2023年中考数学复习探究性试题汇编之轴对称

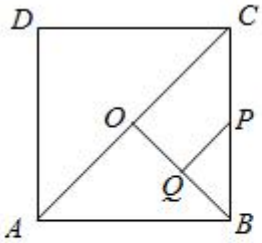
一．解答题（共15小题）

1．（2021秋•荔城区校级期末）如图，四边形$ABCD$是正方形，点O为对角线AC的中点．

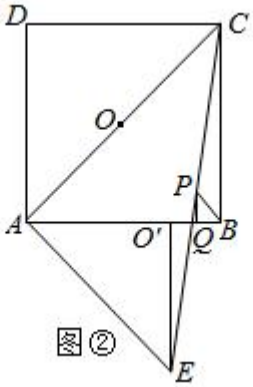
（1）问题解决：如图①，连接BO，分别取CB，BO的中点P，Q，连接PQ，则PQ与BO的数量关系是_____，位置关系是_____．

（2）问题探究：如图②，将图①中的△AOB绕点A按顺时针方向旋转45°得到△$AO'E$，连接CE，点P，Q分别为CE，BO'的中点，连接PQ，PB．试判断PQ与BQ之间的数量关系，并证明；

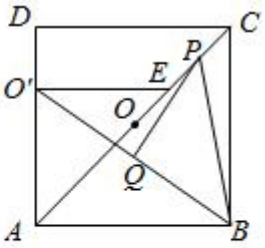
（3）拓展延伸：如图③，将图①中的△AOB绕点A按逆时针方向旋转45°得到△$AO'E$，连接BO'，点P，Q分别为CE，BO'的中点，连接PQ，PB．若正方形$ABCD$的边长为1，求线段PQ的长．



图①



图②



图③

2．（2021春•沙坪坝区校级期末）如图，已知△ABC，BC边的中点M，

（1）分别以AB和AC为腰，向△ABC的外侧作等腰三角形，其中$AD=AB$，$AC=AE$，且$\angle BAE=\angle DAC=90°$，如图1所示．

①若$\angle BAC=70°$，求$\angle DAE$的度数；

②求证：$DE=2AM$；

（2）分别以AB和AC为斜边，向△ABC的外侧作等腰直角三角形，其中$\angle ADB=\angle AEC=90°$，如图2所示，连接$MD$和$ME$，则$MD$和$ME$具有怎样的数量和位置关系？请给

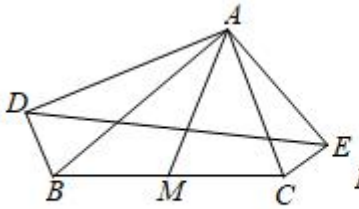


图1

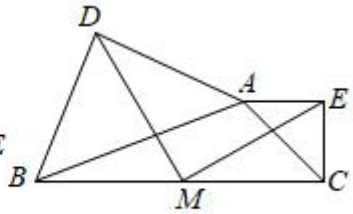


图2

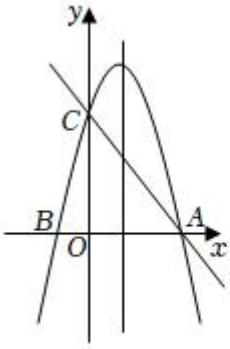
出证明过程.

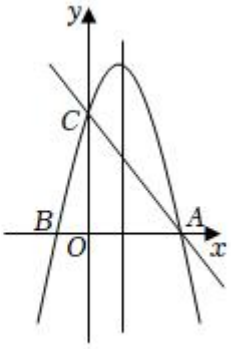
3.（2020•绥中县二模）如图，二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象过点 A（3，0）和 B（﹣1，0），与 y 轴交于点 C.

（1）求该二次函数的解析式；

（2）若在该二次函数的对称轴上有一点 M，使 $BM+CM$ 的长度最短，求出 M 的坐标.

（3）动点 D，E 同时从点 O 出发，其中点 D 以每秒$\frac{3}{2}$个单位长度的速度沿折线 OAC 按 $O\to A\to C$ 的路线运动，点 E 以每秒 4 个单位长度的速度沿折线 OCA 按 $O\to C\to A$ 的路线运动，当 D，E 两点相遇时，它们都停止运动．设 D，E 同时从点 O 出发 t 秒时，$\triangle ODE$ 的面积为 S．请直接写出 S 关于 t 的函数关系式，并写出自变量 t 的取值范围.





备用图

4.（2021•开江县校级模拟）我们定义：如图 1，在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$，当 $a+\beta=180°$ 时，我们称△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，△$AB'C$ 边 $B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋补中线”.

[特例感知]

（1）在图 2，图 3 中，△$AB'C'$ 是△ABC 的“旋补三角形”，AD 是△ABC 的“旋补中线”.

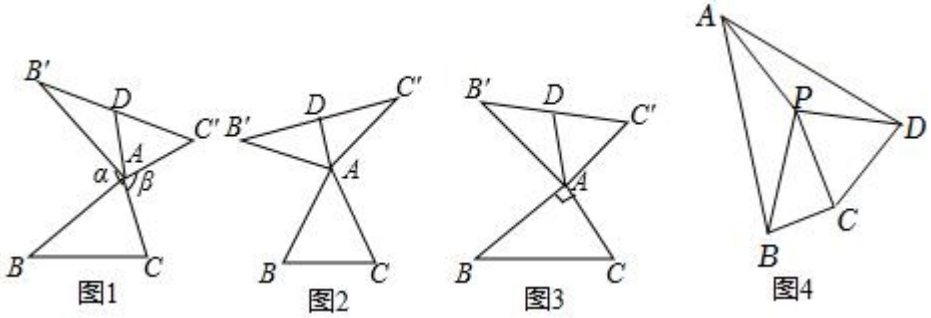
①如图 2，当△ABC 为等边三角形，且 $BC=6$ 时，则 AD 长为 _____.

②如图 3，当∠$BAC=90°$，且 $BC=7$ 时，则 AD 长为 _____.

[猜想论证]

（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明.（如

果你没有找到证明思路，可以考虑延长 AD 或延长 $B'A$，…）



[拓展应用]

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=150°$，$AB=12$，$CD=6$，以 CD 为边在四边形 $ABCD$ 内部作等边△PCD，连接 AP，BP．若△PAD 是△PBC 的“旋补三角形”，请直接写出△PBC 的“旋补中线”长及四边形 $ABCD$ 的边 AD 长．

5．（2020•海淀区校级模拟）小明研究了这样一道几何题：如图 1，在△ABC 中，把 AB 点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，请问△$AB'C'$ 边 $B'C'$ 上的中线 AD 与 BC 的数量关系是什么？以下是他的研究过程：

特例验证：

（1）①如图 2，当△ABC 为等边三角形时，AD 与 BC 的数量关系为 AD＝_____BC；

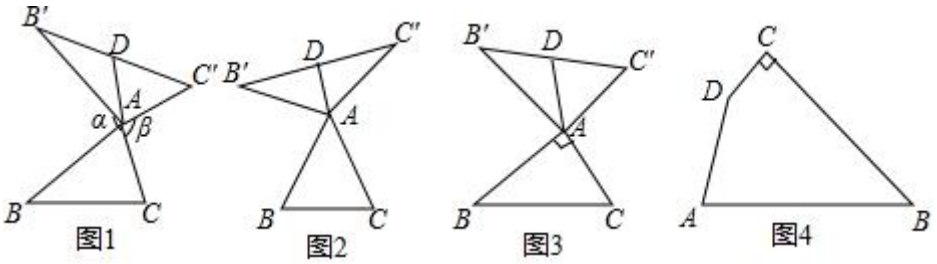
②如图 3，当$\angle BAC=90°$，$BC=8$ 时，则 AD 长为 _____．

猜想论证：

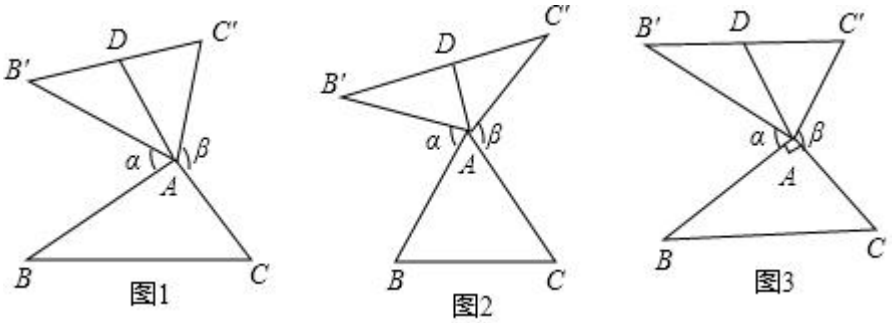
（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明．

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$，$\angle C=90°$，$\angle A+\angle B=120°$，$BC=12\sqrt{3}$，$CD=6$，$DA=6\sqrt{3}$，在四边形内部是否存在点 P，使△PDC 与△PAB 之间满足小明探究的问题中的边角关系？若存在，请画出点 P 的位置（保留作图痕迹，不需要说明）并直接写出△PDC 的边 DC 上的中线 PQ 的长度；若不存在，说明理由．



6．（2020•汇川区模拟）我们定义：如图1、图2、图3，在△ABC中，把AB绕点A顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到AB'，把AC绕点A逆时针旋转β得到AC'，连接$B'C'$，当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC的“旋补三角形”，△$AB'C'$边$B'C'$上的中线AD叫做△ABC的“旋补中线”，点A叫做“旋补中心”．图1、图2、图3中的△$AB'C'$均是△ABC的“旋补三角形”．

