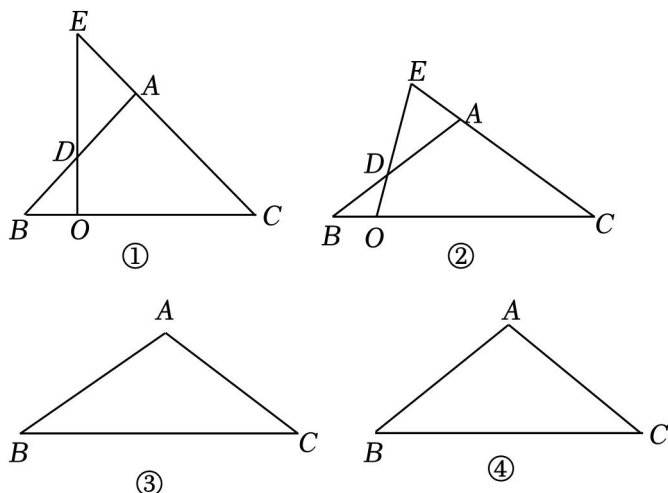


## 2023 年中考数学复习探究性试题汇编之相似三角形

### 一. 解答题 (共 15 小题)

#### 1. (2023·深圳一模)【探究发现】

(1) 如图①所示, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, 点 $D, O$ 分别为边 $BA, BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 则有下列命题:



①  $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ ;

②  $\triangle EDA \sim \triangle ECO$ ;

③  $\triangle BDO \sim \triangle EDA$ ;

请你从中选择一个命题证明其真假, 并写出证明过程;

#### 【类比迁移】

(2) 如图②所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC=5$ ,  $BC=8$ , 点 $D, O$ 分别为边 $BA, BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 若 $OB=2$ , 求 $AE$ 的值;

#### 【拓展应用】

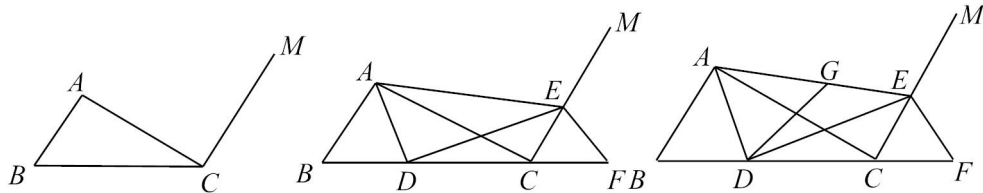
(3) 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC=a$ ,  $BC=b$ , ( $a < b < 2a$ ), 点 $D, O$ 分别为射线 $BA, BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 当 $\triangle ADO$ 为等腰三角形时, 请直接写出 $OB$ 的长 (用 $a, b$ 表示).

2. (2022 秋·奉贤区期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $AB=10$ ,  $BC=34$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ , 射线 $CM \parallel AB$ ,  $D$ 为线段 $BC$ 上的一动点且和 $B, C$ 不重合, 联结 $DA$ , 过点 $D$ 作 $DE \perp DA$ 交射线 $CM$ 于点 $E$ , 联结 $AE$ , 作 $EF=EC$ , 交 $BC$ 的延长线于点 $F$ , 设 $BD=x$ .

(1) 如图 1, 当 $AD \parallel EF$ , 求 $BD$ 的长;

(2) 若 $CE=y$ , 求 $y$ 关于 $x$ 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 如图2, 点  $G$  在线段  $AE$  上, 作  $\angle AGD = \angle F$ , 若  $\triangle DGE$  与  $\triangle CDE$  相似, 求  $BD$  的长.



3. (2022 秋•皇姑区校级月考) 已知, 如图, 矩形  $ABCD$  中,  $AB=5$ ,  $AD=3$ , 点  $E$  是射线  $BC$  上一动点, 将矩形  $ABCD$  沿直线  $AE$  翻折, 点  $B$  落在点  $F$  处.

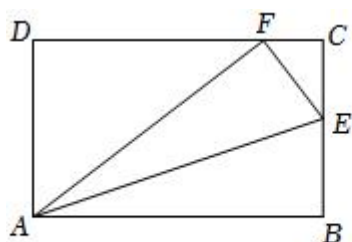


图1

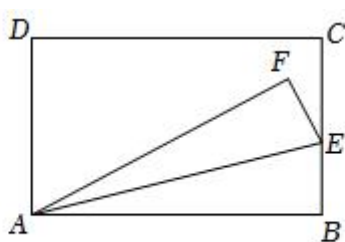


图2

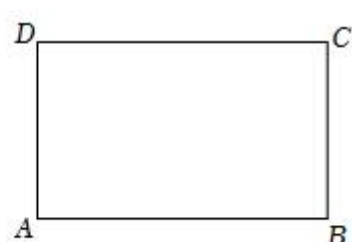
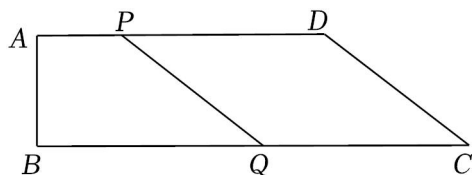


图3

- (1) 若点  $F$  恰好落在  $CD$  边上, 如图1, 求线段  $BE$  的长;
  - (2) 若  $BE=1$ , 如图2, 直接写出点  $F$  到  $BC$  边的距离;
  - (3) 若  $\triangle CEF$  为直角三角形, 直接写出  $CE$  所有值.
4. (2022 春•大埔县期中) 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ,  $AD=16$ ,  $AB=6$ ,  $BC=24$ . 点  $P$  从点  $A$  沿  $AD$  运动到点  $D$ , 每秒移动  $a$  个单位, 同时点  $Q$  从点  $C$  沿  $CB$  运动到点  $B$ , 每秒移动  $b$  个单位. 运动时间为  $x$  秒. 若其中一点到达终点, 另一点也停止.

- (1) 请求出  $CD$  的值;
- (2) 若存在某时刻使  $DQ$  垂直平分  $PC$ , 求  $a:b$  的值;
- (3) 若  $a=1$ ,  $b=3$ , 何时  $PQ$  上存在点  $M$ , 使得  $\angle AMB=90^\circ$ .



5. (2022 春•庐阳区校级期中) 如图, 点  $E$  为正方形  $ABCD$  边  $BC$  延长线上的一个点, 连接  $AE$  交  $BD$  于点  $F$ 、交  $CD$  于点  $G$ .

(1) 求证:  $\frac{FG}{FA} = \frac{FA}{FE}$ ;

(2) 如图 2, 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 连接  $OE$  交  $CD$  于点  $H$ , 连接  $FH$ ;

①若  $FG=1$ ,  $FA=3$ , 求  $\tan \angle OEC$  的值;

②若  $FH \parallel AC$ , 求  $\frac{CH}{HG}$ .

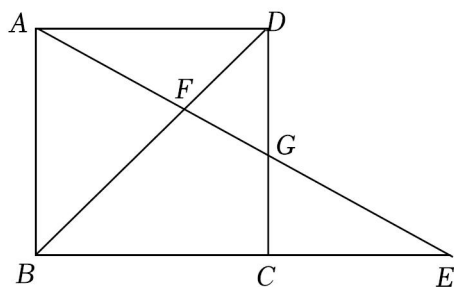


图1

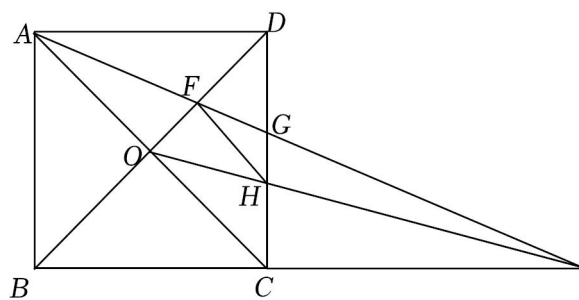


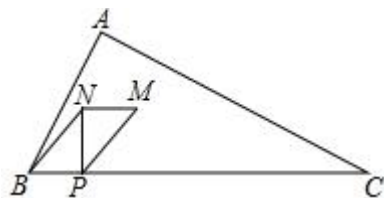
图2

6. (2022·安阳县一模) 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A=90^\circ$ ,  $AB=2$ ,  $\tan C=\frac{1}{2}$ , 动点  $P$  从点  $B$  出发以每秒 1 个单位长度的速度沿  $BC$  向终点  $C$  运动 (点  $P$  不与点  $B, C$  重合), 以  $BP$  为边在  $BC$  上方作等腰  $\text{Rt}\triangle BPN$ , 使  $P$  为直角顶点, 将  $\triangle BPN$  绕  $NP$  的中点旋转  $180^\circ$  得到  $\triangle MNP$ , 设四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分图形的面积为  $S$ , 点  $P$  的运动时间为  $t$  秒.

(1) 点  $M$  到  $BC$  的距离为 \_\_\_\_\_. (用含  $t$  的式子表示)

(2) 若线段  $MN$  与  $AC$  交于点  $E$ , 当  $t$  为何值时, 射线  $BE$  将四边形  $BPMN$  的面积分成 1:3 的两部分.

(3) 当四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分为四边形时, 求  $S$  与  $t$  的函数关系式. (不要求写出对应自变量取值范围)



7. (2022·泉州模拟) 在正方形  $ABCD$  中, 点  $G$  是边  $AB$  上的一个动点, 点  $F, E$  在边  $BC$  上,  $BF=FE=AG$ , 且  $AG \leq \frac{1}{2}AB$ ,  $GF, DE$  的延长线相交于点  $P$ .

(1) 如图 1, 当点  $E$  与点  $C$  重合时, 求  $\angle P$  的度数;

(2) 如图 2, 当点  $E$  与点  $C$  不重合时, 问: (1) 中  $\angle P$  的度数是否发生变化, 若有改变, 请求出  $\angle P$  的度数, 若不变, 请说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 作  $DN \perp GP$  于点  $N$ , 连接  $CN$ 、 $BP$ , 取  $BP$  的中点  $M$ , 连接  $MN$ ,

在点  $G$  的运动过程中, 求证:  $\frac{MN}{NC}$  为定值.

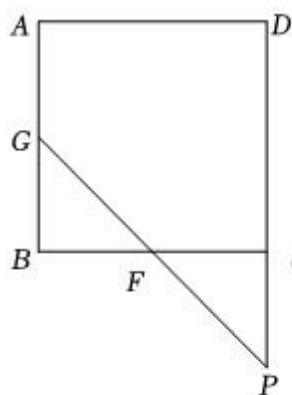


图1

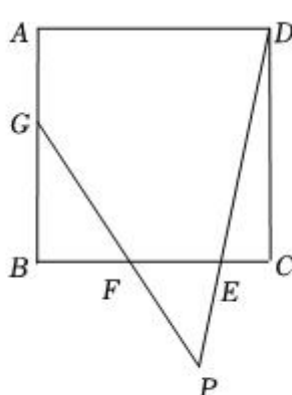


图2

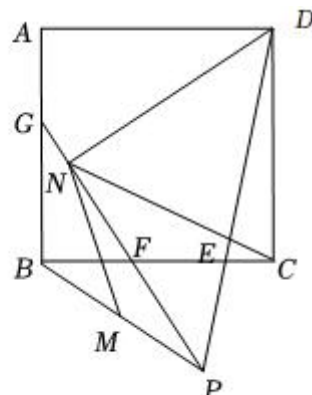


图3

8. (2021 秋·高新区期末) 如图 1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $AB=10$ ,  $BC=6$ .  $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  边的中点, 连接  $DE$ . 现将  $\triangle ADE$  绕  $A$  点逆时针旋转, 连接  $BD$ ,  $CE$  并延长交于点  $F$ .

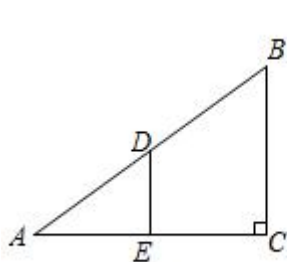


图1

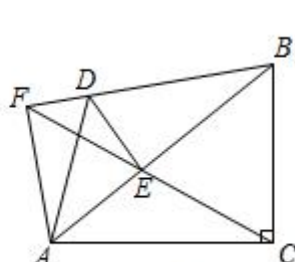


图2

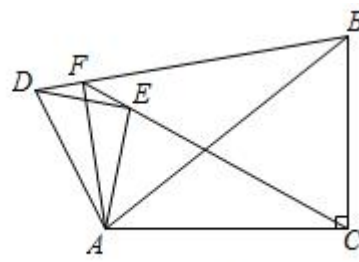


图3

(1) 如图 2, 点  $E$  正好落在  $AB$  边上,  $CF$  与  $AD$  交于点  $P$ .

①求证:  $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ ;

②求  $BF$  的长;

(2) 如图 3, 若  $AF$  恰好平分  $\angle DAE$ , 直接写出  $CE$  的长.

9. (2022·江阴市校级一模) (1) 【探究发现】如图①, 已知四边形  $ABCD$  是正方形, 点  $E$  为  $CD$  边上一点 (不与端点重合), 连接  $BE$ , 作点  $D$  关于  $BE$  的对称点  $D'$ ,  $DD'$  的延长线与  $BC$  的延长线交于点  $F$ , 连接  $BD'$ ,  $D'E$ .

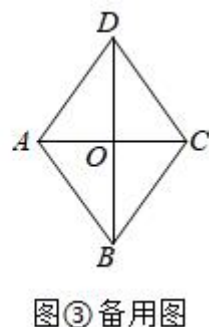
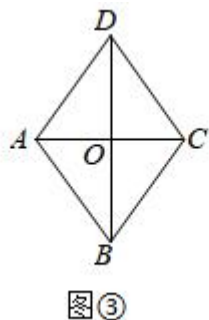
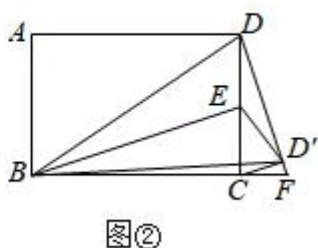
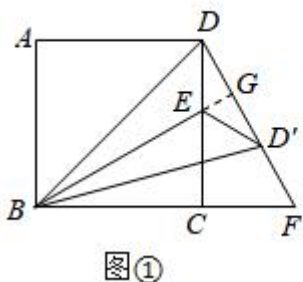
①小明探究发现: 当点  $E$  在  $CD$  上移动时,  $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ . 并给出如下不完整的证明过程, 请帮他补充完整.

证明: 延长  $BE$  交  $DF$  于点  $G$ .

②进一步探究发现, 当点  $D'$  与点  $F$  重合时,  $\angle CDF = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .

