OE}{CD}=\frac{OA}{AC}$,

∴$\frac{OE}{50}=\frac{3}{8}$,

∴$OE=\frac{3}{8}\times50=\frac{75}{4}$;

（2）证明：如图 2，设动点 P、Q 的运动时间为 x 分，由题意得：$AP=3x$，$DQ=5x$，



（图2）

∴$BP=30-3x$，$CQ=50-5x$，

∵AB∥CD，

∴△APN∽△QDN，

∴$\frac{AN}{NQ}=\frac{AP}{DQ}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$,

同理：△BPM∽△QCM，

∴$\frac{BM}{MQ}=\frac{BP}{CQ}=\frac{30-3x}{50-5x}=\frac{3}{5}$,

∴$\frac{AN}{NQ}=\frac{BM}{MQ}$,

∴$\frac{NQ}{AQ}=\frac{MQ}{BQ}$,

∵$\angle MQN=\angle BQA$，

$\therefore \triangle QMN \backsim \triangle QBA$，

$\therefore \angle QMN = \angle QBA$，

$\therefore MN /\!/ AB$；

（3）解：四边形 $PNQM$ 的面积不发生变化，$S_{\text{四边形}PNQM}=\frac{15}{64}S$.

$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \frac{PN}{ND}=\frac{AP}{DQ}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$,

$\therefore \frac{PN}{PD}=\frac{3}{8}$,

$\because MN /\!/ AB$，

$\therefore \triangle PMN \backsim \triangle PCD$，

$\therefore \frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle PCD}}=(\frac{PN}{PD})^2=(\frac{3}{8})^2=\frac{9}{64}$,

同理，$\frac{S_{\triangle QMN}}{S_{\triangle QAB}}=(\frac{QN}{AQ})^2=(\frac{5}{8})^2=\frac{25}{64}$,

设梯形 $ABCD$ 的高为 h，则 $S=\frac{AB+CD}{2}\times h=\frac{30+50}{2}h=40h$，

$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}CD\cdot h=\frac{1}{2}\times 50h=25h$，$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\times 30h=15h$，

$\therefore S_{\triangle PCD}=\frac{5}{8}S$，$S_{\triangle QAB}=\frac{3}{8}S$，

$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{9}{64}S_{\triangle PCD}=\frac{9}{64}\times\frac{5}{8}S=\frac{45}{512}S$，$S_{\triangle QMN}=\frac{25}{64}S_{\triangle QAB}=\frac{25}{64}\times\frac{3}{8}S=\frac{75}{512}S$，

$\therefore S_{\text{四边形}PNQM}=S_{\triangle PMN}+S_{\triangle QMN}=\frac{45}{512}S+\frac{75}{512}S=\frac{15}{64}S$.

【点评】本题是相似三角形综合题，考查了梯形的面积，三角形面积，相似三角形的判定和性质，平行线的判定和性质，动点运动中的问题等，设运动时间 x，用含 x 的代数式表示相关线段是解题的关键.

14.（2022 秋•东阳市期末）在矩形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AD、BC 上，且 $DE=5$，$CF=2$，将矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，使点 D 恰好与点 B 重合，点 C 落在点 C' 处，如图 1.

（1）求证：$BE=BF$；

（2）点 P 为线段 EF 上一动点，过点 P 作 $PH\perp BE$、$PG\perp BF$，以 PH、PG 为邻边构造平行四边形 $PHQG$，如图 2.

①求平行四边形 $PHQG$ 的周长.

②当点 P 从点 E 运动到点 F 时，求出点 Q 的运动路径长．

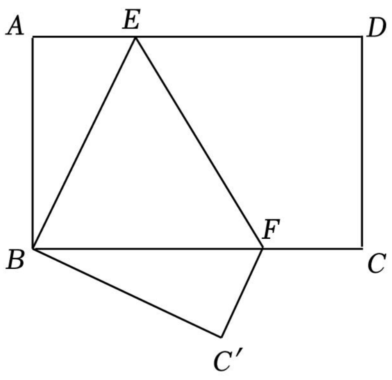


图1

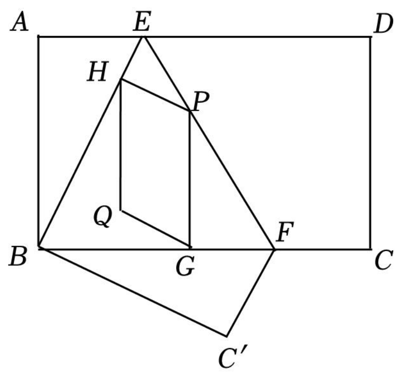


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；压轴题；推理能力；应用意识．

【分析】（1）证明 $\angle BEF=\angle BFE$ 即可解决问题；

（2）①如图 2 中，连接 BP，作 $EH\perp BC$ 于 H，则四边形 $ABHE$ 是矩形．利用面积法证明 $PM+PN=EH$，利用勾股定理求出 AB 即可解决问题；