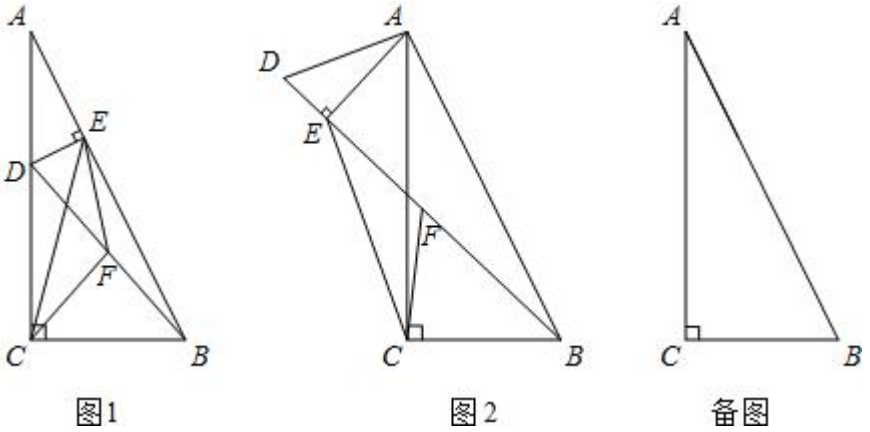


（1）①如图2，当△ABC为等边三角形时，“旋补中线”AD与BC的数量关系为：AD＝_____BC；

②如图3，当∠BAC＝90°，BC＝8时，则“旋补中线”AD长为 _____．

（2）在图1中，当△ABC为任意三角形时，猜想“旋补中线”AD与BC的数量关系，并给予证明．

7．（2020•越秀区校级模拟）在Rt△ABC中，∠ACB＝90°，tan∠BAC＝$\frac{1}{2}$．点D在边AC上（不与A，C重合），连接BD，F为BD中点．



（1）若过点D作DE⊥AB于E，连接CF、EF、CE，如图1．设CF＝kEF，则k＝_____；

（2）若将图1中的△ADE绕点A旋转，使得D、E、B三点共线，点F仍为BD中点，如图2．求证：BE﹣DE＝2CF；

（3）若BC＝6，点D在边AC的三等分点处，将线段AD绕点A旋转，点F始终为BD

中点，求线段 CF 长度的取值范围．

8．（2018 秋•吴兴区期末）我们定义：如图 1，在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）并缩短一半得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β并缩短一半得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC 的“旋半三角形”，△$AB'C'$边 $B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋半中线”，点 A 叫做“旋半中心”．

特例感知：

（1）在图 2，图 3 中，△$AB'C'$是△ABC 的“旋半三角形”，AD 是△ABC 的“旋半中线”．

①如图 2，当△ABC 为等边三角形时，AD 与 BC 的数量关系为 AD＝_____BC；

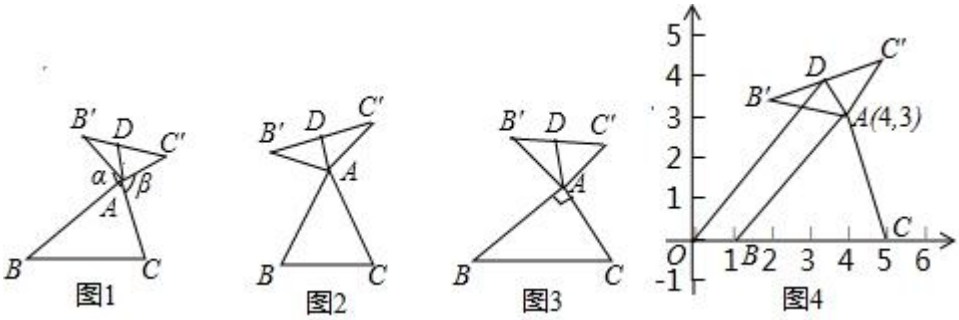
②如图 3，当∠BAC＝90°，BC＝4 时，则 AD 长为 _____．

猜想论证：

（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明．

拓展应用：

（3）如图 4，在平面直角坐标系中，△ABC 的坐标分别是 A（4，3），B（1，0），C（5，0），△$AB'C'$ 是△ABC 的“旋半三角形”，AD 是△ABC 的“旋半中线”，连接 OD，求 OD 的最大值是多少？并请直接写出当 OD 最大时点 D 的坐标．



9．（2018 秋•丹江口市期末）已知，△ABC 中，AB＝6，AC＝4，M 是 BC 的中点，分别以 AB，AC 为边向外作正方形 $ABDE$，正方形 $ACFG$，连接 EG，MA 的延长线交 EG 于点 N，

（1）如图 1，若∠BAC＝90°，求证：$AM=\frac{1}{2}EG$，$AM\perp EG$；

（2）将正方形 $ACFG$ 绕点 A 顺时针旋转至如图 2，（1）中结论是否仍然成立？请说明理由；

（3）将正方形 $ACFG$ 绕点 A 顺时针旋转至 B，C，F 三点在一条直线上，请画出图形，并直接写出 AN 的长．

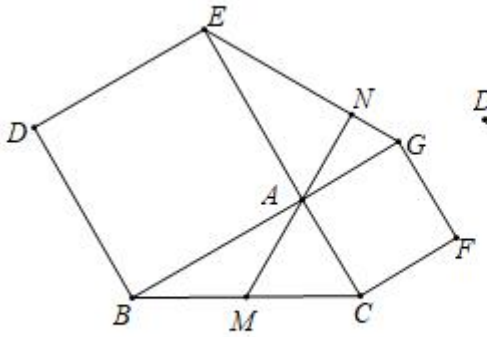


图1

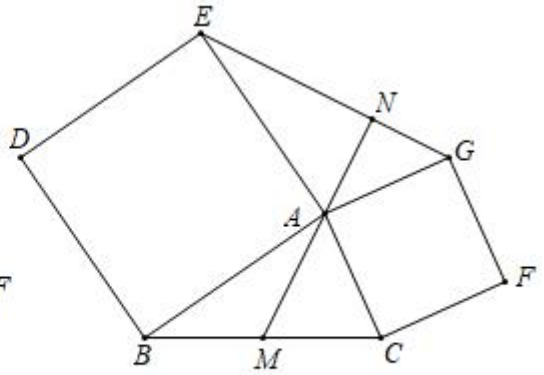


图2

10．（2019•潮阳区模拟）已知如图 1，在△ABC 中，∠ACB＝90°，BC＝AC，点 D 在 AB 上，DE⊥AB 交 BC 于 E，点 F 是 AE 的中点

（1）写出线段 FD 与线段 FC 的关系并证明；

（2）如图 2，将△BDE 绕点 B 逆时针旋转α（0°＜α＜90°），其它条件不变，线段 FD 与线段 FC 的关系是否变化，写出你的结论并证明；

（3）将△BDE 绕点 B 逆时针旋转一周，如果 BC＝4，BE＝$2\sqrt{2}$，直接写出线段 BF 的范围．

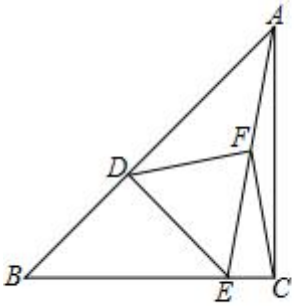


图 1

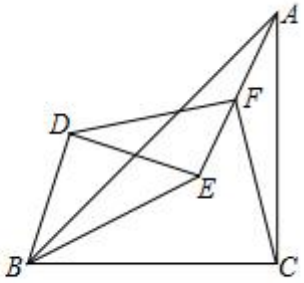


图 2

11．（2019•蚌埠二模）定义：如图 1，在△ABC 和△ADE 中，AB＝AC＝AD＝AE，当∠BAC+∠DAE＝180°时，我们称△ABC 与△DAE 互为“顶补等腰三角形”，△ABC 的边 BC 上的高线 AM 叫做△ADE 的“顶心距”，点 A 叫做“旋补中心”．

特例感知：

（1）在图 2，图 3 中，△ABC 与△DAE 互为“顶补三角形”，AM，AN 是“顶心距”．

①如图 2，当∠BAC＝90°时，AM 与 DE 之间的数量关系为 AM＝_____DE；

②如图 3，当∠BAC＝120°，BC＝6 时，AN 的长为 _____．

猜想论证：

（2）在图 1 中，当∠BAC 为任意角时，猜想 AM 与 DE 之间的数量关系，并给予证明．

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$，$AD=AB$，$CD=BC$，∠B＝90°，∠A＝60°，CD＝2，在四边形 $ABCD$ 的内部是否存在点 P，使得△PAD 与△PBC 互为“顶补等腰三角形”？若存在，请给予证明，并求△PBC 的“顶心距”的长；若不存在，请说明理由．

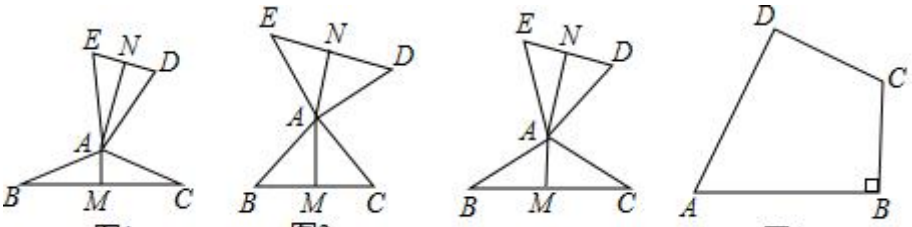


图1　图2　图3　图4

12．（2018 春•成华区期末）我们定义：在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$叫△ABC 的“旋补三角形”，△$AB'C'$的边 $B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋补中线”．下面各图中，△$AB'C'$均是△ABC 的“旋补三角形”，AD 均是△ABC 的“旋补中线”．