(2)【类比迁移】如图②，四边形  $ABCD$  为矩形，点  $E$  为  $CD$  边上一点，连接  $BE$ ，作点  $D$  关于  $BE$  的对称点  $D'$ ， $DD'$  的延长线与  $BC$  的延长线交于点  $F$ ，连接  $BD'$ ， $CD'$ ， $D'E$ 。当  $CD' \perp DF$ ， $AB=2$ ， $BC=3$  时，求  $CD'$  的长；

(3)【拓展应用】如图③，已知四边形  $ABCD$  为菱形， $AD=\sqrt{3}$ ， $AC=2$ ，点  $F$  为线段  $BD$  上一动点，将线段  $AD$  绕点  $A$  按顺时针方向旋转，当点  $D$  旋转后的对应点  $E$  落在菱形的边上（顶点除外）时，如果  $DF=EF$ ，请直接写出此时  $OF$  的长。



#### 10. (2021•武陟县模拟) 问题发现

如图 1，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle BED$  中， $AB=BC$ ， $BE=BD$ ， $\angle ABC=\angle EBD=60^\circ$ 。点  $D$  是  $\triangle ABC$  的外角  $\angle ACF$  的平分线上一点，连接  $AE$ 。

填空：①  $\frac{AE}{CD}$  的值是 \_\_\_\_\_；

② 直线  $AE$  与直线  $CD$  相交所成的较小角的度数是 \_\_\_\_\_；

#### (2) 类比探究

如图 2，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle EBD$  中， $\angle ABC=\angle EBD=90^\circ$ ， $\angle ACB=\angle EDB=60^\circ$ ，点  $D$  是  $\triangle ABC$  的外角  $\angle ACF$  的平分线上一点，连接  $AE$ 。请判断  $\frac{AE}{CD}$  的值及直线  $AE$  与直线  $CD$  相交所成的角的度数，并说明理由。

#### (3) 拓展延伸

在 (2) 的条件下，若  $AC=2$ ，请直接写出当  $\triangle ACD$  是直角三角形时  $AE$  的长。

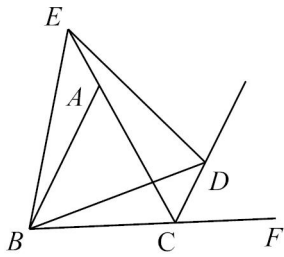


图1

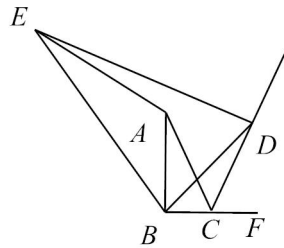
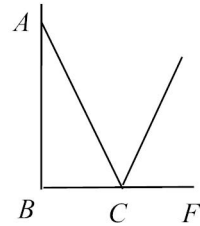


图2



备用图

11. (2021·祥符区二模) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中,  $BA=BC$ ,  $DA=DE$ 且 $\angle ABC=\angle ADE=\alpha$ , 点 $E$ 在 $\triangle ABC$ 的内部, 连接 $EC$ ,  $EB$ ,  $EA$ 和 $BD$ , 并且 $\angle ACE+\angle ABE=90^\circ$ .

【观察猜想】

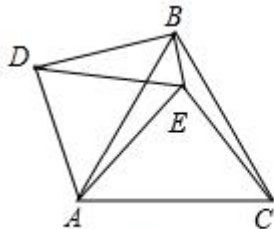
- (1) 如图①, 当 $\alpha=60^\circ$ 时, 线段 $BD$ 与 $CE$ 的数量关系为 \_\_\_\_\_, 线段 $EA$ ,  $EB$ ,  $EC$ 的数量关系为 \_\_\_\_\_.

【探究证明】

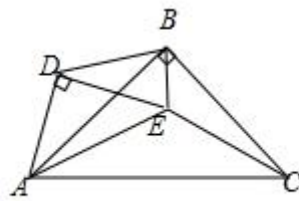
- (2) 如图②, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, (1)中的结论是否依然成立? 若成立, 请给出证明, 若不成立, 请说明理由;

【拓展应用】

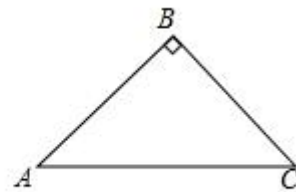
- (3) 在(2)的条件下, 当点 $E$ 在线段 $CD$ 上时, 若 $BC=2\sqrt{5}$ , 请直接写出 $\triangle BDE$ 的面积.



图①



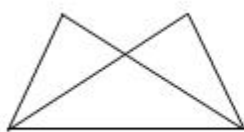
图②



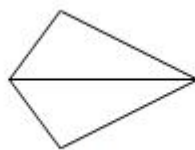
备用图

12. (2022·武进区校级模拟) 在同一平面内, 具有一条公共边且不完全重合的两个全等三角形, 我们称这两个三角形叫做“共边全等”.

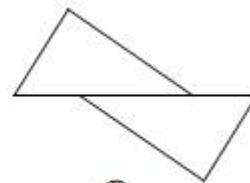
- (1) 下列图形中两个三角形不是“共边全等”是 \_\_\_\_\_;



①



②



③

- (2) 如图1, 在边长为6的等边三角形 $ABC$ 中, 点 $D$ 在 $AB$ 边上, 且 $AD=\frac{1}{3}AB$ , 点 $E$ 、

$F$  分别在  $AC$ 、 $BC$  边上，满足  $\triangle BDF$  和  $\triangle EDF$  为“共边全等”，求  $CF$  的长；

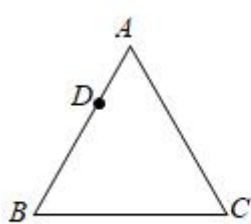


图1

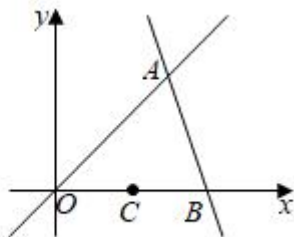
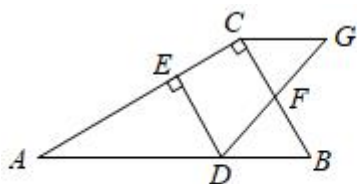


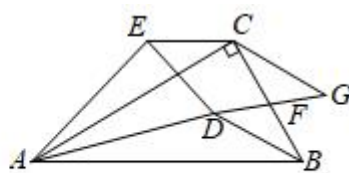
图2

(3) 如图 2，在平面直角坐标系中，直线  $y = -3x + 12$  分别与直线  $y = x$ 、 $x$  轴相交于  $A$ 、 $B$  两点，点  $C$  是  $OB$  的中点， $P$ 、 $Q$  在  $\triangle AOB$  的边上，当以  $P$ 、 $B$ 、 $Q$  为顶点的三角形与  $\triangle PCB$  “共边全等”时，请直接写出点  $Q$  的坐标。

13. (2021·河南模拟) 如图①， $\triangle ABC$  为直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，点  $D$  在  $AB$  边上，过点  $D$  作  $DE \perp AC$  于点  $E$ ，取  $BC$  边的中点  $F$ ，连接  $DF$  并延长到点  $G$ ，使  $FG = DF$ ，连接  $CG$ 。(如需作图或作辅助线，请先将原题草图画在对应题目的答题区域后再作答。)



图①



图②

问题发现：

(1) 填空： $CE$  与  $CG$  的数量关系是 \_\_\_\_\_，直线  $CE$  与  $CG$  所夹的锐角的度数为 \_\_\_\_\_。

探究证明：

(2) 将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  逆时针旋转，(1) 中的结论是否仍然成立，若成立，请仅就图②所示情况给出证明，若不成立，请说明理由；

问题解决：

(3) 若  $AB = 4$ ， $AD = 3$ ，将  $\triangle ADE$  由图①位置绕点  $A$  逆时针旋转  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，当  $\triangle ACE$  是直角三角形时，请直接写出  $CG$  的值。

14. (2020 秋·平顶山期末) 图形的旋转变换是研究数学相关问题的重要手段之一。小华和小芳对等腰直角三角形的旋转变换进行研究。如图 (1)，已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  均为等腰直角三角形，点  $D$ 、 $E$  分别在线段  $AB$ 、 $AC$  上，且  $\angle C = \angle AED = 90^\circ$ 。

(1) 观察猜想

小华将 $\triangle ADE$ 绕点 $A$ 逆时针旋转，连接 $BD$ ， $CE$ ，如图（2），当 $BD$ 的延长线恰好经过点 $E$ 时，

①  $\frac{BD}{CE}$ 的值为 \_\_\_\_\_；

②  $\angle BEC$ 的度数为 \_\_\_\_\_度；

（2）类比探究

如图（3），小芳在小华的基础上，继续旋转 $\triangle ADE$ ，连接 $BD$ ， $CE$ ，设 $BD$ 的延长线交 $CE$ 于点 $F$ ，请求出 $\frac{BD}{CE}$ 的值及 $\angle BFC$ 的度数，并说明理由．

（3）拓展延伸

若 $AE=DE=\sqrt{2}$ ， $AC=BC=\sqrt{10}$ ，当 $CE$ 所在的直线垂直于 $AD$ 时，请你直接写出 $BD$ 的长．

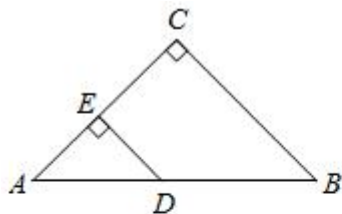


图 (1)

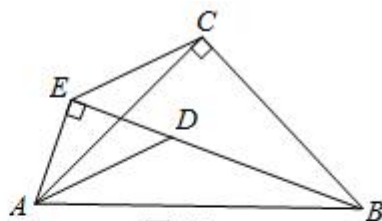


图 (2)

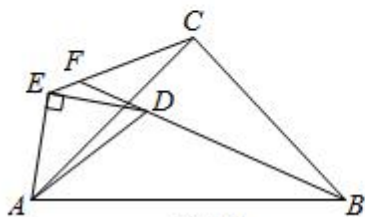
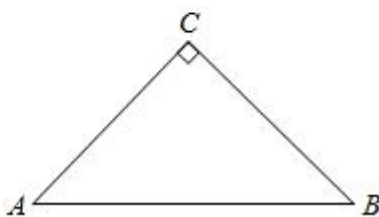


图 (3)



备用图

15. （2020•洛阳三模）（1）问题发现

如图 1， $\triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等边三角形，直线  $AD$  和直线  $BE$  交于点  $F$ ．

填空：①  $\angle AFB$  的度数是 \_\_\_\_\_；

② 线段  $AD$ ， $BE$  之间的数量关系为 \_\_\_\_\_．

（2）类比探究

如图 2， $\triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形， $\angle ABC = \angle DEC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ， $DE = EC$ ，直线  $AD$  和直线  $BE$  交于点  $F$ ．请判断  $\angle AFB$  的度数及线段  $AD$ ， $BE$  之间的数量关系，并说明理由．

（3）如图 3，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB = 5$ ，点  $D$  在  $AB$  边上， $DE$



$\perp AC$  于点  $E$ ， $AE=3$ ，将  $\triangle ADE$  绕着点  $A$  在平面内旋转，请直接写出直线  $DE$  经过点  $B$  时  $BD$  的长。

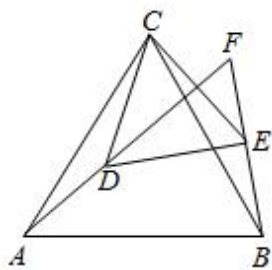


图1

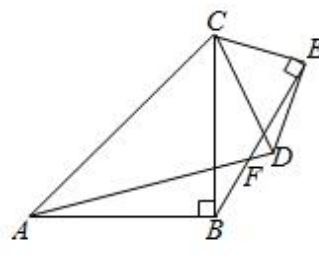


图2

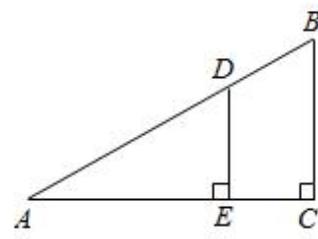


图3

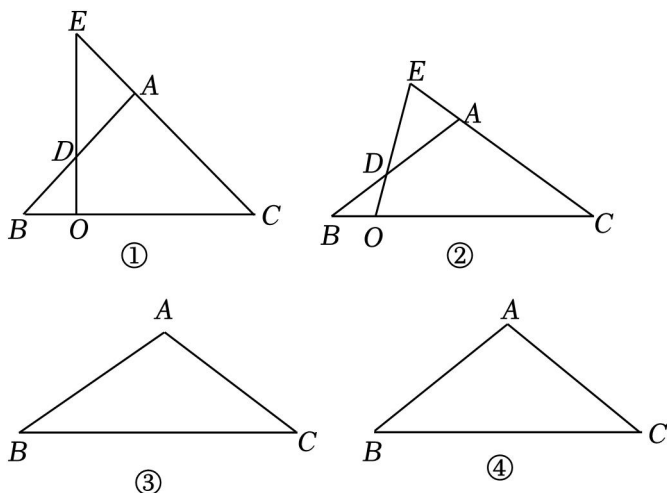
# 2023 年中考数学复习探究性试题汇编之相似三角形

参考答案与试题解析

## 一. 解答题 (共 15 小题)

### 1. (2023•深圳一模)【探究发现】

(1) 如图①所示, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, 点 $D$ ,  $O$ 分别为边 $BA$ ,  $BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 则有下列命题:



① $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ ;

② $\triangle EDA \sim \triangle ECO$ ;

③ $\triangle BDO \sim \triangle EDA$ ;

请你从中选择一个命题证明其真假, 并写出证明过程;

### 【类比迁移】

(2) 如图②所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC=5$ ,  $BC=8$ , 点 $D$ ,  $O$ 分别为边 $BA$ ,  $BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 若 $OB=2$ , 求 $AE$ 的值;

### 【拓展应用】

(3) 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC=a$ ,  $BC=b$ , ( $a < b < 2a$ ), 点 $D$ ,  $O$ 分别为射线 $BA$ ,  $BC$ 上一点, 且 $OB=OD$ , 延长 $OD$ 交射线 $CA$ 于点 $E$ , 当 $\triangle ADO$ 为等腰三角形时, 请直接写出 $OB$ 的长 (用 $a$ ,  $b$ 表示).

【考点】相似形综合题.

【专题】证明题; 等腰三角形与直角三角形; 几何直观.

【分析】(1) 选择①, 由等腰直角,  $\angle B = \angle C = 45^\circ$ ,  $\angle A = 90^\circ$ , 再由 $OD=OB$ , 得 $\angle B = \angle BDO = 45^\circ$ , 则 $\angle BDO = \angle BCA$ , 即可由相似三角形的判定得出结论;

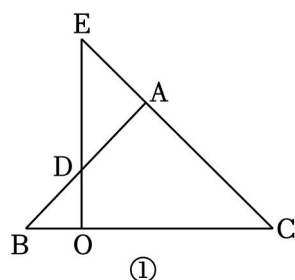
(2) 先证明, 得  $\frac{BD}{BC} = \frac{2}{5}$ , 所以  $BD = \frac{16}{5}$ ,  $AD = \frac{9}{5}$ , 再证明, 得  $\frac{EA}{EO} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{OC} = \frac{3}{10}$ ,

设  $EA = 3x$ , 则  $EO = 10x$ ,  $ED = 10x - 2$ , 代入  $\frac{ED}{EC} = \frac{3}{10}$  得:  $\frac{10x-2}{3x+5} = \frac{3}{10}$ , 解得:  $x = \frac{5}{13}$ ,

即可求解;

(3) 分两种情况: (I) 当点  $D$  在线段  $AB$  上时, (II) 当点  $D$  在线段  $AB$  延长线上时, 分别求解即可.

【解答】解: (1) 选择①, 是真命题.



证明:  $\because \triangle ABC$  为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ, \angle A = 90^\circ,$$

又  $\because OD = OB$ ,

$$\therefore \angle B = \angle BDO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BDO = \angle BCA,$$

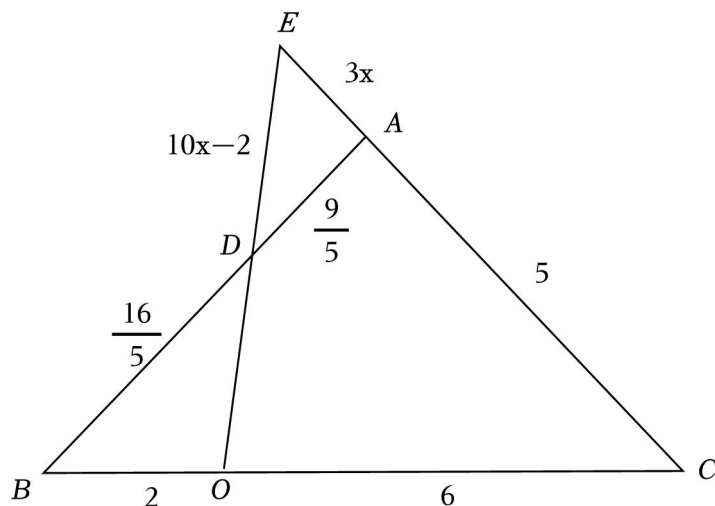
$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDO \sim \triangle BCA.$$

②③都是真命题.

同理可证②, ③.