②过点 Q 作 $QM\parallel EF$ 交 BC 于 M，延长 HQ 交 BC 于 N，延长 GQ 交 BF 于 R，连接 EM，如图 3，可证得：$\triangle MNQ\backsim\triangle EHP\backsim\triangle FGP$，$\triangle BHN\backsim\triangle QGN$，$\triangle BNH\backsim\triangle BME$，推出 $EM\perp BF$，如图 4，同理可得：$FS\perp BE$，进而得出：点 Q 的运动轨迹为平行于点 M 的线段 MS，$MS\parallel EF$，运用勾股定理即可求得答案．

【解答】（1）证明：如图 1 中，

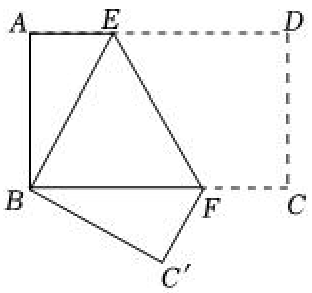


图1

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle DEF=\angle EFB$，

由翻折可知：$\angle DEF=\angle BEF$，

∴$\angle BEF=\angle EFB$，

∴$BE=BF$.

（2）解：①如图 2 中，连接 BP，作 $EM\perp BC$ 于 M，则四边形 $ABME$ 是矩形，$EM=AB$.

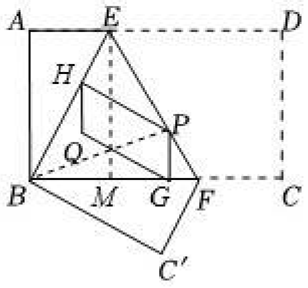


图2

∵$DE=EB=BF=5$，$CF=2$，

∴$AD=BC=7$，$AE=2$，

在 Rt△ABE 中，∵$\angle A=90°$，$BE=5$，$AE=2$，

∴$AB=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，

∵$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PBF}$，$PH\perp BE$，$PG\perp BF$，

∴$\frac{1}{2}BF\cdot EM=\frac{1}{2}BE\cdot PH+\frac{1}{2}BF\cdot PG$，

∵$BE=BF$，

∴$PH+PG=EM=\sqrt{21}$，

∵四边形 $PMQN$ 是平行四边形，

∴四边形 $PMQN$ 的周长$=2$（$PH+PG$）$=2\sqrt{21}$.

②过点 Q 作 $QM\parallel EF$ 交 BC 于 M，延长 HQ 交 BC 于 N，延长 GQ 交 BF 于 R，连接 EM，如图 3，

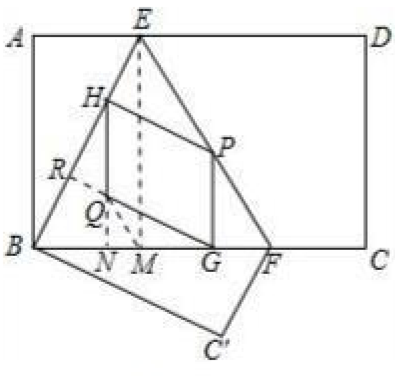


图3

∵$PH\perp BE$，$PG\perp BF$，四边形 $PHQG$ 是平行四边形，

∴$HN\perp BF$，$GR\perp BE$，$HP=QG$，

由（1）知：$\angle BEF=\angle EFB$，

$\because QM\parallel EF$，

$\therefore \angle NMQ=\angle EFB=\angle BEF$，

$\therefore \triangle MNQ\backsim\triangle EHP\backsim\triangle FGP$，

$\therefore \frac{NM}{EH}=\frac{NQ}{HP}=\frac{NQ}{QG}$,

$\because HN\perp BF$，$GR\perp BE$，

$\therefore \angle BHN=\angle QGN$，

$\therefore \triangle BHN\backsim\triangle QGN$，

$\therefore \frac{BN}{QN}=\frac{NM}{HE}$, 即$\frac{BN}{BH}=\frac{QN}{QG}$,

$\therefore \frac{BN}{BH}=\frac{NM}{HE}$, 即$\frac{BN}{BH}=\frac{NM}{HE}=\frac{BN+NM}{BH+HE}=\frac{BE}{BM}$,

$\therefore \triangle BNH\backsim\triangle BME$，

$\therefore EM\perp BF$，

如图 4，同理可得：$FS\perp BE$，

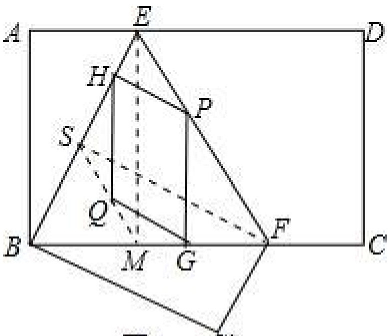


图4

即：点 Q 的运动轨迹为平行于点 M 的线段 MS，M 为$\triangle BEF$ 中 BF 边上的高的垂足，S 为$\triangle BEF$ 中 BE 边上的高的垂足，

$\therefore MS\parallel EF$，

$\therefore \triangle BSM\backsim\triangle BEF$，

$\therefore \frac{MS}{EF}=\frac{BM}{BF}$,

由①知：$AE=BM=2$，$BF=5$，$EM=\sqrt{21}$，

$\therefore MF=3$，

在 Rt$\triangle EFM$ 中，$EF=\sqrt{EM^2+MF^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2+3^2}=\sqrt{30}$，

则：$\frac{MS}{\sqrt{30}}=\frac{2}{5}$，即：$MS=\frac{2\sqrt{30}}{5}$，

∴点 Q 的运动路径长为$\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

【点评】本题是四边形综合题，考查了矩形的性质和判定，翻折变换的性质，平行四边形的性质，直角三角形性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，平行四边形的周长，点的运动轨迹等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造相似三角形，学会利用面积法证明线段之间的关系，属于中考压轴题.