（1）如图 1，若△ABC 为等边三角形，BC＝8，则 AD 的长等于；

（2）如图 2，若∠BAC＝90°，求证：$AD=\frac{1}{2}BC$；

（3）如图 3，若△ABC 为任意三角形，（2）中结论还成立吗？如果成立，给予证明；如果不成立，说明理由．

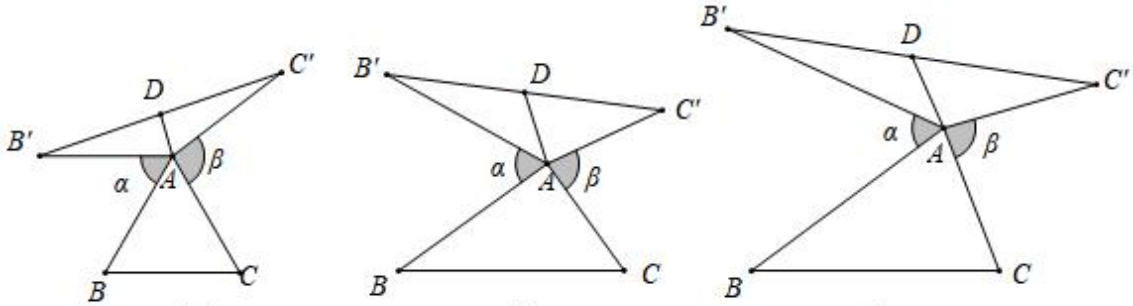
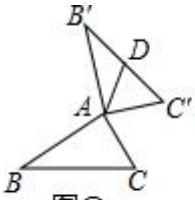
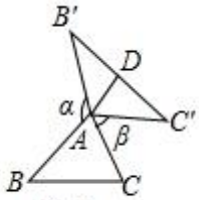


图1　图2　图3

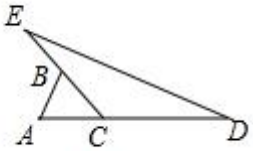
13．（2018 春•南京期末）将△ABC 的边 AB 绕点 A 顺时针旋转α得到 AB'，边 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，α+β＝180°，连接 $B'C'$，作△$AB'C'$ 的中线 AD．



图①



图②



图③

【初步感知】

（1）如图①，当∠BAC＝90°，BC＝4 时，AD 的长为 _____；

【探究运用】

（2）如图②，△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并证明．

【应用延伸】

（3）如图③，已知等腰△ACB，AC＝BC＝m，延长 AC 到 D，延长 CB 到 E，使 CD＝CE＝n，将△CED 绕点 C 顺时针旋转一周得到△$CE'D'$，连接 BE'、AD'，若∠CBE'＝90°，求 AD' 的长度（用含 m、n 的代数式表示）．

14．（2018•濮阳二模）（1）问题发现

在等腰三角形 ABC 中，AB＝AC，分别以 AB 和 AC 为斜边，向△ABC 的外侧作等腰直角三角形，如图 1 所示，其中 DF⊥AB 于点 F，EG⊥AC 于点 G，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME．

填空：线段 AF，AG，AB 之间的数量关系是_____；

线段 MD，ME 之间的数量关系是_____．

（2）拓展探究

在任意三角形 ABC 中，分别以 AB 和 AC 为斜边向△ABC 的外侧作等腰直角三角形，如图 2 所示，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME，则 MD 与 ME 具有怎样的数量关系和位置关系？并说明理由；

（3）解决问题

在任意三角形 ABC 中，分别以 AB 和 AC 为斜边，向△ABC 的内侧作等腰直角三角形，如图 3 所示，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME，若 MD＝2，请直接写出线段 DE 的长．

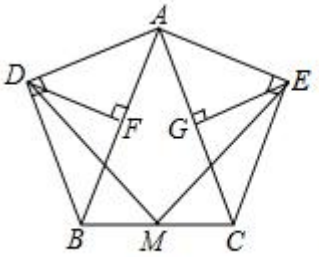


图1

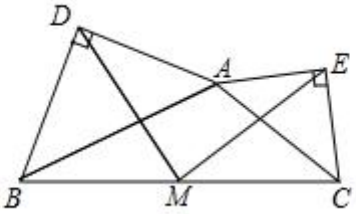


图2

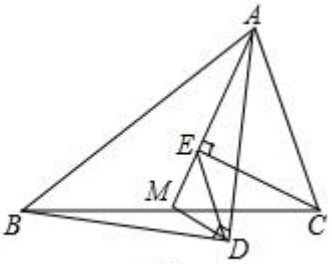


图3

15.（2018•东河区二模）我们定义：如图 1，在△*ABC* 中，把 *AB* 绕点 *A* 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 *AB*'，把 *AC* 绕点 *A* 逆时针旋转β得到 *AC*'，连接 *B*'*C*'．当α+β＝180°时，我们称△*AB*'*C*'是△*ABC* 的“旋补三角形”，△*AB*'*C*'边 *B*'*C*'上的中线 *AD* 叫做△*ABC* 的“旋补中线”，点 *A* 叫做“旋补中心”．

特例感知：

（1）在图 2，图 3 中，△*AB*'*C*'是△*ABC* 的“旋补三角形”，*AD* 是△*ABC* 的“旋补中线”．

①如图 2，当△*ABC* 为等边三角形时，*AD* 与 *BC* 的数量关系为 *AD*＝_____*BC*；

②如图 3，当∠*BAC*＝90°，*BC*＝8 时，则 *AD* 长为 _____．

猜想论证：

（2）在图 1 中，当△*ABC* 为任意三角形时，猜想 *AD* 与 *BC* 的数量关系，并给予证明．

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 *ABCD*，∠*C*＝90°，∠*D*＝150°，*BC*＝12，*CD*＝$2\sqrt{3}$，*AB*＝$2\sqrt{39}$．在四边形内部是否存在点 *P*，使△*PDC* 是△*PAB* 的“旋补三角形”？若存在，给予证明，并求△*PAB* 的“旋补中线”长；若不存在，说明理由．

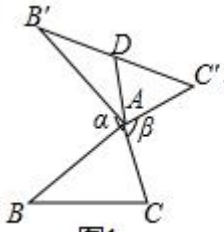


图1

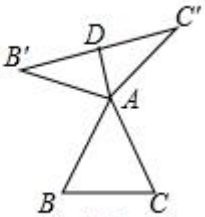


图2

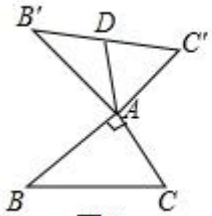


图3

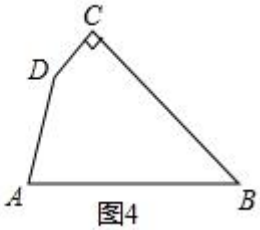


图4

2023年中考数学复习探究性试题汇编之轴对称

参考答案与试题解析

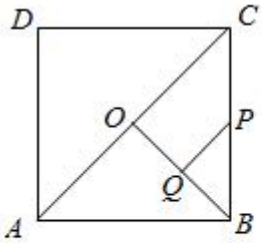
一．解答题（共15小题）

1．（2021秋•荔城区校级期末）如图，四边形$ABCD$是正方形，点O为对角线AC的中点．

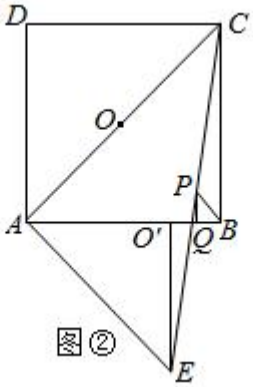
（1）问题解决：如图①，连接BO，分别取CB，BO的中点P，Q，连接PQ，则PQ与BO的数量关系是__$PQ=\frac{1}{2}OB$__，位置关系是__$PQ\perp OB$__．

（2）问题探究：如图②，将图①中的△AOB绕点A按顺时针方向旋转45°得到△$AO'E$，连接CE，点P，Q分别为CE，BO'的中点，连接PQ，PB．试判断PQ与BQ之间的数量关系，并证明；

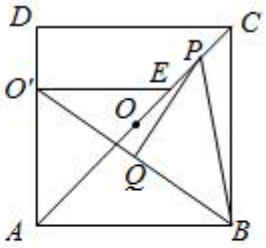
（3）拓展延伸：如图③，将图①中的△AOB绕点A按逆时针方向旋转45°得到△$AO'E$，连接BO'，点P，Q分别为CE，BO'的中点，连接PQ，PB．若正方形$ABCD$的边长为1，求线段PQ的长．



图①



图②



图③

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】（1）由正方形的性质得出$BO\perp AC$，$BO=CO$，由中位线定理得出$PQ\parallel OC$，$PQ=\frac{1}{2}OC$，则可得出结论；

（2）连接$O'P$并延长交BC于点F，由旋转的性质得出△$AO'E$是等腰直角三角形，$O'E\parallel BC$，$O'E=O'A$，证得$\angle O'EP=\angle FCP$，$\angle PO'E=\angle PFC$，△$O'PE\cong$△FPC（AAS），则$O'E=FC=O'A$，$O'P=FP$，证得△$O'BF$为等腰直角三角形．同理△BPO'也为等腰直角三角形，则可得出结论；

（3）延长$O'E$交BC边于点G，连接PG，$O'P$．证明△$O'GP\cong$△BCP（SAS），得出$\angle O'PG=\angle BPC$，$O'P=BP$，得出$\angle O'PB=90°$，则△$O'PB$为等腰直角三角形，由直角三

角形的性质和勾股定理可求出 $O'A$ 和 $O'B$，求出 BQ，即可得出答案.