(2) 如图②,



$$\therefore \frac{OD}{AB} = \frac{OB}{AC} = \frac{2}{5}, \quad \angle OBD = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BDO \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{2}{5}, \quad \angle BDO = \angle C,$$

$$\therefore BD = \frac{16}{5}, \quad AD = \frac{9}{5},$$

$$\therefore \angle EDA = \angle BDO,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle C,$$

$$\text{又} \because \angle E = \angle E,$$

$$\therefore \triangle EDA \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{EA}{EO} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{OC} = \frac{3}{10},$$

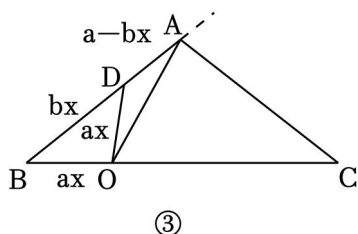
$$\text{设 } EA = 3x, \text{ 则 } EO = 10x, \quad ED = 10x - 2, \text{ 代入 } \frac{ED}{EC} = \frac{3}{10} \text{ 得: } \frac{10x-2}{3x+5} = \frac{3}{10},$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{13},$$

$$\therefore AE = 3x = \frac{15}{13}.$$

$$(3) \quad OB_1 = \frac{a^2}{a+b} \text{ 或 } OB_2 = \frac{a^2}{b-a} \text{ 或 } OB_3 = \frac{a^2 b}{b^2 - a^2}.$$

解: (I) 如图③, 当点  $D$  在线段  $AB$  上时,



$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C;$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDO;$$

$$\therefore \angle BDO = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

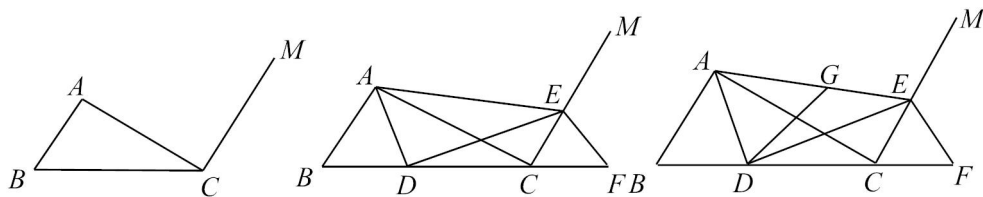
$$\therefore \triangle BDO \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{即 } \frac{OD}{a} = \frac{DB}{b},$$



//AB, D 为线段 BC 上的一动点且和 B, C 不重合, 联结 DA, 过点 D 作  $DE \perp DA$  交射线 CM 于点 E, 联结 AE, 作  $EF = EC$ , 交 BC 的延长线于点 F, 设  $BD = x$ .

- (1) 如图 1, 当  $AD \parallel EF$ , 求 BD 的长;
- (2) 若  $CE = y$ , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 如图 2, 点 G 在线段 AE 上, 作  $\angle AGD = \angle F$ , 若  $\triangle DGE$  与  $\triangle CDE$  相似, 求 BD 的长.



【考点】相似形综合题.

【专题】图形的全等; 图形的相似; 解直角三角形及其应用; 运算能力; 推理能力.

【分析】(1) 可推出  $\triangle ABD$  是等腰三角形, 从而求得 BD;

(2) 作  $AK \perp BC$  于 K,  $EH \perp CF$  于 H, 可证得  $\triangle AKD \sim \triangle DHE$ , 可求得  $AK = 8$ ,  $DK = x - 6$ ,  $EH = \frac{4}{5}y$ ,  $DH = 34 - x + \frac{3}{5}y$ , 进一步求得结果;

(3) 推出可以是  $\triangle GDE \sim \triangle CDE$  或  $\triangle GDE \sim \triangle CED$ , 当  $\triangle GDE \sim \triangle CDE$  时, 可推出  $\triangle GDE \cong \triangle CDE$  及  $\triangle ABD \cong \triangle AGD$ , 进而求得此时 BD 的值; 当  $\triangle GDE \sim \triangle CED$  时, 推出四边形 ADFED 是平行四边形, 再根据  $\triangle AKD \sim \triangle DTE$ , 进而求得此时 BD.

【解答】解: (1) 如图 1,

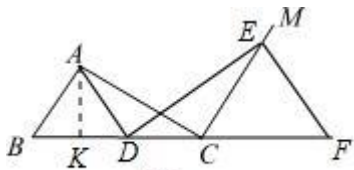


图1

作  $AK \perp BC$  于 K,

$$\therefore BK = AB \cdot \cos \angle ABC = 10 \times \frac{3}{5} = 6,$$

$$\therefore AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\because EF = EC,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle F,$$

$$\because CM \parallel AB, AD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle B = \angle ECF, \quad \angle ADB = \angle F,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore BD = 2BK = 12;$$

(2) 如图 2,

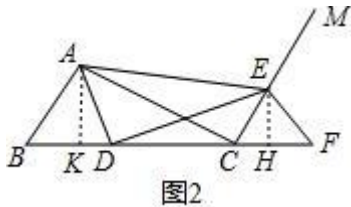


图2

作  $AK \perp BC$  于  $K$ ,  $EH \perp CF$  于  $H$ ,

$$\therefore \angle ADK = \angle CHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADK + \angle DAK = 90^\circ,$$

$$\because AD \perp DE,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADK + \angle EDH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAK = \angle EDH,$$

$$\therefore \triangle AKD \sim \triangle DHE,$$

$$\therefore \frac{AK}{DK} = \frac{DH}{EH},$$

$$\because BD = x, \quad BK = 6, \quad BC = 34,$$

$$\therefore DK = x - 6, \quad DC = 34 - x,$$

$$\because \angle ECF = \angle ABD,$$

$$\therefore CH = CE \cdot \cos \angle ECF = y \cdot \cos \angle ABD = \frac{3}{5}y,$$

$$\therefore EH = \frac{4}{5}y,$$

$$\therefore DH = DC + CH = 34 - x + \frac{3}{5}y,$$

$$\therefore \frac{8}{x-6} = \frac{34-x+\frac{3}{5}y}{\frac{4}{5}y},$$

化简, 得,

$$y = \frac{5x^2 - 200x + 1020}{3x - 50},$$

当  $\angle HDE = \angle ECF$  时,  $DE \parallel CE$ ,

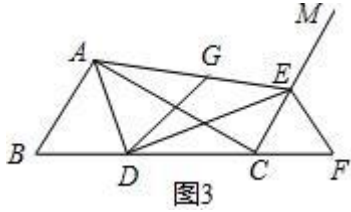
$$\therefore \angle DAK = \angle ECH = \angle ABD,$$

$$\therefore DK = AK \cdot \tan \angle DAK = 8 \cdot \tan \angle ABK = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3},$$

$$\text{此时, } BD = BK + DK = 6 + \frac{32}{3} = \frac{50}{3},$$

$$\therefore 6 < x < \frac{50}{3};$$

(3) 如图 3,



$$\because \angle AGD = \angle F, \quad \angle AGD + \angle DGE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DGE + \angle F = 180^\circ,$$

$$\because \angle ECF + \angle DCE = 180^\circ,$$

$$\angle F = \angle ECF,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle DCE,$$

$$\therefore \triangle GDE \sim \triangle CDE \text{ 或 } \triangle GDE \sim \triangle CED,$$

当  $\triangle GDE \sim \triangle CDE$  时,

$$\angle GDE = \angle CDE,$$

$$\because DE = DE,$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle GDE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DG = DC,$$

$$\because \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle EDC = \angle ADG + \angle GDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADG,$$

$$\because \angle ABD = \angle ECF = \angle F,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle AGD,$$

$$\because AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AGD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DB = DG,$$





(2) 若  $BE=1$ ，如图 2，直接写出点  $F$  到  $BC$  边的距离；

(3) 若  $\triangle CEF$  为直角三角形，直接写出  $CE$  所有值.

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；分类讨论；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；图形的相似；运算能力；推理能力.

【分析】(1) 由折叠的性质得  $BE=FE$ ， $AF=AB=5$ ，设  $BE=FE=x$ ，则  $CE=3-x$ ，然后在  $\text{Rt}\triangle CEF$  中，由勾股定理得出方程，解方程即可；

(2) 过  $F$  作  $FG\perp BC$  于  $G$ ，延长  $GF$  交  $AD$  于  $H$ ，由折叠的性质得  $AF=AB=5$ ， $\angle AFE=\angle B=90^\circ$ ， $FE=BE=1$ ，再证  $\triangle EFG\sim\triangle FAH$ ，得  $AH=5FG$ ，设  $FG=x$ ，则  $BG=AH=5x$ ，然后在  $\text{Rt}\triangle EFG$  中，由勾股定理得出方程，解方程即可；

(3) 分三种情况，①  $\angle CFE=90^\circ$  时，② 点  $F$  在  $CD$  上， $\angle ECF=90^\circ$  时，③  $\angle CEF=90^\circ$  时，④ 点  $F$  在  $CD$  延长线上， $\angle ECF=90^\circ$  时，由折叠的性质和相似三角形的判定与性质分别求出  $CE$  的长即可.

【解答】解：(1)  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形，

$\therefore CD=AB=5$ ， $BC=AD=3$ ， $\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ ，

由折叠的性质得： $BE=FE$ ， $AF=AB=5$ ，

$\therefore DF=\sqrt{AF^2-AD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ ，

$\therefore CF=CD-DF=5-4=1$ ，

设  $BE=FE=x$ ，则  $CE=BC-BE=3-x$ ，

在  $\text{Rt}\triangle CEF$  中，由勾股定理得： $CF^2+CE^2=FE^2$ ，

即  $1^2+(3-x)^2=x^2$ ，

解得： $x=\frac{5}{3}$ ，

即线段  $BE$  的长为  $\frac{5}{3}$ ；

(2) 如图 2，过  $F$  作  $FG\perp BC$  于  $G$ ，延长  $GF$  交  $AD$  于  $H$ ，

则  $\angle FGE=90^\circ$ ，四边形  $ABGH$  是矩形，

$\therefore HG=AB=5$ ， $BG=AH$ ， $\angle AHF=90^\circ=\angle FGE$ ，

由折叠的性质得： $AF=AB=5$ ， $\angle AFE=\angle B=90^\circ$ ， $FE=BE=1$ ，

$\therefore \angle AFH+\angle EFG=90^\circ$ ，

$\because \angle AFH+\angle FAH=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle EFG = \angle FAH,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle FAH,$$

$$\therefore \frac{FG}{AH} = \frac{FE}{AF} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore AH = 5FG,$$

设  $FG = x$ , 则  $BG = AH = 5x$ ,

$$\therefore EG = BG - BE = 5x - 1,$$

在  $\text{Rt}\triangle EFG$  中, 由勾股定理得:  $x^2 + (5x - 1)^2 = 1^2$ ,

解得:  $x = \frac{5}{13}$  或  $x = 0$  (不符合题意舍去),

$$\therefore FG = \frac{5}{13},$$

即点  $F$  到  $BC$  边的距离为  $\frac{5}{13}$ ;

(3) 分三种情况:

①  $\angle CFE = 90^\circ$  时, 如图 3,

$$\because \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE + \angle CFE = 180^\circ,$$

$\therefore A, F, C$  三点共线,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore CD = AB = 5, \angle B = \angle D = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CAD, AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},$$

由折叠的性质得:  $AF = AB = 5, FE = BE, \angle AFE = \angle B = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle CFE = 90^\circ = \angle D, CF = AC - AF = \sqrt{34} - 5,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{CE}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34} - 5}{3},$$

$$\text{解得: } CE = \frac{34 - 5\sqrt{34}}{3};$$

② 点  $F$  在  $CD$  上,  $\angle ECF = 90^\circ$  时, 如图 4,

由 (1) 可知,  $BE = \frac{5}{3}$ ,

$$\therefore CE = BC - BE = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3};$$

③  $\angle CEF = 90^\circ$  时, 如图 5,

由折叠的性质得:  $\angle AEB = \angle AEF = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle ABE$  是等腰直角三角形,

$$\therefore BE = AB = 5,$$

$$\therefore CE = BE - BC = 5 - 3 = 2;$$

④ 点  $F$  在  $CD$  延长线上,  $\angle ECF = 90^\circ$  时, 如图 6,

由折叠的性质得:  $AF = AB = 5$ ,  $\angle AFE = \angle B = 90^\circ$ ,

$$\because \angle ADF = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore CF = CD + DF = 3 + 4 = 7,$$

$$\because \angle CFE + \angle CEF = 90^\circ, \quad \angle CFE + \angle DFA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle DFA,$$

$$\because \angle ECF = \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle DFA,$$

$$\therefore \frac{CE}{DF} = \frac{CF}{AD} = \frac{7}{3} = 3,$$

$$\therefore CE = 3DF = 12;$$

综上所述, 若  $\triangle CEF$  为直角三角形, 则  $CE$  的值为  $\frac{34-5\sqrt{34}}{3}$  或  $\frac{4}{3}$  或 2 或 12.

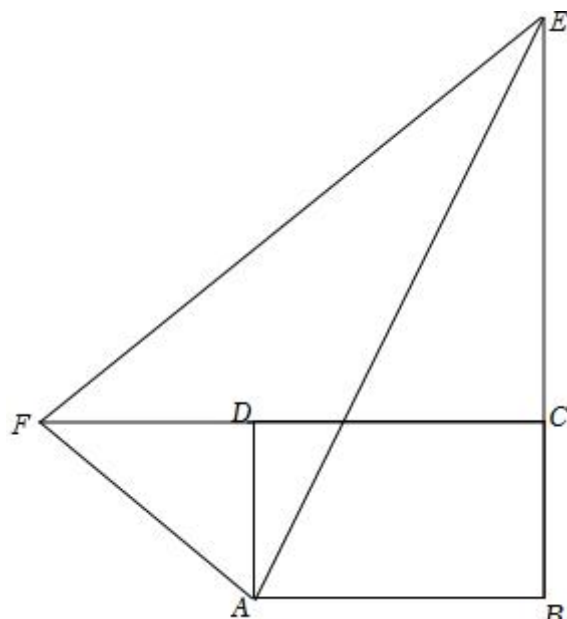


图 6

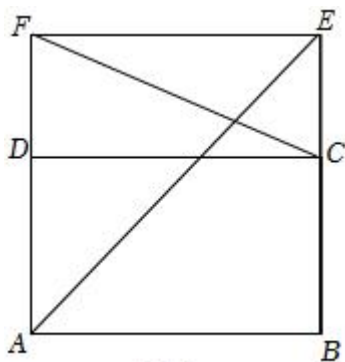


图 5

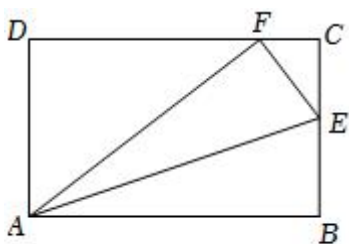


图 4

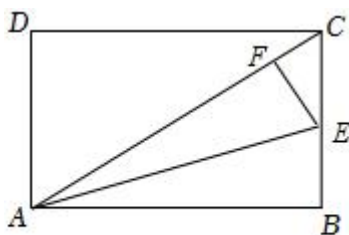


图 3

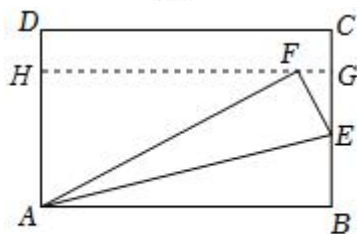


图 2

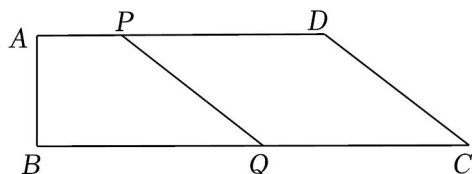
【点评】本题是四边形综合题目，考查了矩形的判定与性质、折叠的性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质以及分类讨论等知识，本题综合性强，熟练掌握矩形的性质和折叠的性质以及勾股定理是解题的关键，属于中考常考题型．

4. (2022 春•大埔县期中) 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $AD = 16$ ， $AB = 6$ ， $BC = 24$ ．点  $P$  从点  $A$  沿  $AD$  运动到点  $D$ ，每秒移动  $a$  个单位，同时点  $Q$  从点  $C$  沿  $CB$  运动到点  $B$ ，每秒移动  $b$  个单位．运动时间为  $x$  秒．若其中一点到达终点，另一点也停止．

(1) 请求出  $CD$  的值；

(2) 若存在某时刻使  $DQ$  垂直平分  $PC$ , 求  $a:b$  的值;

(3) 若  $a=1, b=3$ , 何时  $PQ$  上存在点  $M$ , 使得  $\angle AMB=90^\circ$ .