15．（2022 秋•船营区校级期末）实践与探究

操作一：如图①是一张矩形纸片，点 E 在边 AB 上，把△BCE 沿直线 CE 翻折，使点 B 落在对角线 AC 上的点 F 处，连结 DF，且点 E、F、D 在同一直线上.

（1）若∠CEB＝70°，则∠EDC＝__40__°.

（2）当 AE＝2 时，求 BE 的长．小明对求 BE 的长进行了解答，

下面是部分解答过程：

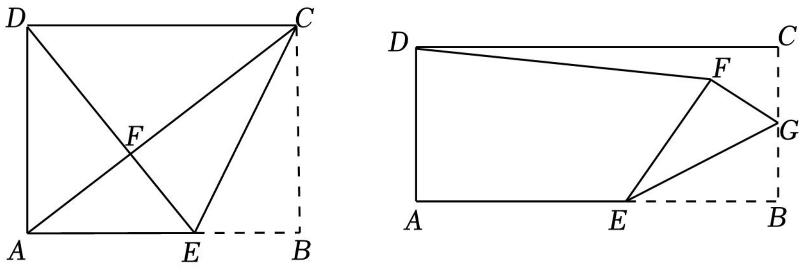
如图①，设 BE 的长为 x，则由折叠知，EF＝EB＝x，∠DEC＝∠BEC.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴AB∥CD，DC＝AB＝2+x.

∴∠DCE＝∠BEC，∴∠DCE＝∠DEC，∴DE＝DC＝2+x．∴DF＝2.

请你补全余下的解答过程.

操作二：如图②，矩形纸片中，AB＝3，BC＝2，点 G 是 BC 的中点，点 E 是 AB 边上的一动点，将△BGE 沿 EG 所在直线翻折得到△FEG，连结 DF，则线段 DF 的最小值是 $\sqrt{10}-1$__.



图①　　　　图②

【考点】四边形综合题.

【专题】矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；图形的相似；推理能力.

【分析】（1）由折叠的性质可得∠CEB＝∠DEC＝70°，由平行线的性质可求解；

（2）由折叠的性质可得 $EF=EB=x$，$\angle DEC=\angle BEC$，可证 $DE=DC=2+x$．可求 $DF=2$，通过证明$\triangle AEF\backsim\triangle CDF$，可得$\frac{DC}{AE}=\frac{DF}{EF}$，即可求解；

（3）由勾股定理可求 DG 的长，由折叠的性质可求 $FG=BG=1$，由两点之间线段最短，列出不等式，即可求解．

【解答】解：（1）∵把$\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折，

∴$\angle CEB=\angle DEC=70°$，

∴$\angle DEB=140°$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle EDC+\angle DEB=180°$，

∴$\angle EDC=40°$，

故答案为：40；

（2）如图①，设 BE 的长为 x，则由折叠知，$EF=EB=x$，$\angle DEC=\angle BEC$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB\parallel CD$，$DC=AB=2+x$，

∴$\angle DCE=\angle BEC$，

∴$\angle DCE=\angle DEC$，

∴$DE=DC=2+x$．

∴$DF=2$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$\triangle AEF\backsim\triangle CDF$，

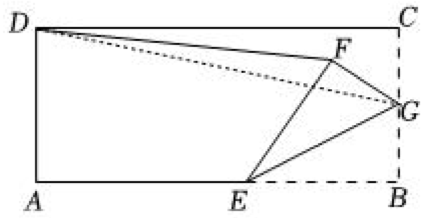
∴$\frac{DC}{AE}=\frac{DF}{EF}$，

∴$\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$，

∴$x=\sqrt{5}-1$ 或 $x=-\sqrt{5}-1$（舍去），

∴BE 的长为$\sqrt{5}-1$；

（3）如图②，连结 DG，



图②

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=3$，$BC=2$，

∴$CD=AB=3$，$\angle C=90°$，

∵点 G 是 BC 的中点，

∴$BG=CG=\frac{1}{2}BC=1$，

∴$DG=\sqrt{DC^2+CG^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$，

由翻折得 $FG=BG=1$，

∵$DF+FG\geqslant DG$，

∴$DF+1\geq\sqrt{10}$，

∴$DF\geq\sqrt{10}-1$，

∴DF 的最小值为$\sqrt{10}-1$.

故答案为：$\sqrt{10}-1$.

【点评】本题是四边形综合题，考查矩形的性质，折叠的性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，“两点之间，线段最短”等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

考点卡片

1．四边形综合题

四边形综合题．

2．相似形综合题

相似形综合题．