【解答】（1）解：∵点 O 为对角线 AC 的中点，

∴$BO\perp AC$，$BO=CO$，

∵P 为 BC 的中点，Q 为 BO 的中点，

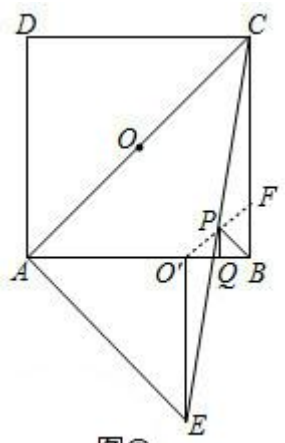
∴$PQ\parallel OC$，$PQ=\frac{1}{2}OC$，

∴$PQ\perp BO$，$PQ=\frac{1}{2}BO$；

故答案为：$PQ=\frac{1}{2}BO$，$PQ\perp BO$.

（2）结论：$PQ=BQ$.

证明：如图②中，连接 $O'P$ 并延长交 BC 于点 F，



图②

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

∵将△AOB 绕点 A 按顺时针方向旋转 45°得到△$AO'E$，

∴△$AO'E$ 是等腰直角三角形，$O'E\parallel BC$，$O'E=O'A$，

∴$\angle O'EP=\angle FCP$，$\angle PO'E=\angle PFC$，

又∵点 P 是 CE 的中点，

∴$CP=EP$，

∴△$O'PE\cong$△FPC（AAS），

∴$O'E=FC=O'A$，$O'P=FP$，

∴$AB-O'A=CB-FC$，

∴$BO'=BF$，

∴△$O'BF$ 为等腰直角三角形.

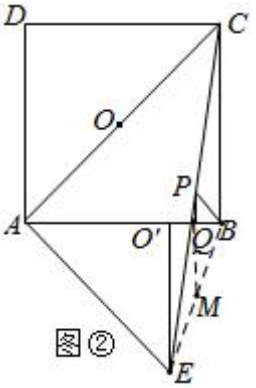
∴$BP\perp O'F$，$O'P=BP$，

∴△BPO'也为等腰直角三角形.

又∵点 Q 为 $O'B$ 的中点，

∴$PQ\perp O'B$，$PQ=BQ$.

解法二：如图，取 BE 的中点 M，连接 PM，



图②

∵$EP=PC$．$EM=MB$，

∴$PM=\frac{1}{2}BC$，$PM\parallel BC$，

∵$EO'\parallel CB$，$EM=BM$，$PM\parallel EO'$，

∴PM 平分线段 BO'，

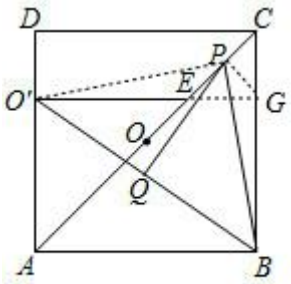
∴点 Q 在 PM 上，

∴$MQ=\frac{1}{2}EO'=\frac{1}{2}AO'$，

∴$PQ=PM-MQ=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AO'=\frac{1}{2}(AB-AO')=\frac{1}{2}BO'$，

∴$PQ\perp BQ$，$PQ=BQ$.

（3）解：如图③中，延长 $O'E$ 交 BC 边于点 G，连接 PG，$O'P$.



图③

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是对角线，

∴$\angle ECG=45°$，

由旋转得，四边形 $O'ABG$ 是矩形，

∴$O'G=AB=BC$，$\angle EGC=90°$，

∴$\triangle EGC$ 为等腰直角三角形.

∵点 P 是 CE 的中点，

∴$PC=PG=PE$，$\angle CPG=90°$，$\angle EGP=45°$，

∴$\triangle O'GP\cong\triangle BCP$（$SAS$），

∴$\angle O'PG=\angle BPC$，$O'P=BP$，

∴$\angle O'PG-\angle GPB=\angle BPC-\angle GPB=90°$，

∴$\angle O'PB=90°$，

∴$\triangle O'PB$ 为等腰直角三角形，

∵点 Q 是 $O'B$ 的中点，

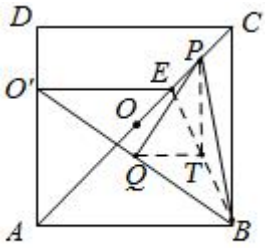
∴$PQ=\frac{1}{2}O'B=BQ$，

∵$AB=1$，$AO=AO'=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$BO'=\sqrt{AB^2+AO'^2}=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∴$PQ=\frac{1}{2}BO'=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

解法二：连接 EB，取 EB 的中点 T，连接 QT，PT.



图③

∵$BQ=QO'$，$BT=TE$，

∴$QT\parallel EO'$，$QT=\frac{1}{2}EO'=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

∵$EP=PC$．$ET=TB$，

∴$PT=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$PT\parallel CB$，

∵$BC\parallel AD$，$EO'\perp AD$，

∴$QT\perp PT$，

∴$PQ=\sqrt{QT^2+PT^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

【点评】本题是四边形综合题，考查了正方形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，中位线定理，矩形的判定与性质，勾股定理，三角形的面积等知识，熟练掌握正方形的性质及全等三角形的判定与性质是解题的关键．

2．（2021春•沙坪坝区校级期末）如图，已知△ABC，BC边的中点M，

（1）分别以AB和AC为腰，向△ABC的外侧作等腰三角形，其中$AD=AB$，$AC=AE$，且$\angle BAE=\angle DAC=90°$，如图1所示．

①若$\angle BAC=70°$，求$\angle DAE$的度数；

②求证：$DE=2AM$；

（2）分别以AB和AC为斜边，向△ABC的外侧作等腰直角三角形，其中$\angle ADB=\angle AEC=90°$，如图2所示，连接$MD$和$ME$，则$MD$和$ME$具有怎样的数量和位置关系？请给出证明过程．

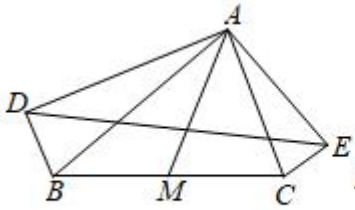


图1

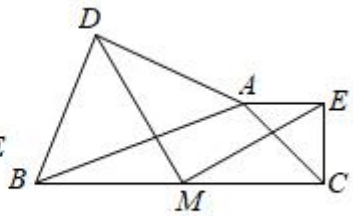


图2

【考点】三角形综合题．

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】（1）①求出$\angle DAB=\angle CAE=20^\circ$，可得结论．

②延长 AM 到 R，使得 $MR=AM$，连接 BR，CR．证明$\triangle DAE\cong\triangle ABR$（$SAS$），推出 $DE=AR$，可得结论．

（2）作 AB、AC 的中点 F、G，连接 DF，MF，EG，MG，根据三角形的中位线的性质和等腰直角三角形的性质就可以得出四边形 $AFMG$ 是平行四边形，从而得出$\triangle DFM\cong\triangle MGE$，根据其性质就可以得出结论；

【解答】（1）①解：$\because\angle DAC=\angle BAE=90^\circ$，$\angle BAC=70^\circ$，

$\therefore\angle DAB=\angle CAE=20^\circ$，

$\therefore\angle DAE=\angle DAB+\angle BAE=110^\circ$．

②证明：如图 1 中，延长 AM 到 R，使得 $MR=AM$，连接 BR，CR．

$\because AM=MR$，$\angle AMC=\angle RMB$，$CM=MB$，

$\therefore\triangle AMC\cong\triangle RMB$（$SAS$），

$\therefore AC=BR$，$\angle MAC=\angle MRB$，

$\therefore AC\parallel BR$，

$\therefore\angle ABR=180^\circ-\angle BAC$，

$\because\angle DAE=180^\circ-\angle BAC$，

$\therefore\angle DAE=\angle ABR$，

$\because AD=AB$，$AE=AC$，

$\therefore AD=AB$，$\angle DAE=\angle ABR$，$AE=BR$，

$\therefore\triangle DAE\cong\triangle ABR$（$SAS$），

$\therefore DE=AR$，

$\because AR=2AM$，

$\therefore DE=2AM$．

（2）解：如图 2，取 AB、AC 的中点 F、G，连接 DF，MF，EG，MG，设 AB 交 DM 于 H．

$\therefore AF=\frac{1}{2}AB$，$AG=\frac{1}{2}AC$．

∵△ABD 和△AEC 是等腰直角三角形，

∴$DF\perp AB$，$DF=\frac{1}{2}AB$，$EG\perp AC$，$EG=\frac{1}{2}AC$，

∴∠AFD＝∠AGE＝90°，DF＝AF，GE＝AG.

∵M 是 BC 的中点，

∴$MF\parallel AC$，$MG\parallel AB$，

∴四边形 $AFMG$ 是平行四边形，

∴AG＝MF，MG＝AF，∠AFM＝∠AGM.

∴MF＝GE，DF＝MG，∠AFM+∠AFD＝∠AGM+∠AGE，

∴∠DFM＝∠MGE，

∴△DFM≌△MGE（SAS），

∴DM＝ME，∠FDM＝∠GME，

∵$MG\parallel AB$，

∴∠GMH＝∠BHM，

∵∠BHM＝90°+∠FDM，

∴∠BHM＝90°+∠GME，

∵∠BHM＝∠DME+∠GME，

∴∠DME+∠GME＝90°+∠GME，

即∠DME＝90°，

∴$MD\perp ME$，

∴DM＝ME，$MD\perp ME$.