【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题; 图形的全等; 等腰三角形与直角三角形; 矩形 菱形 正方形; 圆的有关概念及性质; 与圆有关的位置关系; 运算能力; 推理能力.

【分析】(1) 过  $D$  作  $DH \perp BC$  于  $H$ , 则四边形  $ABHD$  是矩形, 得  $BH=AD=16, DH=AB=6$ , 则  $CH=BC-BH=8$ , 再由勾股定理求出  $CD$  的长;

(2) 设  $AP=ax, CQ=bx$ , 则  $DP=10-ax, BQ=24-bx$ , 若  $DQ$  垂直平分  $PC$ , 由线段垂直平分线的性质得  $PD=CD, PQ=CQ$ , 再证  $\triangle DPE \cong \triangle QCE$  (ASA), 得  $PD=CQ$ , 然后求出  $bx=10, ax=6$ , 即可得出结论;

(3) 以  $AB$  为直径作圆  $O$ , 若  $PQ$  上存在点  $M$ , 使得  $\angle AMB=90^\circ$ , 则  $PQ$  与圆  $O$  有公共点, 即  $PQ$  与圆  $O$  相交或相切, 当圆  $O$  与  $PQ$  相切于  $M$  时,  $OM \perp PQ, OM=OA=3$ , 易证  $AD, BC$  都是圆  $O$  的切线, 得出  $PM=PA=x, QM=QB=24-3x, \angle OPQ=\angle OPA, \angle OQP=\angle OQB$ , 再证明  $\angle POQ=90^\circ$ , 得出  $OM^2=MP \cdot MQ$  (射影定理), 即  $3^2=x(24-3x)$ , 解得  $x=4 \pm \sqrt{13}$ , 当圆  $O$  与  $PQ$  相交于  $M$  时,  $0 \leq x < 4 - \sqrt{13}$  或  $4 + \sqrt{13} < x \leq 8$ , 即可得出结果.

【解答】解: (1) 如图 1, 过  $D$  作  $DH \perp BC$  于  $H$ , 则四边形  $ABHD$  是矩形,

$$\therefore BH=AD=16, DH=AB=6,$$

$$\therefore CH=BC-BH=24-16=8,$$

在  $Rt\triangle CDH$  中, 由勾股定理得:  $CD=\sqrt{DH^2+CH^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ ;

(2) 由 (1) 得:  $CD=10$ ,

设  $AP=ax, CQ=bx$ ,

则  $DP=AD-AP=16-ax, BQ=BC-CQ=24-bx$ ,

设  $CP$  与  $DQ$  交于点  $E$ , 如图 2 所示:

$\because DQ$  垂直平分  $PC$ ,

$$\therefore PD=CD, PQ=CQ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DPE = \angle QCE,$$

在  $\triangle DPE$  和  $\triangle QCE$  中,

$$\begin{cases} \angle DPE = \angle QCE \\ PE = CE \\ \angle DEP = \angle QEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DPE \cong \triangle QCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PD = CQ,$$

$$\therefore PD = CD = PQ = CQ,$$

$$\therefore bx = 16 - ax = 10,$$

$$\therefore bx = 10, \quad ax = 6,$$

$$\therefore \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore a : b = 3 : 5;$$

$$(3) \because BC = 24, \quad b = 3,$$

$$\therefore x \leq 8,$$

如图, 以  $AB$  为直径作圆  $O$ ,

$$\because \angle AMB = 90^\circ,$$

$\therefore$  点  $M$  在圆  $O$  上,

若  $PQ$  上存在点  $M$ , 使得  $\angle AMB = 90^\circ$ , 则  $PQ$  与圆  $O$  有公共点,

$\therefore PQ$  与圆  $O$  相交或相切,

当圆  $O$  与  $PQ$  相切于  $M$  时,  $OM \perp PQ$ ,  $OM = OA = \frac{1}{2}AB = 3$ ,

$$\because \angle BAD = \angle ABQ = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp OA, \quad BC \perp OB,$$

$\therefore AD$ 、 $BC$  都是圆  $O$  的切线,

$$\therefore PM = PA = x, \quad QM = QB = 24 - 3x, \quad \angle OPQ = \angle OPA, \quad \angle OQP = \angle OQB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle APQ + \angle BQP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OPQ + \angle OQP = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POQ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\because OM \perp PQ,$$

$$\therefore OM^2 = MP \cdot MQ \text{ (射影定理)},$$

$$\text{即 } 3^2 = x(24 - 3x),$$

$$\text{解得: } x = 4 \pm \sqrt{13};$$

当圆  $O$  与  $PQ$  相交于  $M$  时,  $0 \leq x < 4 - \sqrt{13}$  或  $4 + \sqrt{13} < x \leq 8$ ;

综上所述,  $0 \leq x \leq 4 - \sqrt{13}$  或  $4 + \sqrt{13} \leq x \leq 8$  时,  $PQ$  上存在点  $M$ , 使得  $\angle AMB = 90^\circ$ .

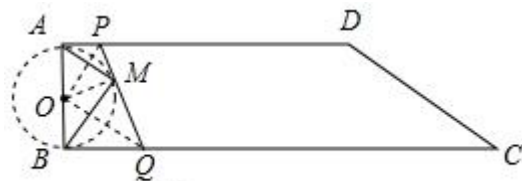


图 3

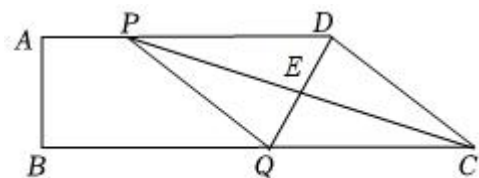


图 2

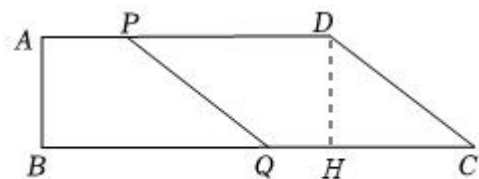


图 1

**【点评】** 本题是四边形综合题, 考查了矩形的判定与性质、勾股定理、垂直平分线的性质、全等三角形的判定与性质、切线的性质、圆周角定理、射影定理得知识; 本题综合性强, 特别是 (3) 通过作以  $AB$  为直径作圆, 得出  $PQ$  与圆  $O$  相交或相切时,  $\angle AMB = 90^\circ$  是解题的关键.

5. (2022 春·庐阳区校级期中) 如图, 点  $E$  为正方形  $ABCD$  边  $BC$  延长线上的一个点, 连接  $AE$  交  $BD$  于点  $F$ 、交  $CD$  于点  $G$ .

(1) 求证:  $\frac{FG}{FA} = \frac{FA}{FE}$ ;

(2) 如图 2, 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 连接  $OE$  交  $CD$  于点  $H$ , 连接  $FH$ ;

①若  $FG=1$ ,  $FA=3$ , 求  $\tan \angle OEC$  的值;

②若  $FH \parallel AC$ , 求  $\frac{CH}{HG}$ .



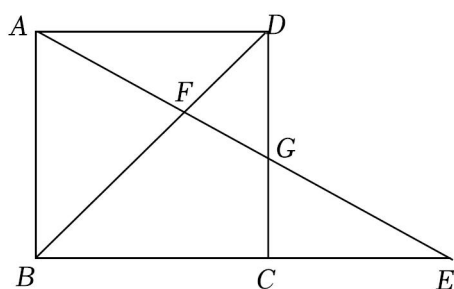


图1

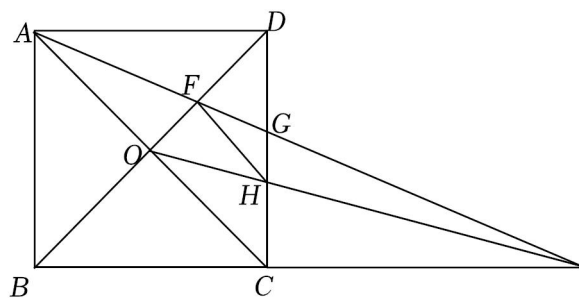


图2

【考点】相似形综合题.

【专题】代数几何综合题；推理能力.

【分析】(1) 先判断出  $\triangle ABF \cong \triangle CBF$  (SAS), 得出  $AF = CF$ ,  $\angle BAF = \angle BCF$ , 再判断出  $\angle DCF = \angle E$ , 由  $\angle CFG = \angle EFC$ , 得出  $\triangle CFG \sim \triangle EFC$ , 即可得出结论;

(2) ① 设  $DG = m$ , 得出  $AB = AD = BC = 3m$ , 进而得出  $BE = 3AD = 6m$ , 过点  $O$  作  $OM \perp BC$  于  $M$ , 得出  $OM = BM = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}m$ , 即可求出答案;

② 设  $DG = n$ ,  $AB = kn$ , 进而得出  $BE = kAD = k^2n$ , 进而得出  $CE = k(k-1)n$ , 同①的方法得,  $OM = BM = \frac{1}{2}kn$ , 得出  $EM = \frac{1}{2}kn(2k-1)$ , 再由  $OM \parallel CD$ , 得出  $\frac{CH}{OM} = \frac{CE}{EM}$ , 进而得出  $CH = \frac{k(k-1)n}{2k-1}$ ,  $HG = \frac{(k-1)^2n}{2k-1}$ , 再由  $FH \parallel AC$ , 得出  $\frac{HG}{HC} = \frac{FG}{AF}$ , 进而求出  $k$ , 即可求出答案.

【解答】(1) 证明: 如图 1,

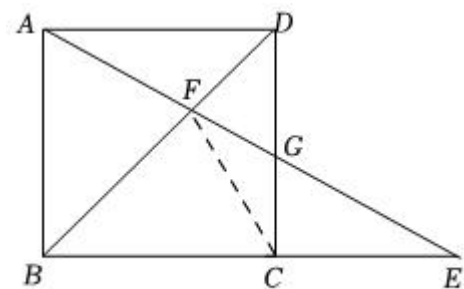


图1

连接  $CF$ ,

$\because BD$  是正方形  $ABCD$  的对角线,

$\therefore AD \parallel BC$ ,  $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ,  $AB = CB$ ,  $\angle ABF = \angle CBF$ ,

$\because BF = BF$ ,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF$  (SAS),

$$\begin{aligned}
&\therefore AF=CF, \quad \angle BAF=\angle BCF, \\
&\therefore \angle BAD - \angle BAF = \angle BCD - \angle BCF, \\
&\therefore \angle DAG = \angle DCF, \\
&\because AD \parallel BC, \\
&\therefore \angle DAG = \angle E, \\
&\therefore \angle DCF = \angle E, \\
&\because \angle CFG = \angle EFC, \\
&\therefore \triangle CFG \sim \triangle EFC, \\
&\therefore \frac{CF}{EF} = \frac{FG}{CF}, \\
&\therefore \frac{FG}{FA} = \frac{FA}{FE};
\end{aligned}$$

(2) 解：如图 2，过点  $O$  作  $OM \perp BC$  于  $M$ ，

$$\begin{aligned}
&\textcircled{1} \because \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形}, \\
&\therefore AD=BC=AB, \quad AD \parallel BC, \quad AB \parallel CD, \\
&\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{FG}{AF} = \frac{DF}{BF}, \\
&\text{设 } DG=m, \quad FG=1, \quad FA=3, \\
&\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{m}{AB} = \frac{1}{3}, \\
&\therefore AB=3m, \\
&\therefore AD=BC=3m, \\
&\because AD \parallel BC, \\
&\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3}, \\
&\therefore BE=3AD=9m, \\
&\because \text{点 } O \text{ 是正方形 } ABCD \text{ 的对角线的交点}, \\
&\therefore OM=BM=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}m, \\
&\text{在 Rt}\triangle OME \text{ 中, } EM=BE-BM=9m-\frac{3}{2}m=\frac{15}{2}m, \\
&\therefore \tan \angle OEC = \frac{OM}{EM} = \frac{\frac{3}{2}m}{\frac{15}{2}m} = \frac{1}{5};
\end{aligned}$$

② 设  $DG=n$ ,  $AB=kn$ ,

$\because AB \parallel CD$ ,

$$\therefore \frac{FG}{AF} = \frac{DG}{AB} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{k},$$

由 (1) 知,  $\frac{FG}{FA} = \frac{FA}{FE}$ ,

$$\therefore \frac{FA}{EF} = \frac{1}{k},$$

$\because AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{k},$$

$$\therefore BE = kAD = k^2n,$$

$$\therefore CE = BE - BC = k^2n - kn = k(k-1)n,$$

同①的方法得,  $OM = BM = \frac{1}{2}kn$ ,

$$\therefore EM = BE - BM = k^2n - \frac{1}{2}kn = \frac{1}{2}kn(2k-1),$$

$\because OM \parallel CD$ ,

$$\therefore \frac{CH}{OM} = \frac{CE}{EM},$$

$$\therefore \frac{CH}{\frac{1}{2}kn} = \frac{k(k-1)n}{\frac{1}{2}kn(2k-1)},$$

$$\therefore CH = \frac{k(k-1)n}{2k-1},$$

$$\therefore HG = CD - DG - CH = kn - n - \frac{k(k-1)n}{2k-1} = \frac{(k-1)^2n}{2k-1},$$

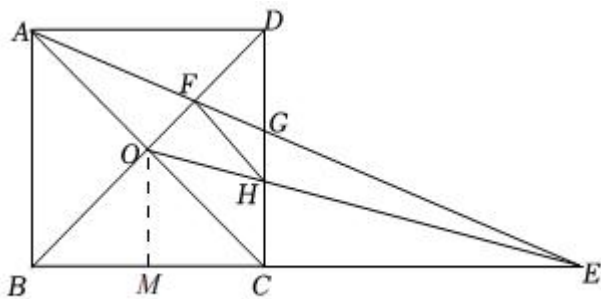
$\because FH \parallel AC$ ,

$$\therefore \frac{HG}{HC} = \frac{FG}{AF},$$

$$\therefore \frac{\frac{(k-1)^2n}{2k-1}}{\frac{k(k-1)n}{2k-1}} = \frac{1}{k},$$

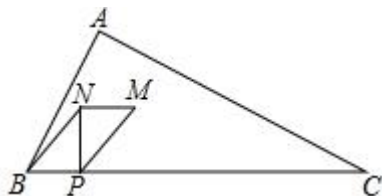
$$\therefore k=2,$$

$$\therefore \frac{CH}{HG} = \frac{AF}{FG} = k = 2.$$



【点评】此题是相似形综合题，主要考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例定理，作出辅助线构造出直角三角形是解本题的关键.

6. (2022•安阳县一模) 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A=90^\circ$ ,  $AB=2$ ,  $\tan C=\frac{1}{2}$ , 动点  $P$  从点  $B$  出发以每秒 1 个单位长度的速度沿  $BC$  向终点  $C$  运动 (点  $P$  不与点  $B, C$  重合), 以  $BP$  为边在  $BC$  上方作等腰  $\text{Rt}\triangle BPN$ , 使  $P$  为直角顶点, 将  $\triangle BPN$  绕  $NP$  的中点旋转  $180^\circ$  得到  $\triangle MNP$ , 设四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分图形的面积为  $S$ , 点  $P$  的运动时间为  $t$  秒.
- (1) 点  $M$  到  $BC$  的距离为      $t$     . (用含  $t$  的式子表示)
- (2) 若线段  $MN$  与  $AC$  交于点  $E$ , 当  $t$  为何值时, 射线  $BE$  将四边形  $BPMN$  的面积分成 1:3 的两部分.
- (3) 当四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分为四边形时, 求  $S$  与  $t$  的函数关系式. (不要求写出对应自变量取值范围)



**【考点】** 四边形综合题.

**【专题】** 几何综合题；模型思想；应用意识.

【分析】(1) 根据等腰直角三角形可得  $NP$  的长度, 再结合旋转的性质可判定四边形  $PDMN$  为矩形, 根据矩形的性质和点到直线的距离可得  $MD$  的长度为点  $M$  到  $BC$  的距离;

(2) 由射线  $BE$  将四边形  $BPMN$  的面积分成 1: 3 的两部分可得  $\triangle BEN$  为四边形  $BPMN$  面积的四分之一, 然后将涉及的边长表示出来, 利用相似三角形的性质即可求解;

(3) 分  $M$  接触  $AC$  前, 当  $M$  离开  $AC$ ,  $N$  接触  $AC$  前和当  $N$  离开  $AC$  后三种情况讨论, 计算即可;

**【解答】**解：（1）如图 1，过点  $M$  作  $MD \perp BC$  于点  $D$ ，

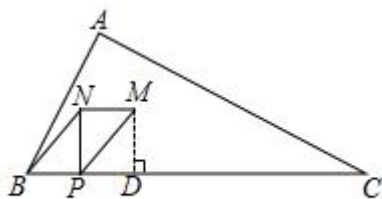


图 1

$\because$  等腰  $\text{Rt}\triangle BPN$ ,

$\therefore$  四边形  $PDMN$  为矩形,

$\because$  动点  $P$  从点  $B$  出发以每秒 1 个单位长度的速度沿  $BC$  向终点  $C$  运动, 点  $P$  的运动时间为  $t$  秒,

$\therefore MD = NP = BP = t$ ,

故答案为:  $t$ .

(2) 当点  $M$  落在  $AC$  上时,

$E$  点和  $M$  点重合,

此时射线  $BE$  将四边形  $BPMN$  的面积分成 1: 1 两部分,

如图 2, 过点  $E$  作  $EQ \perp BC$  于点  $Q$ ,

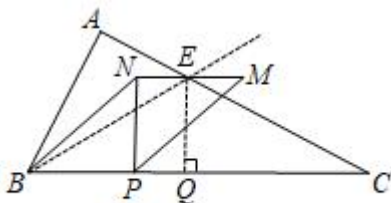


图 2

$\therefore EQ = NP = BP = t$ ,

$\because S_{\text{四边形 } BPMN} = BP \times NP = t^2$ ,

假设此时射线  $BE$  将四边形  $BPMN$  的面积分成 1: 3 两部分,

$\therefore S_{\triangle BNE} = \frac{1}{4} S_{\text{四边形 } BPMN}$ ,

$\because S_{\triangle BNE} = \frac{1}{2} \times NE \times NP$ ,

$\therefore NE = \frac{1}{2} t$ ,

$\therefore PQ = \frac{1}{2} t$ ,

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $\tan C = \frac{1}{2}$ ,

$$\therefore AC=4,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore CQ = BC - BP - PQ = 2\sqrt{5} - \frac{3}{2}t,$$

$$\because \tan C = \frac{EQ}{CQ} = \frac{t}{2\sqrt{5} - \frac{3}{2}t} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore t = \frac{4\sqrt{5}}{7},$$

(3) ①当点  $M$  接触  $AC$  前时,

四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分为平行四边形,

$$S_{\text{四边形 } BPMN} = BP \times NP = t^2,$$

$$\therefore S = t^2,$$

②当  $M$  离开  $AC$ ,  $N$  接触  $AC$  前时,

重叠部分为五边形, 不用计算;

③当  $N$  离开  $AC$  后,

如图 3, 设  $PM$ ,  $BN$  分别交  $AC$  于点  $F$ ,  $I$ , 过点  $F$ ,  $I$  分别作  $FG \perp BC$  于点  $G$ ,  $IJ \perp BC$  于点  $J$ , 过点  $F$  作  $FH \perp IJ$  于点  $H$ , 延长  $FH$  交  $BN$  于点  $K$ ,

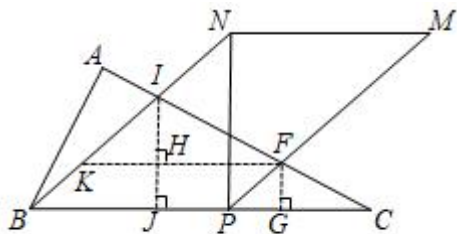


图 3

此时四边形  $BPMN$  与  $\triangle ABC$  重叠部分为四边形  $BPFI$ ,

设  $BJ=x$ , 则:

$$IJ=x,$$

$$\because \tan C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore JC = 2x,$$

$$\therefore BC = BJ + JC = 3x = 2\sqrt{5},$$

$$\text{解得: } x = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore IJ = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

设  $FG=y$ , 则:

$$PG=y, GC=2y,$$

$$\therefore PC=3y,$$

$$\because BP=t,$$

$$\therefore t+3y=2\sqrt{5},$$

$$\therefore y=\frac{2\sqrt{5}-t}{3},$$

$$\therefore HJ=FG=\frac{2\sqrt{5}-t}{3},$$

$$\therefore HI=IJ-HJ=\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2\sqrt{5}-t}{3}=\frac{t}{3},$$

$$\because KF=BP=t,$$

$$\therefore S_{\triangle KIF}=\frac{1}{2}\times KF\times HI=\frac{1}{2}\times t\times \frac{t}{3}=\frac{t^2}{6},$$

$$S_{\square BPFK}=BP\times FG=t\times \frac{2\sqrt{5}-t}{3}=\frac{2\sqrt{5}t-t^2}{3},$$

$$\because S_{\text{四边形} BPFK}=S_{\triangle KIF}+S_{\square BPFK}=\frac{t^2}{6}+\frac{2\sqrt{5}t-t^2}{3}=\frac{4\sqrt{5}t-t^2}{6},$$

$$\therefore S=\frac{4\sqrt{5}t-t^2}{6},$$

$$\text{综上, } S=t^2 \text{ 或 } S=\frac{4\sqrt{5}t-t^2}{6}.$$

【点评】本题考查相似三角形的性质与判定，解直角三角形，勾股定理，等腰直角三角形的性质，矩形的性质和判定，平行四边形的性质和判定等，解题的关键是能根据题意正确构造辅助线或画出对应图形进行分析，后两问要注意分类讨论思想的应用。

7. (2022•泉州模拟) 在正方形  $ABCD$  中，点  $G$  是边  $AB$  上的一个动点，点  $F$ 、 $E$  在边  $BC$  上， $BF=FE=AG$ ，且  $AG\leq\frac{1}{2}AB$ ， $GF$ 、 $DE$  的延长线相交于点  $P$ 。

(1) 如图 1，当点  $E$  与点  $C$  重合时，求  $\angle P$  的度数；

(2) 如图 2，当点  $E$  与点  $C$  不重合时，问：(1) 中  $\angle P$  的度数是否发生变化，若有改变，请求出  $\angle P$  的度数，若不变，请说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，作  $DN\perp GP$  于点  $N$ ，连接  $CN$ 、 $BP$ ，取  $BP$  的中点  $M$ ，连接  $MN$ ，

在点  $G$  的运动过程中，求证： $\frac{MN}{NC}$  为定值。

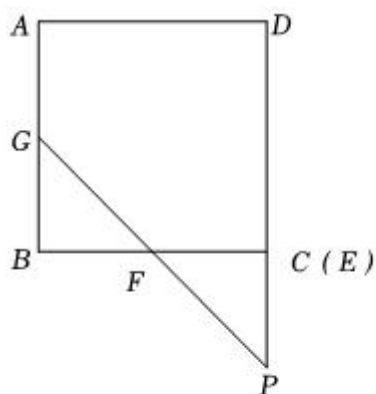


图1

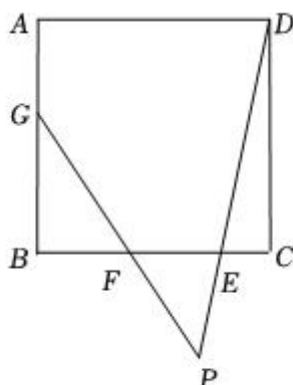


图2

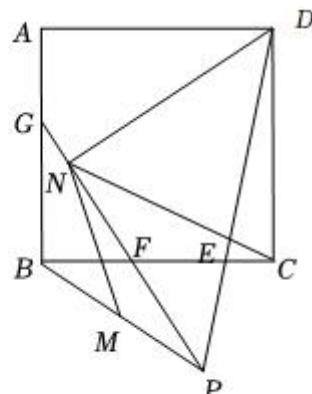


图3

【考点】四边形综合题.

【分析】(1) 属于基础问题, 根据图形性质求解即可.

(2) 利用辅助线构造正方形中常见的旋转型全等, 结合中位线得出结论.

(3) 本题辅助线是关键, 通过题目中给出的中点条件考虑可取其他中点结合中位线推导, 并找到一组旋转型相似的三角形, 进而解决问题.

【解答】解: (1)  $\because EF=BF=AG$ ,  $E$  与  $C$  重合,

$$\therefore BF=CF=BG=AG,$$

$$\therefore \angle BGF=45^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle P=\angle BGF=45^\circ.$$

(2) 不变. 理由如下:

如图所示, 连接  $BD$ ,

取  $BD$  中点  $O$ , 连接  $OG$ ,  $OF$ ,  $OC$ .

在正方形  $ABCD$  中, 有:

$$OC=OB, \angle OCF=\angle OBG=45^\circ,$$

$$\text{又} \because AG=BF,$$

$$\therefore BG=CF,$$

$$\therefore \triangle OCF \cong \triangle OBG \text{ (SAS)}.$$

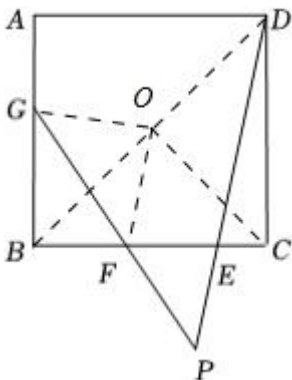
$$\therefore OG=OF, \angle COF=\angle BOG,$$

$$\therefore \angle GOF=\angle BOC=90^\circ,$$

$$\therefore \triangle GOF \text{ 为等腰直角三角形}.$$

又  $\because O, F$  分别是  $BD, BE$  的中点,



$$\therefore OF \parallel DE,$$
$$\therefore \angle P = \angle OFG = 45^\circ.$$


(3) 如图所示, 取  $DP$  中点  $O$ , 连接  $NQ$ ,  $BD$ ,  $MQ$ ,

由题意可得,  $\triangle DNP$  为等腰直角三角形,

$\because Q$  为  $DP$  中点,

$$\therefore NQ \perp DP.$$

设  $\angle CDP = \alpha$ , 则  $\angle NDC = 45^\circ + \alpha$ ,  $\angle BDP = 45^\circ - \alpha$ ,

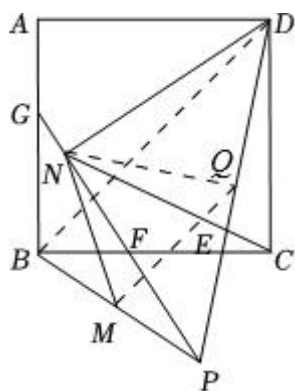
$\because M, Q$  分别是  $BP, DP$  的中点,

$$\therefore MQ \parallel BD,$$
$$\therefore \angle MQP = \angle BDP = 45^\circ - \alpha,$$
$$\therefore \angle NOM = 90^\circ - (45^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha,$$
$$\therefore \angle NQM = \angle NDC.$$
$$\text{又} \because \frac{MQ}{BD} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\therefore \frac{MQ}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又 $\because \triangle NQD$  为等腰直角三角形,

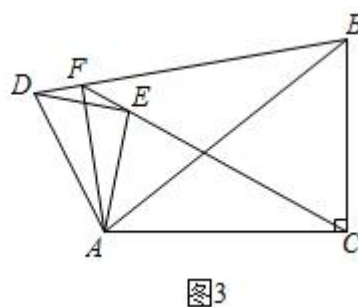
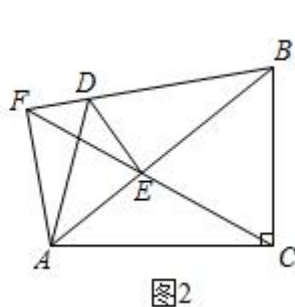
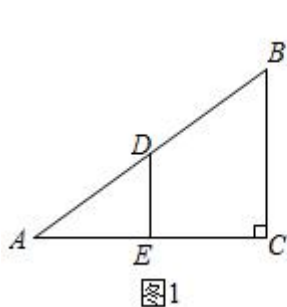
$$\therefore \frac{NQ}{ND} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\therefore \frac{NQ}{ND} = \frac{MQ}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\therefore \triangle NQM \sim \triangle NDC.$$
$$\therefore \frac{MN}{NC} = \frac{NQ}{ND} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore \frac{MN}{NC}$  为定值.



**【点评】** 本题属于难题，灵活选择辅助线并需要熟练掌握正方形的性质以及相似三角形模型是解题的关键.

8. (2021 秋·高新区期末) 如图 1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $AB=10$ ,  $BC=6$ .  $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  边的中点, 连接  $DE$ . 现将  $\triangle ADE$  绕  $A$  点逆时针旋转, 连接  $BD$ ,  $CE$  并延长交于点  $F$ .



(1) 如图 2, 点  $E$  正好落在  $AB$  边上,  $CF$  与  $AD$  交于点  $P$ .

①求证:  $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ ;

②求  $BF$  的长;

(2) 如图 3, 若  $AF$  恰好平分  $\angle DAE$ , 直接写出  $CE$  的长.

**【考点】** 相似形综合题.

**【专题】** 等腰三角形与直角三角形; 图形的相似; 解直角三角形及其应用; 运算能力; 推理能力.

**【分析】** (1) ①可证得  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ , 进而命题得证;

②作  $CG \perp AB$  于  $G$ , 作  $FH \perp AB$  于  $H$ , 可得  $BE=6$ , 解  $\text{Rt}\triangle BCG$  求得  $BG$ ,  $CG$ , 进而求得  $EG$ , 从而得出  $\tan \angle CEG$ , 于是设  $EH=a$ ,  $FH=2a$ ,  $BH=4a$ , 由  $BE=6$  可求得  $a$ ,

进而求得  $BF$ ;

(2) 当  $AF$  平分  $\angle DAE$  时,  $AF \perp BD$ , 可证得  $\angle EAH = \angle DEF = \angle DAF$ , 设  $AF$  与  $DE$  的交点为  $O$ , 作  $OG \perp AD$  于  $G$ , 作  $AH \perp CF$  于  $H$ , 设  $OG = OE$ , 在  $\text{Rt}\triangle DOG$  求得  $a$ , 然后解斜三角形  $ACE$ , 进而求得结果.