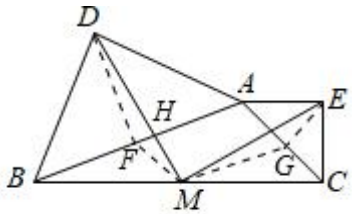


图2

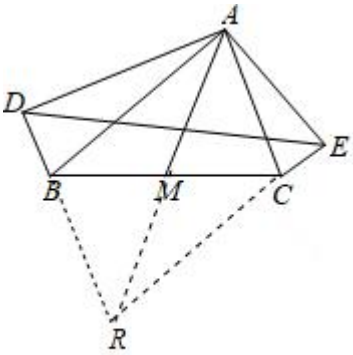


图1

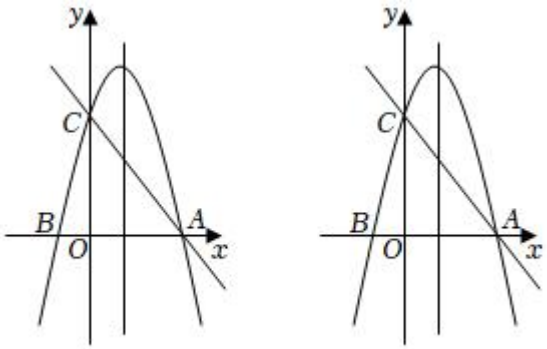
【点评】本题是三角形综合题，主要考查了等腰直角三角形的性质的运用，等腰三角形的性质的运用，全等三角形的判定及性质的运用，三角形的中位线的性质的运用，直角三角形的斜边上的中线的性质的运用，平行四边形的判定及性质的运用，解答时根据三角形的中位线的性质制造全等三角形是解答本题的关键．

3．（2020•绥中县二模）如图，二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象过点 A（3，0）和 B（﹣1，0），与 y 轴交于点 C．

（1）求该二次函数的解析式；

（2）若在该二次函数的对称轴上有一点 M，使 $BM+CM$ 的长度最短，求出 M 的坐标．

（3）动点 D，E 同时从点 O 出发，其中点 D 以每秒$\frac{3}{2}$个单位长度的速度沿折线 OAC 按 $O\to A\to C$ 的路线运动，点 E 以每秒 4 个单位长度的速度沿折线 OCA 按 $O\to C\to A$ 的路线运动，当 D，E 两点相遇时，它们都停止运动．设 D，E 同时从点 O 出发 t 秒时，$\triangle ODE$ 的面积为 S．请直接写出 S 关于 t 的函数关系式，并写出自变量 t 的取值范围．



备用图

【考点】二次函数综合题．

【专题】动点型；数形结合；分类讨论；待定系数法；二次函数图象及其性质；函数的综合应用；平移、旋转与对称；几何直观；应用意识．

【分析】（1）用待定系数法即得二次函数的关系式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$；

（2）由 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4=-\frac{4}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}$，得抛物线的对称轴是直线 $x=1$，与 y 轴交点 $C(0,4)$，根据点 B 关于直线 $x=1$ 的对称点是 A，可知 AC 与对称轴的交点即为点 M，使 $BM+CM$ 的长度最短，用待定系数法得直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$，即得 $M(1,\frac{8}{3})$；

（3）①根据题意得：$OC=4$，$OA=3$，$AC=5$，可得 D，E 两点相遇的时间为 $\frac{3+4+5}{\frac{3}{2}+4}=\frac{24}{11}$ 秒，（Ⅰ）当 $0<t\leqslant1$，即 E 在 OC 上，D 在 OA 上时，$S=\frac{1}{2}OD\cdot OE=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t\times4t=3t^2$；（Ⅱ）当 $1<t\leqslant2$，即 E 在 CA 上，D 在 OA 上时，过 E 作 $EF\perp x$ 轴于 F，设点 E 的坐标为 (x_2,y_2)，由 $\triangle EAF\backsim\triangle CAO$，可得 $|y_2|=\frac{36-16t}{5}$，即得 $S=-\frac{12}{5}t^2+\frac{27}{5}t$；（Ⅲ）当 $2<t<\frac{24}{11}$，即 E 在 CA 上，D 在 CA 上时，过 E 作 $EF\perp x$ 轴于 F，过 D 作 $DG\perp x$ 轴于 G，设点 E 的标为 (x_3,y_3)，可得 $|y_3|=\frac{36-16t}{5}$，设点 D 的坐标为 (x_4,y_4)，由 $\triangle ADG\backsim\triangle ACO$，得 $|y_4|=\frac{6t-12}{5}$，即得 $S=S_{\triangle AOE}-S_{\triangle AOD}=-\frac{33}{5}t+\frac{72}{5}$.

【解答】解：（1）∵二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象过点 $A(3,0)$，$B(-1,0)$，

∴$\begin{cases}9a+3b+4=0\\a-b+4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$，

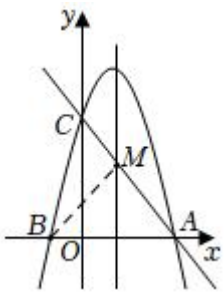
∴二次函数的关系式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$；

（2）∵$y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4=-\frac{4}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}$，

∴抛物线的对称轴是直线 $x=1$，与 y 轴交点 $C(0,4)$，

∵点 B 关于直线 $x=1$ 的对称点是 A，

∴AC 与对称轴的交点即为点 M，使 $BM+CM$ 的长度最短，如图：



设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，将 $A(3,0)$，$C(0,4)$ 代入得：

$\begin{cases}3k+b=0\\b=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{3}\\b=4\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$，

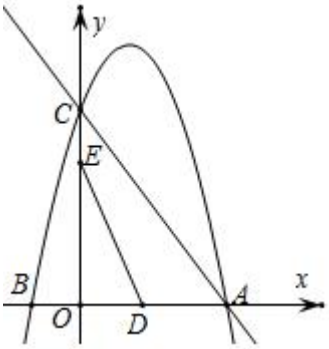
当 $x=1$ 时，$y=-\frac{4}{3}\times1+4=\frac{8}{3}$，

∴M（1，$\frac{8}{3}$）；

（3）①根据题意得：$OC=4$，$OA=3$，$AC=5$，

∴D，E 两点相遇的时间为$\frac{3+4+5}{\frac{3}{2}+4}=\frac{24}{11}$（秒），

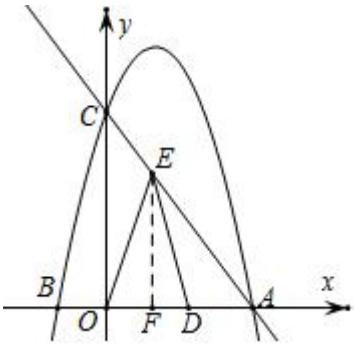
（Ⅰ）当 $0<t\leqslant1$，即 E 在 OC 上，D 在 OA 上时，如图：



∵$OD=\frac{3}{2}t$，$OE=4t$，

∴$S=\frac{1}{2}OD\cdot OE=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t\times4t=3t^2$；

（Ⅱ）当 $1<t\leqslant2$，即 E 在 CA 上，D 在 OA 上时，过 E 作 $EF\perp x$ 轴于 F，如图：



设点 E 的坐标为（x_2，y_2），

∵$EF\perp x$ 轴，

∴$\angle AFE=90^\circ=\angle AOC$，

又$\angle EAF=\angle CAO$，

∴$\triangle EAF\backsim\triangle CAO$，

$\therefore \frac{EF}{OC}=\frac{AE}{AC}$

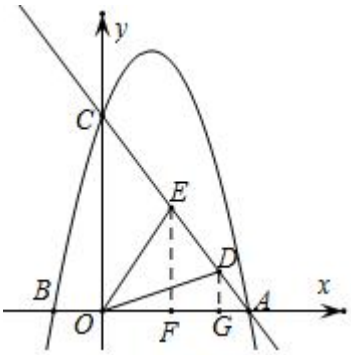
而 $AE=AC-CE=5-(4t-4)$，

$\therefore \frac{|y_2|}{4}=\frac{5-(4t-4)}{5}$，

$\therefore |y_2|=\frac{36-16t}{5}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t\times\frac{36-16t}{5}=-\frac{12}{5}t^2+\frac{27}{5}t$；

（Ⅲ）当 $2<t<\frac{24}{11}$，即 E 在 CA 上，D 在 CA 上时，过 E 作 $EF\perp x$ 轴于 F，过 D 作 $DG\perp x$ 轴于 G，如图：



设点 E 的标为（x_3，y_3），同（Ⅱ）可得 $|y_3|=\frac{36-16t}{5}$，

设点 D 的坐标为（x_4，y_4），

$\because \triangle ADG\backsim\triangle ACO$，

$\therefore \frac{DG}{OC}=\frac{AD}{AC}$，

$\because AD=\frac{3}{2}t-3$，

$\therefore \frac{|y_4|}{4}=\frac{\frac{3}{2}t-3}{5}$，

$\therefore |y_4|=\frac{6t-12}{5}$，

$\therefore S=S_{\triangle AOE}-S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{36-16t}{5}-\frac{1}{2}\times3\times\frac{6t-12}{5}=-\frac{33}{5}t+\frac{72}{5}$，

综上所述，$S=\begin{cases}3t^2 & (0<t\le1)\\ -\frac{12}{5}t^2+\frac{27}{5}t & (1<t\le2)\\ -\frac{33}{5}t+\frac{72}{5} & (2<t<\frac{24}{11})\end{cases}$．

【点评】本题考查二次函数综合应用，涉及待定系数法、“将军饮马”模型，相似三角形的性质及应用等知识，解题的关键是分类画出图形，用相似三角形对应边成比例解决问

题．

4．（2021•开江县校级模拟）我们定义：如图 1，在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$，当 a+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，△$AB'C$ 边 $B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋补中线”．

[特例感知]