【解答】(1) ①证明:  $\because D、E$  分别是  $AB、AC$  边的中点,

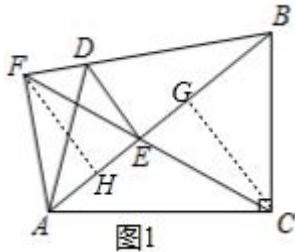
$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AE \cdot AB = AD \cdot AC;$$

②解: 如图 1,



作  $CG \perp AB$  于  $G$ , 作  $FH \perp AB$  于  $H$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB = 10$ ,  $BC = 6$ ,

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore AE = 4,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 6,$$

$$\because BG = BC \cdot \cos \angle ABC = 6 \cdot \frac{BC}{AB} = 6 \times \frac{6}{10} = \frac{18}{5},$$

$$CG = BC \cdot \sin \angle ABC = 6 \times \frac{8}{10} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore EG = BE - BG = 6 - \frac{18}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \tan \angle FEH = \tan \angle CEG = \frac{CG}{EG} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle FEH = \frac{FH}{EH} = 2,$$

设  $EH = a$ ,  $FH = 2a$ ,

$$\because \tan \angle FBE = \frac{FH}{BH} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BH=4a,$$

$$\because BH - EH = BE,$$

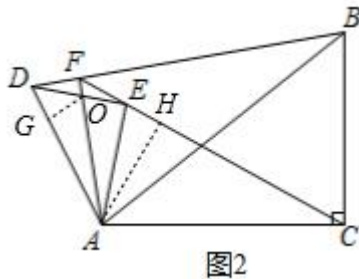
$$\therefore 4a - a = 6,$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore FH = 4, \quad BH = 8,$$

$$\therefore BF = \sqrt{FH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5};$$

(2) 如图 2,



当  $AF$  平分  $\angle DAE$  时,  $AF \perp BD$ ,

$$\therefore \angle AFD = \angle AED = 90^\circ,$$

$\therefore$  点  $A$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $D$  共圆,

$$\therefore \angle DEF = \angle DAF,$$

设  $AF$  与  $DE$  的交点为  $O$ , 作  $OG \perp AD$  于  $G$ , 作  $AH \perp CF$  于  $H$ ,

$\because AF$  平分  $\angle DAE$ ,

$$\therefore OG = OE, \quad AG = AE = 4,$$

$$\therefore DG = AD - AG = 1,$$

设  $OG = OE = x$ ,

$$\therefore OD = 3 - x,$$

在  $\text{Rt}\triangle DOG$  中,

$$(3 - x)^2 - x^2 = 1^2,$$

$$\therefore x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OG = OE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \tan \angle DAF = \frac{OG}{AG} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}, \quad \sin \angle DAF = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \angle DAF = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\because \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEH + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\because \angle AEH + \angle EAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle DEF = \angle DAF,$$

$$\therefore EH = AE \cdot \sin \angle EAH = 4 \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$AH = AE \cdot \cos \angle EAH = 4 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{6\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{310}}{5},$$

$$\therefore CE = EH + CH = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{310}}{5}.$$

**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，角平分线的性质等知识，解决问题的关键是找可解斜三角形。

9. (2022·江阴市校级一模) (1) **【探究发现】** 如图①，已知四边形  $ABCD$  是正方形，点  $E$  为  $CD$  边上一点（不与端点重合），连接  $BE$ ，作点  $D$  关于  $BE$  的对称点  $D'$ ， $DD'$  的延长线与  $BC$  的延长线交于点  $F$ ，连接  $BD'$ ， $D'E$ 。

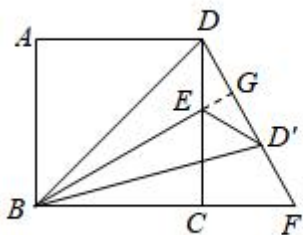
① 小明探究发现：当点  $E$  在  $CD$  上移动时， $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ 。并给出如下不完整的证明过程，请帮他补充完整。

证明：延长  $BE$  交  $DF$  于点  $G$ 。

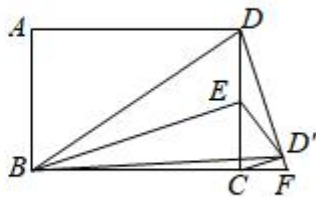
② 进一步探究发现，当点  $D'$  与点  $F$  重合时， $\angle CDF = \underline{22.5}^\circ$ 。

(2) **【类比迁移】** 如图②，四边形  $ABCD$  为矩形，点  $E$  为  $CD$  边上一点，连接  $BE$ ，作点  $D$  关于  $BE$  的对称点  $D'$ ， $DD'$  的延长线与  $BC$  的延长线交于点  $F$ ，连接  $BD'$ ， $CD'$ ， $D'E$ 。当  $CD' \perp DF$ ， $AB=2$ ， $BC=3$  时，求  $CD'$  的长；

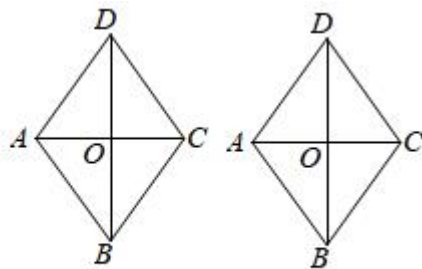
(3) **【拓展应用】** 如图③，已知四边形  $ABCD$  为菱形， $AD = \sqrt{3}$ ， $AC=2$ ，点  $F$  为线段  $BD$  上一动点，将线段  $AD$  绕点  $A$  按顺时针方向旋转，当点  $D$  旋转后的对应点  $E$  落在菱形的边上（顶点除外）时，如果  $DF=EF$ ，请直接写出此时  $OF$  的长。



图①



图②



图③

图③备用图

**【考点】** 四边形综合题。

【专题】图形的全等；矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；图形的相似；推理能力.

【分析】(1) ①延长  $BE$  交  $DF$  于点  $G$ ，则由对称可知  $\angle EGD = \angle EGD' = 90^\circ$ ，结合  $\angle DEG = \angle BEC$  得到  $\angle EBC = \angle EDF$ ，由正方形的性质得到  $\angle BCE = \angle DCF$ 、 $BC = DC$ ，从而证明  $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ ；

②当点  $D'$  与点  $F$  重合时，由对称可知  $\angle DBG = \angle D'BG = 22.5^\circ$ ，然后由①得到  $\angle EDF = \angle EBC = 22.5^\circ$ ；

(2) 延长  $BE$  交  $DF$  于点  $G$ ，由对称可知点  $G$  是  $DD'$  的中点、 $\angle EGD = \angle EGD' = 90^\circ$ ，结合  $CD' \perp DF$  得到  $CD' \parallel BG$ ，从而有  $EG$  是  $\triangle DCD'$  的中位线，得到点  $E$  是  $CD$  的中点，从而求得  $CE = DE = 1$ ，再由勾股定理求得  $BE$  的长；由 (1) ①得  $\angle EBC = \angle FDC$ ， $\angle ECB = \angle EGD = 90^\circ$  得到  $\triangle ECB \sim \triangle EGD$ ，进而借助相似三角形的性质求得  $EG$  的长，然后由中位线的性质求得  $CD'$  的长；

(3) 以点  $A$  为圆心， $AD$  的长为半径作圆弧，与  $CD$  和  $BC$  的交点即为点  $E$ ，然后分点  $E$  在  $CD$  上和点  $E$  在  $BC$  上讨论，延长  $AF$  交  $DE$  于点  $G$ ，然后借助 (1) (2) 的思路求解.

【解答】(1) ①证明：如图①，延长由对称可知， $\angle EGD = \angle EGD' = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DEG = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle EDF,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$$\therefore \angle BCE = \angle DCF = 90^\circ, \quad BC = DC,$$

在  $\triangle BCE$  和  $\triangle DCF$  中，

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle EDF \\ BC = CD \\ \angle BCE = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF \text{ (ASA)}.$$

②解：如图 1，当点  $D'$  与点  $F$  重合时，由对称可知  $\angle DBE = \angle D'BE$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle D'BE = 22.5^\circ,$$

由①得到  $\angle CDF = \angle EBD'$ ，

$$\therefore \angle CDF = 22.5^\circ,$$

故答案为： $22.5^\circ$  .

(2) 解: 如图 2, 延长  $BE$  交  $DF$  于点  $G$ ,

由对称可知, 点  $G$  是  $DD'$  的中点,  $\angle EGD = \angle EGD' = 90^\circ$ ,

$\because CD' \perp DF$ ,

$\therefore CD' \parallel BG$ ,

$\therefore EG$  是  $\triangle DCD'$  的中位线,

$\therefore$  点  $E$  是  $CD$  的中点,

$$\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

由 (1) ① 得,  $\angle EBC = \angle FDC$ ,  $\angle ECB = \angle EGD = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle ECB \sim \triangle EGD$ ,

$$\therefore \frac{EC}{EG} = \frac{BC}{DG} = \frac{BE}{ED},$$

$$\therefore \frac{1}{EG} = \frac{3}{DG} = \frac{\sqrt{10}}{1},$$

$$\therefore EG = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore BG = BE + EG = \sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{10},$$

$\because EG$  是  $\triangle DCD'$  的中位线,

$$\therefore CD' = 2EG = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

(3) 以点  $A$  为圆心,  $AD$  的长为半径作圆弧, 与  $CD$  和  $BC$  的交点即为点  $E$ ,

① 如图 3, 当点  $E$  在  $CD$  上时, 延长  $AF$  交  $DE$  于点  $G$ ,

由 (1) ① 可得,  $\angle GDF = \angle OAF$ , 且  $DF = EF$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  为菱形,

$\therefore AC \perp BD$ ,  $AO = CO$ ,  $\angle ODC = \angle ODA$ ,

$\therefore \angle OAF = \angle ODA$ ,

$\because AC = 2$ ,

$\therefore OA = 1$ ,

$\because AD = \sqrt{3}$ ,

$\therefore OD = \sqrt{2}$ ,

$$\therefore \tan \angle OAF = \tan \angle ODA = \frac{OA}{OD} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore OF = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

②如图4,当点E在BC上时,延长AF交DE于点G,则 $\angle AGD = 90^\circ$ ,  $\angle DAG = \angle EAG = \frac{1}{2}$

$$\angle DAE, DF = EF,$$

$$\because AD = AB = AE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABE,$$

$\because$  四边形ABCD是菱形,

$$\therefore \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABE, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle DAG,$$

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle BOA$ 中,

$$\begin{cases} \angle AGD = \angle BOA \\ \angle DAG = \angle ABO \\ AD = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AGD \cong \triangle BOA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DG = AO = 1, AG = BO = \sqrt{2},$$

$$\therefore DG = AO,$$

$$\because \angle FAO = \angle FDG, \angle FOA = \angle FGD,$$

$$\therefore \triangle FOA \cong \triangle FGD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OF = FG,$$

设 $OF = FG = x$ , 则 $DF = \sqrt{2} - x$ ,

在 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中,  $DF^2 = GF^2 + DG^2$ ,

$$\therefore (\sqrt{2} - x)^2 = x^2 + 1^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore OF = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

综上所述, OF的长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .



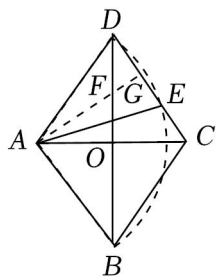


图3

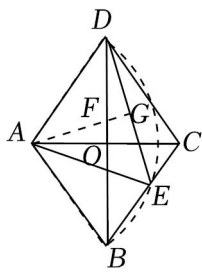


图4

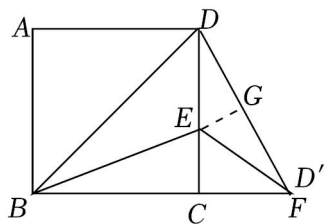


图1

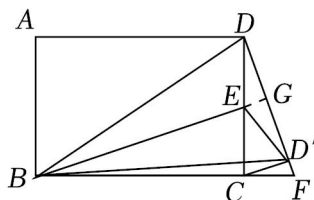


图2

【点评】本题考查了矩形的性质、轴对称的性质、旋转的性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形，解题的关键是通过菱形的性质和三角形的内角和定理得到 $\angle EBC = \angle EDF$ ，从而得到相似三角形或全等三角形，难度较大，需要学生学会利用前面所学的知识解答后面的题目，具有很强的综合性，是中考常考题型。

#### 10. (2021·武陵县模拟) 问题发现

如图1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BED$ 中， $AB=BC$ ， $BE=BD$ ， $\angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$ 。点D是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接AE。

填空：① $\frac{AE}{CD}$ 的值是 1；

②直线AE与直线CD相交所成的较小角的度数是  $60^\circ$ ；

#### (2) 类比探究

如图2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBD$ 中， $\angle ABC = \angle EBD = 90^\circ$ ， $\angle ACB = \angle EDB = 60^\circ$ ，点D是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACF$ 的平分线上一点，连接AE。请判断 $\frac{AE}{CD}$ 的值及直线AE与直线CD相交所成的角的度数，并说明理由。

#### (3) 拓展延伸

在(2)的条件下，若 $AC=2$ ，请直接写出当 $\triangle ACD$ 是直角三角形时AE的长。

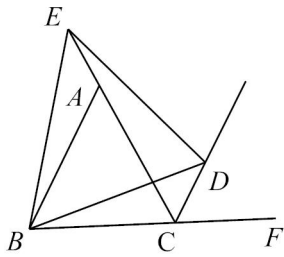


图1

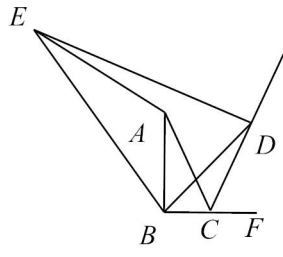
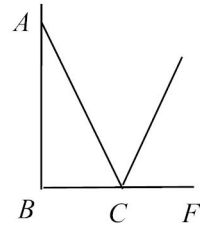


图2



备用图

【考点】三角形综合题.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】(1) ①证明 $\triangle EBA \cong \triangle DBC$  (SAS), 推出 $AE = CD$ , 可得结论;

②证明 $E, A, C$ 共线, 推出直线 $AE$ 与直线 $CD$ 相交所成的较小角的度数是 $60^\circ$ ;

(2) 结论: $\frac{AE}{CD} = \sqrt{3}$ , 直线 $AE$ 与直线 $CD$ 相交所成的较小角的度数是 $90^\circ$ . 如图2中, 延长 $EA$ 交 $CD$ 于点 $T$ , 设 $BD$ 交 $ET$ 于点 $J$ . 证明 $\triangle EAB \sim \triangle DBC$ , 推出 $\frac{AE}{CD} = \frac{EB}{DB} = \sqrt{3}$ ,  $\angle BEJ = \angle TDJ$ , 可得结论;

(3) 分两种情形: 如图3-1中, 当 $\angle ADC = 90^\circ$ 时, 如图3-2中, 当 $\angle DAC = 90^\circ$ 时, 分别求解即可.

【解答】解: (1) ①如图1中,

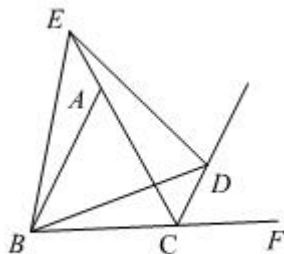


图1

$\because AB = BC, BE = BD, \angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle EBA = \angle DBC$ ,

$\therefore \triangle EBA \cong \triangle DBC$  (SAS),

$\therefore AE = CD$ ,

$\therefore \frac{AE}{CD} = 1$ ,

故答案为: 1;

② $\because CD$ 平分 $\angle ACF, \angle ACF = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$ ,

$$\therefore \angle DCF = \frac{1}{2} \angle ACF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ ,$$

$$\because \triangle EBA \cong \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle DCB = 120^\circ ,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle BAC = 180^\circ ,$$

$$\therefore E, A, C \text{ 共线},$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 与直线 } CD \text{ 相交所成的较小角的度数是 } 60^\circ .$$

故答案为:  $60^\circ$  ;

(2) 结论:  $\frac{AE}{CD} = \sqrt{3}$ , 直线  $AE$  与直线  $CD$  相交所成的较小角的度数是  $90^\circ$  .

理由: 如图 2 中, 延长  $EA$  交  $CD$  于点  $T$ , 设  $BD$  交  $ET$  于点  $J$ .

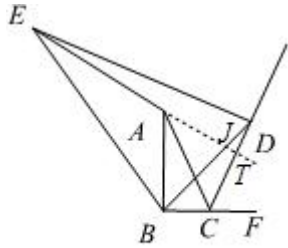


图2

$$\because \angle ABC = \angle EBD = 90^\circ , \quad \angle ACB = \angle EDB = 60^\circ ,$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}BD, \quad AB = \sqrt{3}BC, \quad \angle EBA = \angle DBC,$$

$$\therefore \frac{EB}{DB} = \frac{AB}{CB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle EAB \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{EB}{DB} = \sqrt{3}, \quad \angle BEJ = \angle TDJ,$$

$$\because \angle EJB = \angle DJT,$$

$$\therefore \angle DTJ = \angle EBJ = 90^\circ ,$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 与直线 } CD \text{ 相交所成的较小角的度数是 } 90^\circ .$$

(3) 如图 3 - 1 中, 当  $\angle ADC = 90^\circ$  时,  $E, A, D$  共线, 此时  $AE = AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ .