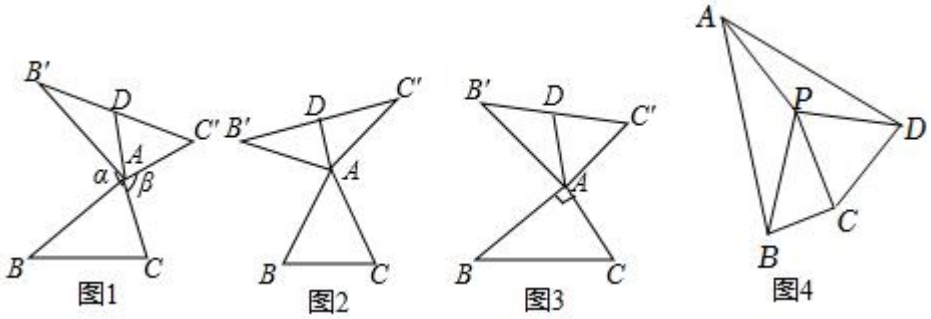
（1）在图 2，图 3 中，△$AB'C'$ 是△ABC 的“旋补三角形”，AD 是△ABC 的“旋补中线”．

①如图 2，当△ABC 为等边三角形，且 BC＝6 时，则 AD 长为 __3__．

②如图 3，当∠BAC＝90°，且 BC＝7 时，则 AD 长为 __3.5__．

[猜想论证]

（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明．（如果你没有找到证明思路，可以考虑延长 AD 或延长 $B'A$，…）



[拓展应用]

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，∠BCD＝150°，AB＝12，CD＝6，以 CD 为边在四边形 $ABCD$ 内部作等边△PCD，连接 AP，BP．若△PAD 是△PBC 的“旋补三角形”，请直接写出△PBC 的“旋补中线”长及四边形 $ABCD$ 的边 AD 长．

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；应用意识．

【分析】（1）①首先证明△ADB' 是含有 30° 是直角三角形，可得 $AD=\frac{1}{2}AB'$ 即可解决问题．

②首先证明△BAC≌△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题．

（2）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 AD＝DM，连接 $B'M$，$C'M$，首先证明四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，再证明△BAC≌△$AB'M$，即可解决问题．

（3）如图 4 中，过点 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，取 BC 的中点 J，连接 PJ．解直角三角形求出 BC，PJ，利用（2）中结论解决问题即可．

【解答】解：（1）①如图 2 中，

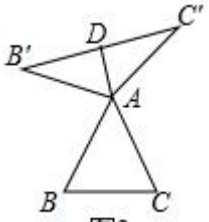


图2

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=AB'=AC'$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAC=60°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=120°$，

∴$\angle B'=\angle C'=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC=3$，

故答案为 3．

②如图 3 中，

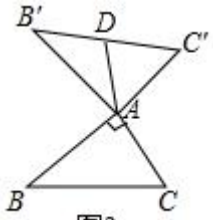


图3

∵$\angle BAC=90°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=\angle BAC=90°$，

∵$AB=AB'$，$AC=AC'$，

∴△BAC≌△$B'AC'$（SAS），

∴$BC=B'C'$，

∵$B'D=DC'$，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{2}BC=3.5$，

故答案为3.5.

（2）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$.

理由：如图1中，延长AD到M，使得$AD=DM$，连接$B'M$，$C'M$

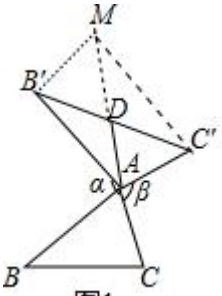


图1

∵$B'D=DC'$，$AD=DM$，

∴四边形$AC'MB'$是平行四边形，

∴$AC'=B'M=AC$，

∵$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，

∴$\angle BAC=\angle MB'A$，

∵$AB=AB'$，

∴$\triangle BAC\cong\triangle AB'M$（$SAS$），

∴$BC=AM$，

∴$AD=\frac{1}{2}BC$.

（3）如图4中，过点P作$PH\perp AB$于H，取BC的中点J，连接PJ.

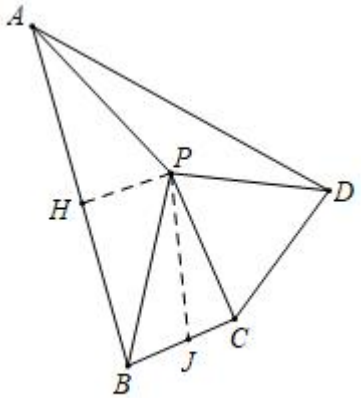


图4

∵$\triangle PCD$是等边三角形，

∴$PC=CD=PD=6$，$\angle PCD=\angle CPD=60°$，

∵$\angle BCD=150°$，

∴$\angle PCB=90°$，

∵$\triangle PAD$ 是$\triangle PBC$ 的“旋补三角形”，

∴$\angle APB=180°-60°=120°$，$PA=PB$，

∵$PH\perp AB$，

∴$AH=HB=6$，$\angle APH=\angle BPH=60°$，

∴$\sin 60°=\frac{BH}{PB}$，

∴$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{PB}$，

∴$PB=4\sqrt{3}$，

∴$BC=\sqrt{PB^2-PC^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-6^2}=2\sqrt{3}$，

∴$\triangle PBC$ 的“旋补中线”长$=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，

∵$BJ=CJ=\sqrt{3}$，

∴$PJ=\sqrt{PC^2+CJ^2}=\sqrt{39}$，

∵$\triangle PBC$ 也是$\triangle PAD$ 的“旋补三角形”，

∴$AD=2PJ=2\sqrt{39}$.

【点评】本题是四边形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、直角三角形 30 度角性质、等边三角形的判定和性质、矩形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

5.（2020•海淀区校级模拟）小明研究了这样一道几何题：如图 1，在$\triangle ABC$ 中，把 AB 点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，请问$\triangle AB'C'$ 边 $B'C'$ 上的中线 AD 与 BC 的数量关系是什么？以下是他的研究过程：

特例验证：

（1）①如图 2，当$\triangle ABC$ 为等边三角形时，AD 与 BC 的数量关系为 $AD=$__$\frac{1}{2}$__BC；

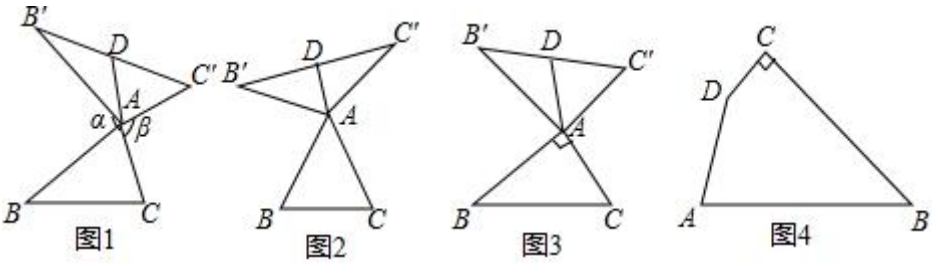
②如图 3，当$\angle BAC=90°$，$BC=8$ 时，则 AD 长为 __4__.

猜想论证：

（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明．

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$，$\angle C=90°$，$\angle A+\angle B=120°$，$BC=12\sqrt{3}$，$CD=6$，$DA=6\sqrt{3}$，在四边形内部是否存在点 P，使△PDC 与△PAB 之间满足小明探究的问题中的边角关系？若存在，请画出点 P 的位置（保留作图痕迹，不需要说明）并直接写出△PDC 的边 DC 上的中线 PQ 的长度；若不存在，说明理由．



【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；图形的全等；等腰三角形与直角三角形；多边形与平行四边形；矩形 菱形 正方形；平移、旋转与对称；推理能力．

【分析】（1）①证明△ADB' 是含有 30° 是直角三角形，可得 $AD=\frac{1}{2}AB'$ 即可解决问题；

②由 SAS 证明△BAC≌△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题；

（2）延长 AD 到 M，使得 $AD=DM$，连接 $B'M$、$C'M$，证明四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，再由 SAS 证明△BAC≌△$AB'M$，即可解决问题；

（3）延长 AD 交 BC 的延长线于 M，作 $BE\perp AD$ 于 E，作线段 BC 的垂直平分线交 BE 于 P，交 BC 于 F，连接 PA、PD、PC，作△PCD 的中线 PQ，连接 DF 交 PC 于 O，证明 $PA=PD$，$PB=PC$，再证明 $\angle APD+\angle BPC=180°$，由勾股定理求出 PQ 即可．

【解答】解：（1）①∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=AB'=AC'$，$\angle BAC=60°$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAB'+\angle CAC'=180°$，

∴$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=180°-\angle BAC=180°-60°=120°$，

∴$\angle B'=\angle C'=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC$，

故答案为：$\frac{1}{2}$；

②∵$\angle BAB'+\angle CAC'=180°$，

∴$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∵$\angle BAC=90°$，

∴$\angle B'AC'=\angle BAC=90°$，

在△BAC和△$B'AC'$中，$\begin{cases}AB=AB'\\ \angle BAC=\angle B'AC'\\ AC=AC'\end{cases}$，

∴△BAC≌△$B'AC'$（SAS），

∴$BC=B'C'$，

∵$B'D=DC'$，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{2}BC=4$，

故答案为：4；

（2）AD与BC的数量关系：$AD=\frac{1}{2}BC$；理由如下：

延长AD到M，使得$AD=DM$，连接$B'M$、$C'M$，如图1所示：

∵$B'D=DC'$，$AD=DM$，

∴四边形$AC'MB'$是平行四边形，

∴$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，$AC'=B'M=AC$，

∵$\angle BAB'+\angle CAC'=180°$，

∴$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle BAC=\angle AB'M$，

在△BAC和△$AB'M$中，$\begin{cases}AC=B'M\\ \angle BAC=\angle AB'M\\ AB=AB'\end{cases}$，