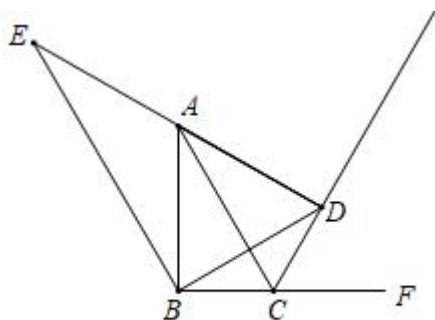


图3-1

如图 3 - 2 中，当  $\angle DAC = 90^\circ$  时， $CD = 2AC = 4$ ， $AE = \sqrt{3}CD = 4\sqrt{3}$ ，

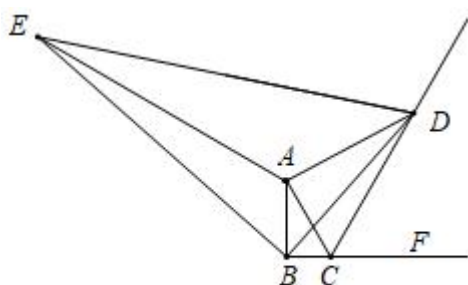


图3-2

综上所述，满足条件的  $AE$  的值为  $\sqrt{3}$  或  $4\sqrt{3}$ 。

**【点评】** 本题属于三角形综合题，考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题。

11. (2021·祥符区二模) 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  中， $BA = BC$ ， $DA = DE$  且  $\angle ABC = \angle ADE = \alpha$ ，点  $E$  在  $\triangle ABC$  的内部，连接  $EC$ ， $EB$ ， $EA$  和  $BD$ ，并且  $\angle ACE + \angle ABE = 90^\circ$ 。

**【观察猜想】**

- (1) 如图①，当  $\alpha = 60^\circ$  时，线段  $BD$  与  $CE$  的数量关系为  $BD = CE$ ，线段  $EA$ ， $EB$ ， $EC$  的数量关系为  $EA^2 = EB^2 + EC^2$ 。

**【探究证明】**

- (2) 如图②，当  $\alpha = 90^\circ$  时，(1) 中的结论是否依然成立？若成立，请给出证明，若不成立，请说明理由；

**【拓展应用】**

- (3) 在 (2) 的条件下，当点  $E$  在线段  $CD$  上时，若  $BC = 2\sqrt{5}$ ，请直接写出  $\triangle BDE$  的面积。



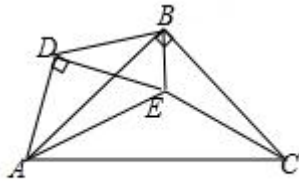
$$\because EA=DE, BD=EC,$$

$$\therefore EA^2=BE^2+EC^2.$$

故答案为  $BD=EC$ ,  $EA^2=EB^2+EC^2$ .

$$(2) \text{ 结论: } EA^2=EC^2+2BE^2.$$

理由: 如图②中,



图②

$$\because BA=BC, DA=DE. \text{ 且 } \angle ABC=\angle ADE=90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC, \triangle ADE$  都是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DAE=\angle BAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB=\angle EAC,$$

$$\because \frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \angle ACE=\angle ABD,$$

$$\because \angle ACE+\angle ABE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD+\angle ABE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE=90^\circ,$$

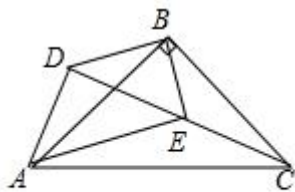
$$\therefore DE^2=BD^2+BE^2,$$

$$\because EA=\sqrt{2}DE, BD=\frac{\sqrt{2}}{2}EC,$$

$$\therefore \frac{1}{2}EA^2=\frac{1}{2}EC^2+BE^2,$$

$$\therefore EA^2=EC^2+2BE^2.$$

(3) 如图③中,



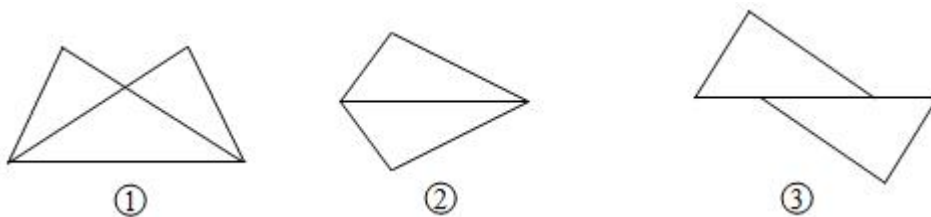
图③

$\because \angle AED = 45^\circ$  ,  $D, E, C$  共线,  
 $\therefore \angle AEC = 135^\circ$  ,  
 $\because \triangle ADB \sim \triangle AEC$  ,  
 $\therefore \angle ADB = \angle AEC = 135^\circ$  ,  
 $\because \angle ADE = \angle DBE = 90^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BDE = \angle BED = 45^\circ$  ,  
 $\therefore BD = BE$  ,  
 $\therefore DE = \sqrt{2}BD$  ,  
 $\because EC = \sqrt{2}BD$  ,  
 $\therefore AD = DE = EC$  , 设  $AD = DE = EC = x$  ,  
 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB = BC = 2\sqrt{5}$  ,  
 $\therefore AC = 2\sqrt{10}$  ,  
 在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中,  $\because AD^2 + DC^2 = AC^2$  ,  
 $\therefore x^2 + 4x^2 = 40$  ,  
 $\therefore x = 2\sqrt{2}$  (负根已经舍弃) ,  
 $\therefore AD = DE = 2\sqrt{2}$  ,  
 $\therefore BD = BE = 2$  ,  
 $\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$  .

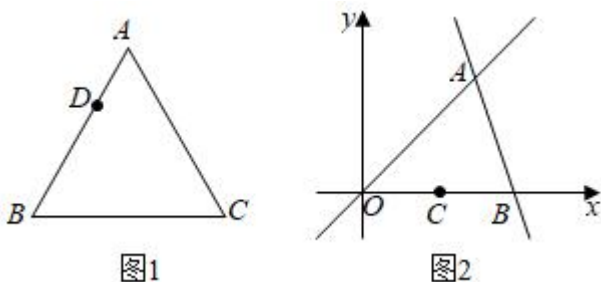
**【点评】** 本题属于三角形综合题，考查了等边三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，属于中考压轴题．

12. (2022•武进区校级模拟) 在同一平面内，具有一条公共边且不完全重合的两个全等三角形，我们称这两个三角形叫做“共边全等”．

(1) 下列图形中两个三角形不是“共边全等”是 ③；



(2) 如图 1, 在边长为 6 的等边三角形  $ABC$  中, 点  $D$  在  $AB$  边上, 且  $AD = \frac{1}{3}AB$ , 点  $E$ 、 $F$  分别在  $AC$ 、 $BC$  边上, 满足  $\triangle BDF$  和  $\triangle EDF$  为“共边全等”, 求  $CF$  的长;



(3) 如图 2, 在平面直角坐标系中, 直线  $y = -3x + 12$  分别与直线  $y = x$ 、 $x$  轴相交于  $A$ 、 $B$  两点, 点  $C$  是  $OB$  的中点,  $P$ 、 $Q$  在  $\triangle AOB$  的边上, 当以  $P$ 、 $B$ 、 $Q$  为顶点的三角形与  $\triangle PCB$  “共边全等”时, 请直接写出点  $Q$  的坐标.

【考点】一次函数综合题.

【专题】数形结合; 分类讨论; 几何直观; 运算能力.

【分析】(1) 由于第③个图不符合共边要求, 所以图③即为答案;

(2)  $DF$  为两个全等三角形的公共边, 由于  $F$  点在  $BC$  边上,  $E$  在  $AC$  边上, 两个三角形的位置可以如图②, 在公共边异侧, 构成一个轴对称图形, 也可以构成一个平行四边形 (将图③的两条最长边重合形成), 分两类讨论, 画出图形, 按照图②构图, 会得到一个一线三等角模型, 利用相似, 列出方程来解决, 按照平行四边形构图, 直接得到  $\triangle ADE$  为等边三角形, 计算边长即可求得;

(3) 由题目要求, 可以知道两个全等三角形的公共边为  $PB$  边, 由于要构成  $\triangle PCB$ , 所以  $P$  点只能在  $OA$  和  $OB$  边上, 当  $P$  在  $OA$  边上, 两个三角形可以在  $PB$  同侧, 也可以在  $PB$  异侧, 当在  $PB$  异侧构图时, 可以得到图 3 和图 4, 在图 3 中, 当在  $PB$  同侧构图时, 可以得到图 6, 当  $P$  在  $OB$  边上时,  $Q$  只能落在  $OA$  上, 得到图 7, 利用已知条件, 解三角形, 即可求出  $Q$  点坐标.

【解答】解: (1) ①②均符合共边全等的特点, 只有③, 没有公共边, 所以③不符合条件,



∴答案是③；

(2) ①如图 1，当 $\triangle BDF \cong \triangle EFD$ ，且是共边全等时，

$$\angle BFD = \angle EDF,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

∵ $\triangle ABC$  是等边三角形，

∴ $\triangle ADE$  是等边三角形，

$$\therefore AD = \frac{1}{3}AB = 2,$$

$$\therefore DE = AE = BF = 2,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 4,$$

②如图 2，当 $\triangle BDF \cong \triangle EDF$ ，且是共边全等时，

$$BD = DE = 6 - AD = 4,$$

$$\angle DEF = \angle B = 60^\circ, \quad EF = BF,$$

$$\therefore \angle AED + \angle FEC = 120^\circ,$$

$$\text{又 } \angle AED + \angle EDA = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle EDA,$$

$$\text{又 } \angle C = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle FEC \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{FC}{EA} = \frac{EC}{DA} = \frac{EF}{DE},$$

设  $CE = a$ ，则  $EF = 2a$ ，

$$\therefore \frac{6-2a}{6-a} = \frac{a}{2},$$

$$\text{解得 } a = 5 \pm \sqrt{13},$$

$$\therefore CE = 5 - \sqrt{13}, \quad EF = 10 - 2\sqrt{13},$$

$$\therefore CF = 6 - (10 - 2\sqrt{13}) = 2\sqrt{13} - 4,$$

综上所述， $CF = 4$  或  $2\sqrt{13} - 4$ ；

$$(3) \text{ 联立 } \begin{cases} y = -3x + 12 \\ y = x \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases},$$

$$\therefore A(3, 3),$$

$$\text{令 } y = -3x + 12 = 0, \text{ 得 } x = 4,$$

$$\therefore B(4, 0),$$

$$\therefore OB=4,$$

$\because C$  为  $OB$  中点,

$$\therefore OC=2,$$

$$\therefore C(2, 0),$$

由题可得,  $P$  点只能在边  $OA$  和  $OB$  上,

①  $P$  在  $OA$  上时, 如图 3,  $\triangle PBC \cong \triangle BPQ$ ,

$$\therefore \angle CPB = \angle QBP, CP = QB,$$

$$\therefore CP \parallel QB,$$

$\therefore$  四边形  $PCBQ$  为平行四边形,

$\because C$  为  $OB$  中点,

$\therefore P$  为  $OB$  中点,

又  $PQ \parallel OB$ ,

$\therefore Q$  为  $AB$  中点,

$$\therefore Q\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

② 当  $P$  在  $OA$  边上, 如图 4,  $\triangle PBC \cong \triangle PBQ$ ,

$$\therefore BQ = BC = 2,$$

如图 5, 过  $A$  作  $AD \perp OB$  于  $D$ , 则  $AD=3$ ,  $OD=3$ ,

$$\therefore BD = OB - OD = 1,$$

$$\therefore \tan \angle ABO = \frac{AD}{BD} = 3,$$

过  $Q$  作  $QE \perp OB$  于  $E$ ,

$$\therefore \tan \angle ABO = \frac{QE}{BE} = 3,$$

$\therefore$  设  $BE = a$ , 则  $QE = 3a$ ,

$$\therefore BE^2 + QE^2 = QB^2,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore 3a = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$OE = 4 - a = 4 - \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore Q\left(4 - \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right),$$

③当  $P$  在  $OA$  边上,  $Q$  在  $OA$  边上时, 如图 6,  $\triangle PBQ \cong BPC$ ,

$$\therefore PA = BC = 2, OP = PB = 4,$$

过  $P$  作  $PF \perp OB$  于  $F$ ,

$$\because \angle AOB = 45^\circ, OP = 4,$$

$$\therefore PF = OP = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

设  $Q(b, b)$ ,

$$\because PQ = 2,$$

$$\therefore \sqrt{2}(2\sqrt{2} - b) = 2,$$

$$\therefore b = \sqrt{2},$$

$$\therefore Q(\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

④当  $P$  在  $OB$  上,  $Q$  在  $OA$  上时,  $\triangle PBC \cong BPQ$ , 如图 7,

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle BPQ},$$

过  $C, Q$  分别作  $AB$  得垂线, 垂足分别为  $M, N$ ,

$$\therefore \frac{1}{2}CM \cdot BP = \frac{1}{2}QN \cdot BP, CM \parallel QN,$$

$$\therefore CM = QN,$$

$\therefore$  四边形  $CMNQ$  是平行四边形,

$\because C$  为  $OB$  中点,

$\therefore Q$  为  $AO$  中点,

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

综上所述,  $Q\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$  或  $\left(4 - \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$  或  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  或  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

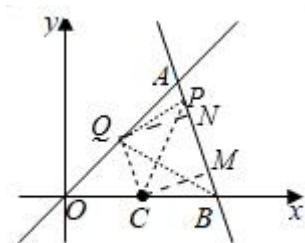


图7

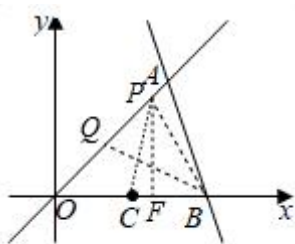


图6

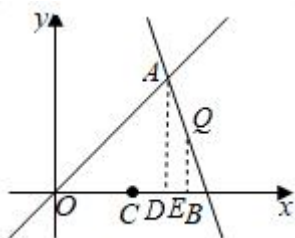


图5

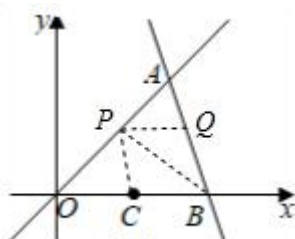


图4

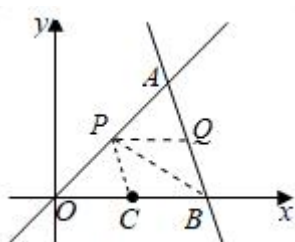


图3

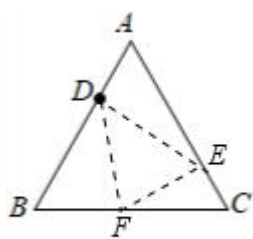


图2

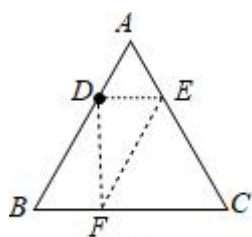
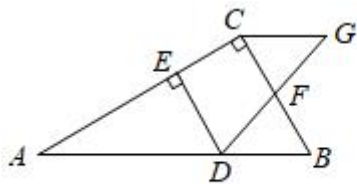


图1

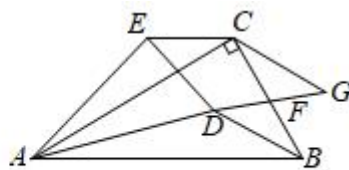
【点评】此题是一道一次函数和三角形的综合题，充分利用第一问的构图是此题的突破

口，当点所在的位置不确定时，要注意分类讨论，同时，利用已知数据解三角形是解决此题的基本能力要求。

13. (2021·河南模拟) 如图①， $\triangle ABC$  为直角三角形， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ，点  $D$  在  $AB$  边上，过点  $D$  作  $DE \perp AC$  于点  $E$ ，取  $BC$  边的中点  $F$ ，连接  $DF$  并延长到点  $G$ ，使  $FG=DF$ ，连接  $CG$ 。(如需作图或作辅助线，请先将原题草图画在对应题目的答题区域后再作答。)