∴△BAC≌△$AB'M$（SAS），

∴$BC=AM$，

∴$AD=\frac{1}{2}BC$；

（3）存在；作 $BE\perp AD$ 于 E，作线段 BC 的垂直平分线交 BE 于 P，即为点 P 的位置；理由如下：

延长 AD 交 BC 的延长线于 M，线段 BC 的垂直平分线交 BC 于 F，连接 PA、PD、PC，作△PDC 的中线 PQ，连接 DF 交 PC 于 O，如图 4 所示：

∵$\angle A+\angle B=120°$，

∴$\angle ADC=150°$，

∴$\angle MDC=30°$，

在 Rt△DCM 中，∵$CD=6$，$\angle DCM=90°$，$\angle MDC=30°$，

∴$CM=2\sqrt{3}$，$DM=4\sqrt{3}$，$\angle M=90°-\angle MDC=60°$，

在 Rt△BEM 中，∵$\angle BEM=90°$，$BM=BC+CM=12\sqrt{3}+2\sqrt{3}=14\sqrt{3}$，$\angle MBE=90°-\angle M=30°$，

∴$EM=\frac{1}{2}BM=7\sqrt{3}$，

∴$DE=EM-DM=7\sqrt{3}-4\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

∵$DA=6\sqrt{3}$，

∴$AE=DE$，

∵$BE\perp AD$，

∴$PA=PD$，

∵PF 是线段 BC 的垂直平分线，

∴$PB=PC$，$PF\parallel CD$，

在 Rt△CDF 中，∵$CD=6$，$CF=\frac{1}{2}BC=6\sqrt{3}$，

∴$\tan\angle CDF=\frac{CF}{CD}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$，

∴$\angle CDF=60°$，

∴$\angle MDF=\angle MDC+\angle CDF=30°+60°=90°$，

∴$\angle ADF=90°=\angle AEB$，

∴$\angle CBE=\angle CFD$，

∵$\angle CBE=\angle PCF$，

∴$\angle CFD=\angle PCF=30°$，

∵$\angle CFD+\angle CDF=90°$，$\angle PCF+\angle CPF=90°$，

∴∠CPF＝∠CDF＝60°，

在△FCP 和△CFD 中，$\begin{cases}\angle CPF=\angle CDF\\ \angle PCF=\angle CFD\\ CF=CF\end{cases}$，

∴△FCP≌△CFD（AAS），

∴CD＝PF，

∵CD∥PF，

∴四边形 $CDPF$ 是矩形，

∴∠CDP＝90°，

∴∠ADP＝∠ADC﹣∠CDP＝60°，

∴△ADP 是等边三角形，

∴∠APD＝60°，

∵∠BPF＝∠CPF＝90°﹣30°＝60°，

∴∠BPC＝120°，

∴∠APD+∠BPC＝180°，

∴△PDC 与△PAB 之间满足小明探究的问题中的边角关系；

在 Rt△PDQ 中，∵∠PDQ＝90°，PD＝DA＝$6\sqrt{3}$，DN＝$\frac{1}{2}CD$＝3，

∴PQ＝$\sqrt{DN^2+PD^2}=\sqrt{3^2+(6\sqrt{3})^2}$＝$3\sqrt{13}$.

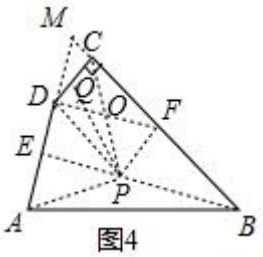


图4

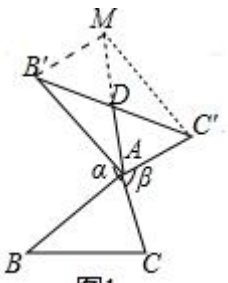
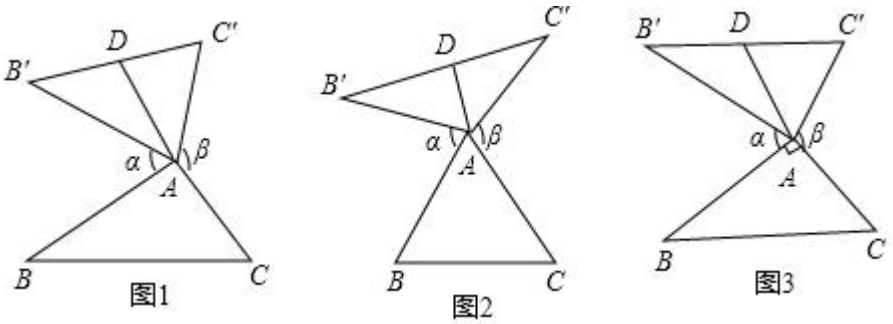


图1

【点评】本题是四边形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、含 30 度角直角三角形的性质、等边三角形的判定和性质、矩形的判定和性质、

勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形来解决问题．

6．（2020•汇川区模拟）我们定义：如图1、图2、图3，在△ABC中，把AB绕点A顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到AB'，把AC绕点A逆时针旋转β得到AC'，连接$B'C'$，当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC的“旋补三角形”，△$AB'C'$边$B'C'$上的中线AD叫做△ABC的“旋补中线”，点A叫做“旋补中心”．图1、图2、图3中的△$AB'C'$均是△ABC的“旋补三角形”．



（1）①如图2，当△ABC为等边三角形时，“旋补中线”AD与BC的数量关系为：AD＝__$\frac{1}{2}$__BC；

②如图3，当∠BAC＝90°，BC＝8时，则“旋补中线”AD长为 __4__．

（2）在图1中，当△ABC为任意三角形时，猜想“旋补中线”AD与BC的数量关系，并给予证明．

【考点】几何变换综合题．

【专题】几何图形．

【分析】（1）①首先证明△ADB'是含有30°是直角三角形，可得$AD=\frac{1}{2}AB'$即可解决问题；

②首先证明△BAC≌△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题；

（2）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．如图1中，延长AD到M，使得AD＝DM，连接$B'M$，$C'M$，首先证明四边形$AC'MB'$是平行四边形，再证明△BAC≌△$AB'M$，即可解决问题；

【解答】解：（1）①如图2中，

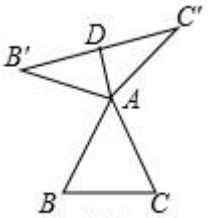


图2

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=AB'=AC'$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAC=60°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=120°$，

∴$\angle B'=\angle C'=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC$，

故答案为$\frac{1}{2}$.

②如图 3 中，

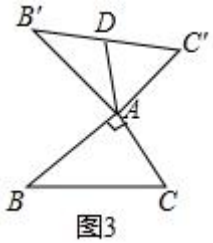


图3

∵$\angle BAC=90°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=\angle BAC=90°$，

∵$AB=AB'$，$AC=AC'$，

∴△BAC≌△$B'AC'$，

∴$BC=B'C'$，

∵$B'D=DC'$，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{2}BC=4$，

故答案为 4.

（2）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$.

理由：如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 $AD=DM$，连接 $B'M$，$C'M$

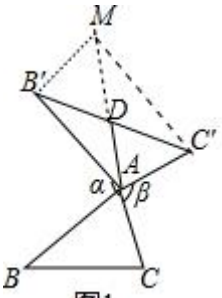


图1

∵$B'D=DC'$，$AD=DM$，

∴四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，

∴$AC'=B'M=AC$，

∵$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，

∴$\angle BAC=\angle MB'A$，∵$AB=AB'$，

∴$\triangle BAC\cong\triangle AB'M$，

∴$BC=AM$，

∴$AD=\frac{1}{2}BC$.

【点评】本题是四边形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、直角三角形 30 度角性质、等边三角形的判定和性质、矩形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

7.（2020•越秀区校级模拟）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$. 点 D 在边 AC 上（不与 A，C 重合），连接 BD，F 为 BD 中点.

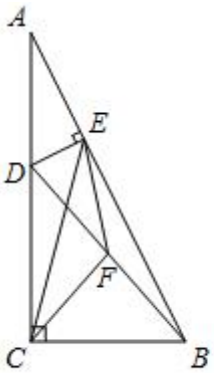


图1

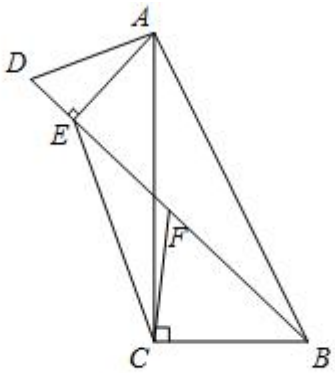
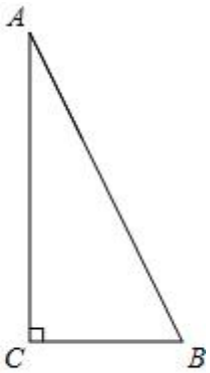


图2



备图

（1）若过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，连接 CF、EF、CE，如图 1．设 $CF=kEF$，则 $k=$

1 ；

（2）若将图 1 中的△ADE 绕点 A 旋转，使得 D、E、B 三点共线，点 F 仍为 BD 中点，如图 2．求证：$BE-DE=2CF$；

（3）若 $BC=6$，点 D 在边 AC 的三等分点处，将线段 AD 绕点 A 旋转，点 F 始终为 BD 中点，求线段 CF 长度的取值范围．

【考点】相似形综合题．

【分析】（1）根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半可得$CF=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，$CF=EF$，于是得 $k=1$；

（2）过点 C 作 CE 的垂线交 BD 于点 G，设 BD 与 AC 的交点为 Q．得$\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{1}{2}$，△$BCG$∽△$ACE$．所以$\frac{BC}{AC}=\frac{GB}{AE}=\frac{1}{2}$，$GB=DE$．在 Rt△$ECG$ 中，$CF=\frac{1}{2}EG$，$BE-DE=EG=2CF$；