图①



图②

问题发现：

- (1) 填空： $CE$  与  $CG$  的数量关系是  $EC = \frac{\sqrt{3}}{2}CG$ ，直线  $CE$  与  $CG$  所夹的锐角的度数为  $30^\circ$ 。

探究证明：

- (2) 将  $\triangle ADE$  绕点  $A$  逆时针旋转，(1) 中的结论是否仍然成立，若成立，请仅就图②所示情况给出证明，若不成立，请说明理由；

问题解决：

- (3) 若  $AB=4$ ， $AD=3$ ，将  $\triangle ADE$  由图①位置绕点  $A$  逆时针旋转  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，当  $\triangle ACE$  是直角三角形时，请直接写出  $CG$  的值。

【考点】几何变换综合题。

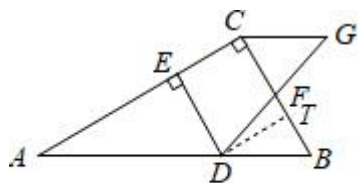
【专题】几何综合题；推理能力。

【分析】(1) 如图①中，过点  $D$  作  $DT \perp BC$  于  $T$ 。证明  $EC = CT = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$ ， $CG = BD$ ， $CG \parallel BD$ ，可得结论。

(2) 成立。理由如下：连接  $CD$ ， $BG$ ，延长  $BD$  交  $CE$  的延长线于  $H$ ，设  $BH$  交  $AC$  于点  $O$ 。利用相似三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质即可解决问题。

(3) 分两种情形：如图③-1 中，当  $\angle AEC = 90^\circ$  时，如图③-2 中，当  $\angle EAC = 90^\circ$  时，分别求解即可。

【解答】解：(1) 如图①中，过点  $D$  作  $DT \perp BC$  于  $T$ 。



图①

$\because DE \perp AC$ ,

$\therefore \angle DEC = \angle ECT = \angle DTC = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $ECTD$  是矩形,

$\therefore DT = EC$ ,  $DT \parallel AC$ ,

$\therefore \angle TDB = \angle A = 30^\circ$ ,

$\therefore DT = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$ ,

$\because FC = FB$ ,  $\angle CFG = \angle BFD$ ,  $FG = FD$ ,

$\therefore \triangle CFG \cong \triangle BFD$  ( $SAS$ ),

$\therefore CG = BD$ ,  $\angle FCG = \angle B = 60^\circ$ ,

$\therefore EC = \frac{\sqrt{3}}{2}CG$ ,

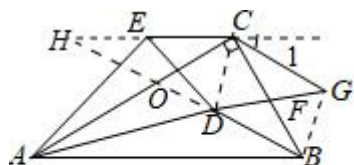
$\therefore \angle ACG = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ,

$\therefore$  直线  $CE$  与  $CG$  所夹的锐角的度数为  $30^\circ$ ,

故答案为:  $EC = \frac{\sqrt{3}}{2}CG$ ,  $30^\circ$ .

(2) 成立. 理由如下:

连接  $CD$ ,  $BG$ , 延长  $BD$  交  $CE$  的延长线于  $H$ , 设  $BH$  交  $AC$  于点  $O$ .



图②

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\angle BAC = \angle DAE = 30^\circ$ ,

$\therefore \cos \angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \angle EAD = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\angle EAC = \angle DAB$ ,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \angle ACE = \angle ABD,$$

$$\because \angle HOC = \angle AOB,$$

$$\therefore \angle H = \angle OAB = 30^\circ,$$

$$\because CF = FB, \quad DF = FG,$$

$$\therefore \text{四边形 } DCGB \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore CG = BD, \quad CG \parallel BH,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle H = 30^\circ,$$

$$\therefore EC = \frac{\sqrt{3}}{2}CG, \quad \text{直线 } CE \text{ 与 } CG \text{ 所夹的锐角的度数为 } 30^\circ.$$

(3) 如图③ - 1 中, 当  $\angle AEC = 90^\circ$  时, 由题意  $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2\sqrt{3}$ ,  $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

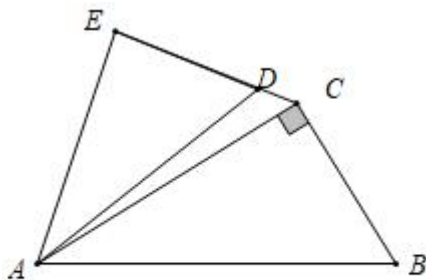


图 ③-1

$$\therefore EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\therefore CG = \frac{2\sqrt{3}}{3}EC = \sqrt{7},$$

如图③ - 2 中, 当  $\angle EAC = 90^\circ$  时, 可得  $EC = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,





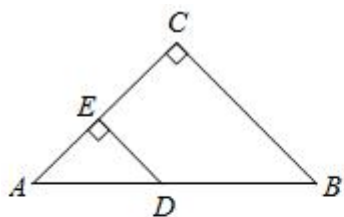


图 (1)

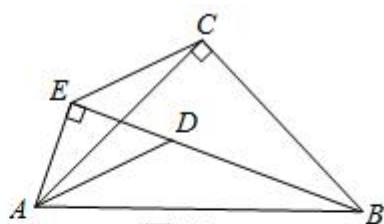


图 (2)

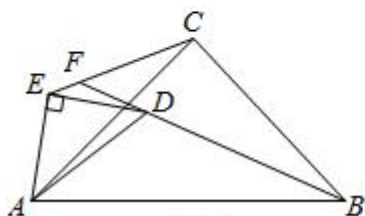
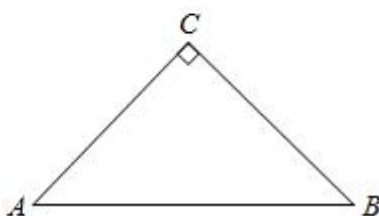


图 (3)



备用图

【考点】几何变换综合题.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】(1)如图(2)中,设  $AC$  交  $BE$  于点  $O$ . 证明  $\triangle DAB \sim \triangle EAC$ , 推出  $\frac{BD}{EC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$ ,  $\angle ABD = \angle ACE$ , 再证明  $\angle BAO = \angle CEO = 45^\circ$ , 可得结论.

(2)如图(3)中,设  $AC$  交  $BF$  于点  $O$ . 证明  $\triangle DAB \sim \triangle EAC$ , 可得结论.

(3)分两种情形:如图(4)-1中,当  $CE \perp AD$  于  $O$  时,如图(4)-2中,当  $EC \perp AD$  时,延长  $CE$  交  $AD$  于  $O$ . 分别求出  $EC$ , 可得结论.

【解答】解:(1)如图(2)中,设  $AC$  交  $BE$  于点  $O$ .

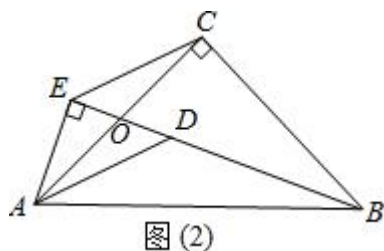


图 (2)

$\because \triangle AED, \triangle ABC$  都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle EAD = \angle CAB = 45^\circ$ ,  $AD = \sqrt{2}AE$ ,  $AB = \sqrt{2}AC$ ,

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$ ,

$\therefore \triangle DAB \sim \triangle EAC$ ,

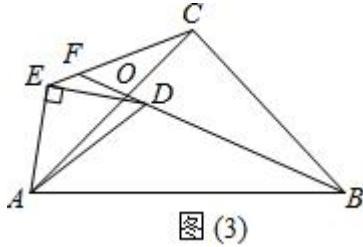
$\therefore \frac{BD}{EC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$ ,  $\angle ABD = \angle ACE$ ,

$\because \angle AOB = \angle EOC$ ,

$\therefore \angle BAO = \angle CEO = 45^\circ$ ,

故答案为： $\sqrt{2}$ ，45.

(2) 如图 (3) 中，设  $AC$  交  $BF$  于点  $O$ .



$\because \triangle AED, \triangle ABC$  都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle EAD = \angle CAB = 45^\circ$ ,  $AD = \sqrt{2}AE$ ,  $AB = \sqrt{2}AC$ ,

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$ ,

$\therefore \triangle DAB \sim \triangle EAC$ ,

$\therefore \frac{BD}{EC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$ ,  $\angle ABD = \angle ACE$ ,

$\because \angle AOB = \angle FOC$ ,

$\therefore \angle BAO = \angle CFO = 45^\circ$ ,

$\therefore \frac{BD}{EC} = \sqrt{2}$ ,  $\angle BFC = 45^\circ$ .

(3) 如图 (4) - 1 中，当  $CE \perp AD$  于  $O$  时，

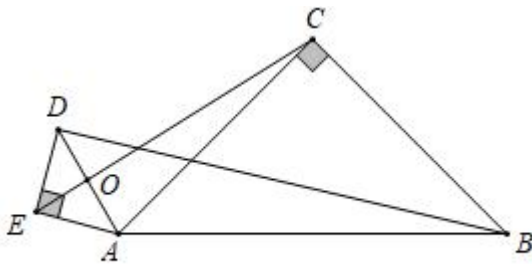


图 (4) - 1

$\because AE = DE = \sqrt{2}$ ,  $AC = BC = \sqrt{10}$ ,  $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore AD = \sqrt{2}AE = 2$ ,

$\because EO \perp AD$ ,

$\therefore OD = OA = OE = 1$ ,

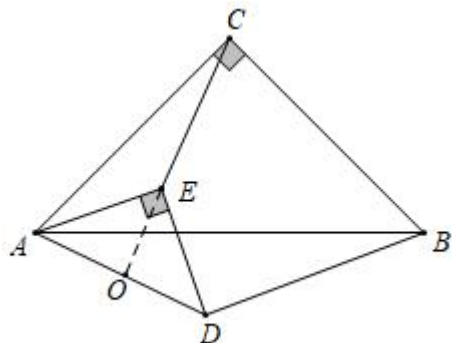
$\therefore OC = \sqrt{AC^2 - AO^2} = 3$ ,

$\therefore EC = OE + OC = 4$ ,

$$\because BD = \sqrt{2}EC,$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{2}.$$

如图(4)-2中, 当  $EC \perp AD$  时, 延长  $CE$  交  $AD$  于  $O$ .



图(4)-2

同法可得  $OD = OA = OE = 1$ ,  $OC = 3$ ,  $EC = 3 - 1 = 2$ ,

$$\therefore BD = \sqrt{2}EC = 2\sqrt{2},$$

综上所述,  $BD$  的长为  $4\sqrt{2}$  或  $2\sqrt{2}$ .

**【点评】** 本题属于几何变换综合题, 考查了等腰直角三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 属于中考压轴题.

#### 15. (2020•洛阳三模) (1) 问题发现

如图1,  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等边三角形, 直线  $AD$  和直线  $BE$  交于点  $F$ .

填空: ①  $\angle AFB$  的度数是  $60^\circ$ ;

② 线段  $AD$ ,  $BE$  之间的数量关系为  $AD = BE$ .

#### (2) 类比探究

如图2,  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ABC = \angle DEC = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $DE = EC$ , 直线  $AD$  和直线  $BE$  交于点  $F$ . 请判断  $\angle AFB$  的度数及线段  $AD$ ,  $BE$  之间的数量关系, 并说明理由.

(3) 如图3, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $AB = 5$ , 点  $D$  在  $AB$  边上,  $DE \perp AC$  于点  $E$ ,  $AE = 3$ , 将  $\triangle ADE$  绕着点  $A$  在平面内旋转, 请直接写出直线  $DE$  经过点  $B$  时  $BD$  的长.

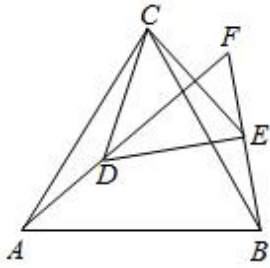


图1

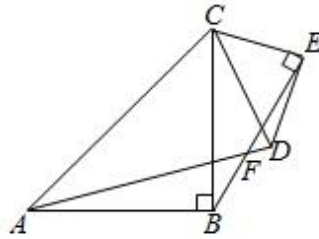


图2

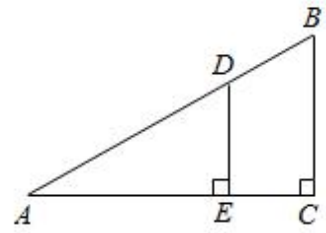


图3

【考点】几何变换综合题.

【专题】几何综合题；应用意识.

【分析】(1) 证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$  (SAS), 即可解决问题.

(2) 证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ , 可得 $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$ ,  $\angle CBF = \angle CAF$ , 由此可得结论.

(3) 分两种情形分别求解即可解决问题.

【解答】解: (1) 如图 1 中,

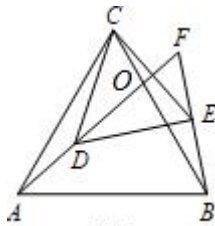


图 1

$\because \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等边三角形,

$\therefore CA = CB$ ,  $CD = CE$ ,  $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle ACD = \angle BCE$ ,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$  (SAS),

$\therefore AD = BE$ ,  $\angle ACD = \angle CBF$ ,

设  $BC$  交  $AF$  于点  $O$ .

$\because \angle AOC = \angle BOF$ ,

$\therefore \angle BFO = \angle ACO = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle AFB = 60^\circ$ ,

故答案为  $60^\circ$ ,  $AD = BE$ .

(2) 结论:  $\angle AFB = 45^\circ$ ,  $AD = \sqrt{2}BE$ .

理由: 如图 2 中,

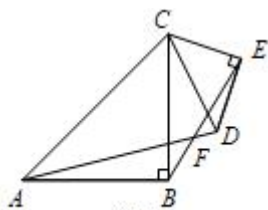


图 2

$$\because \angle ABC = \angle DEC = 90^\circ, \quad AB = BC, \quad DE = EC,$$

$$\therefore \angle ACD = 45^\circ + \angle BCD = \angle BCE, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}, \quad \angle CBF = \angle CAF,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}BE,$$

$$\because \angle AFB + \angle CBF = \angle ACB + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle ACB = 45^\circ.$$

(3) 如图 3 中,

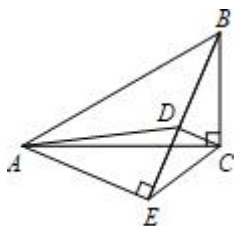


图 3

$$\because \angle AEB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore A, B, C, E \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CAB = 30^\circ, \quad \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because \angle FAE = \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EC = \frac{\sqrt{3}}{2}BD,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\because AE = 3, \angle DAE = 30^\circ,$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{3}AE = \sqrt{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 4,$$

$$\therefore BD = BE - DE = 4 - \sqrt{3},$$

如图 4 中，当  $D, E, B$  在同一直线上时，同法可知  $BD = DE + EB = 4 + \sqrt{3}$ ,

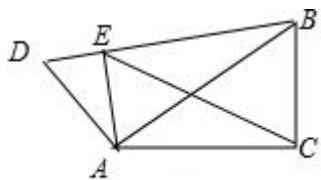


图4

综上所述， $BD = 4 + \sqrt{3}$  或  $4 - \sqrt{3}$ .

**【点评】** 本题考查几何变换综合题，考查了全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

# 考点卡片

## 1. 一次函数综合题

### (1) 一次函数与几何图形的面积问题

首先要根据题意画出草图，结合图形分析其中的几何图形，再求出面积.

### (2) 一次函数的优化问题

通常一次函数的最值问题首先由不等式找到  $x$  的取值范围，进而利用一次函数的增减性在前面范围内的前提下求出最值.

### (3) 用函数图象解决实际问题

从已知函数图象中获取信息，求出函数值、函数表达式，并解答相应的问题.

## 2. 三角形综合题

三角形综合题.

## 3. 四边形综合题

四边形综合题.

## 4. 几何变换综合题

几何变换综合题.

## 5. 相似形综合题

相似形综合题.