（3）情况 1：当 $AD=\frac{1}{3}AC$时，取 AB 的中点 M，连接 MF 和 CM，最大为 $2+3\sqrt{5}$，最小值为 $3\sqrt{5}-2$．情况 2：当 $AD=\frac{2}{3}AC$时，取 AB 的中点 M，连接 MF 和 CM，最大值为 $4+3\sqrt{5}$，最小值为为 $3\sqrt{5}-4$．再综合情况 1 与情况 2 即可．

【解答】解：（1）∵$DE\perp AB$ 于 E，F 为 BD 中点．

∴$CF=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，

∴$CF=EF$．

∵$CF=kEF$，

∴$k=1$；

（2）如图 2，过点 C 作 CE 的垂线交 BD 于点 G，设 BD 与 AC 的交点为 Q．

由题意，$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$，

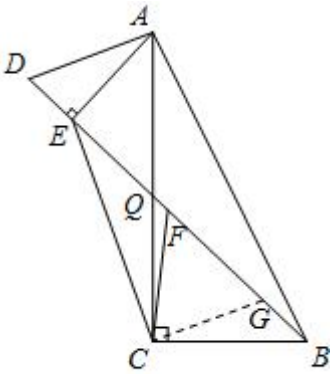


图2

$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{1}{2}$.

∵D、E、B 三点共线，

∴$AE\perp DB$.

∵$\angle BQC=\angle AQD$，$\angle ACB=90°$，

∴$\angle QBC=\angle EAQ$.

∵$\angle ECA+\angle ACG=90°$，$\angle BCG+\angle ACG=90°$，

∴$\angle ECA=\angle BCG$.

∴$\triangle BCG\backsim\triangle ACE$.

$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{GB}{AE}=\frac{1}{2}$.

∴$GB=DE$.

∵F 是 BD 中点，

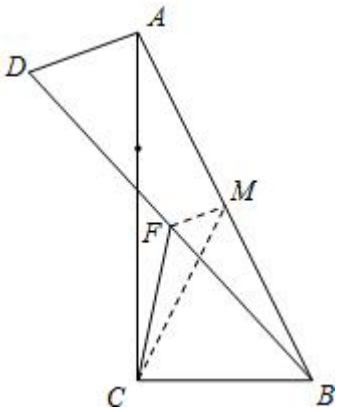
∴F 是 EG 中点.

在 Rt△ECG 中，$CF=\frac{1}{2}EG$，

∴$BE-DE=EG=2CF$；

（3）情况 1：如图，当 $AD=\frac{1}{3}AC$时，取 AB 的中点 M，连接 MF 和 CM，

∵$\angle ACB=90°$，$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$，且 $BC=6$，



∴AC＝12，AB= $6\sqrt{5}$.

∵M 为 AB 中点，∴CM= $3\sqrt{5}$，

∵AD= $\frac{1}{3}AC$，

∴AD＝4.

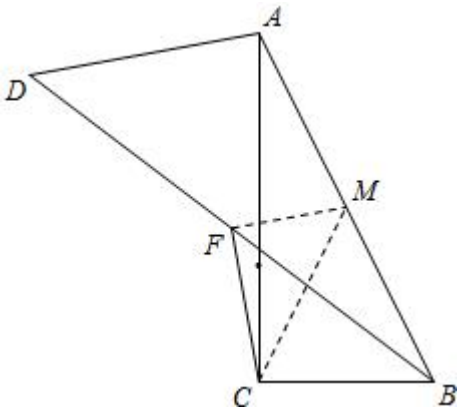
∵M 为 AB 中点，F 为 BD 中点，

∴FM= $\frac{1}{2}AD$ =2.

∴当且仅当 M、F、C 三点共线且 M 在线段 CF 上时 CF 最大，此时 CF＝CM+FM= $2+3\sqrt{5}$.

同理最小值为 $3\sqrt{5}-2$.

情况 2：如图，当 AD= $\frac{2}{3}AC$时，取 AB 的中点 M，连接 MF 和 CM，



类似于情况 1，可知 CF 的最大值为 $4+3\sqrt{5}$.

综合情况 1 与情况 2，可知当点 D 在靠近点 C 的

三等分点时，线段 CF 的长度取得最大值为 $4+3\sqrt{5}$.

同理最小值为 $3\sqrt{5}-4$.

【点评】本题主要考查了相似三角形的判定及性质．综合性较强，有一定难度，注意第（3）题分情况讨论．

8.（2018秋•吴兴区期末）我们定义：如图1，在△ABC中，把AB绕点A顺时针旋转α（0°＜α＜180°）并缩短一半得到AB'，把AC绕点A逆时针旋转β并缩短一半得到AC'，连接$B'C'$．当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC的“旋半三角形”，△$AB'C'$边$B'C'$上的中线AD叫做△ABC的“旋半中线”，点A叫做“旋半中心”．

特例感知：

（1）在图2，图3中，△$AB'C'$是△ABC的“旋半三角形”，AD是△ABC的“旋半中线”．

①如图2，当△ABC为等边三角形时，AD与BC的数量关系为AD＝__$\frac{1}{4}$__BC；

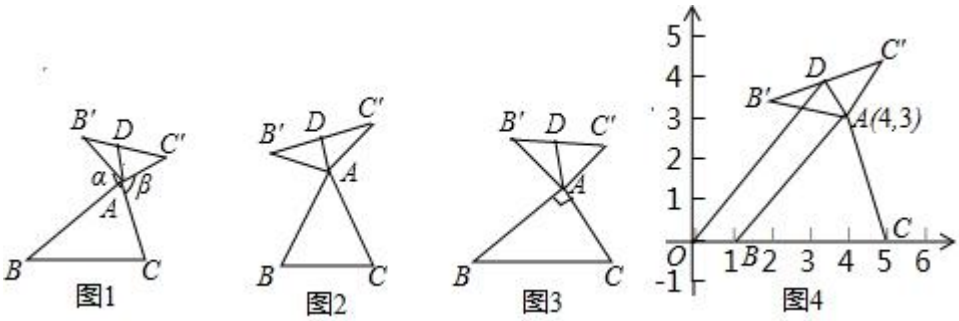
②如图3，当∠BAC＝90°，BC＝4时，则AD长为 __1__．

猜想论证：

（2）在图1中，当△ABC为任意三角形时，猜想AD与BC的数量关系，并给予证明．

拓展应用：

（3）如图4，在平面直角坐标系中，△ABC的坐标分别是A（4，3），B（1，0），C（5，0），△$AB'C'$是△ABC的“旋半三角形”，AD是△ABC的“旋半中线”，连接OD，求OD的最大值是多少？并请直接写出当OD最大时点D的坐标．



【考点】几何变换综合题．

【专题】几何综合题．

【分析】（1）①首先证明△ADB'是含有30°是直角三角形，可得AD=$\frac{1}{2}AB'$即可解决问题；

②首先证明△BAC∽△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题；

（2）结论：AD＝BC．如图1中，延长AD到M，使得AD＝DM，连接$B'M$，$C'M$，首先证明四边形$AC'MB'$是平行四边形，再证明△BAC∽△$AB'M$，即可解决问题；

（3）如图4中，先确定OD最大值时，D的位置，D在以A为圆心，以1为半径的圆上，则当D运动到直线OA与半圆相交时OD最大，求此时OD的长并确定其坐标．

【解答】解：（1）①如图 2 中，

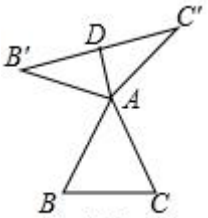


图2

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=2AB'=2AC'$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAC=60^\circ$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180^\circ$，

∴$\angle B'AC'=120^\circ$，

∴$\angle B'=\angle C'=30^\circ$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{4}BC$，

故答案为：$\frac{1}{4}$.

②如图 3 中，

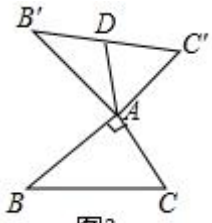


图3

∵$\angle BAC=90^\circ$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180^\circ$，

∴$\angle B'AC'=\angle BAC=90^\circ$，

∵$AB=\frac{1}{2}AB'$，$AC=\frac{1}{2}AC'$，

∴$\triangle BAC\backsim\triangle B'AC'$，

∴$BC=2B'C'$，

∵$B'D=DC'$，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{4}BC=\frac{1}{4}\times 4=1$，

故答案为：1；

（2）结论：$AD=\frac{1}{4}BC$.

理由：如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 $AD=DM$，连接 $B'M$，$C'M$，

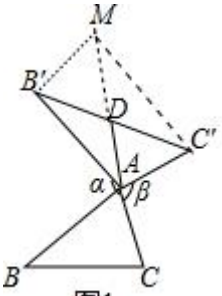


图1

∵$B'D=DC'$，$AD=DM$，

∴四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，

∴$AC'=B'M=2AC$，

∵$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，

∴$\angle BAC=\angle MB'A$，

∵$AB=2AB'$，

∴$\triangle BAC\backsim\triangle AB'M$，

∴$BC=2AM$，

∴$AD=\frac{1}{4}BC$.

（3）如图 4，

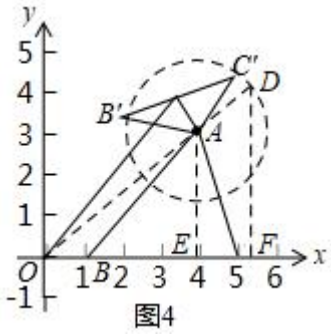


图4

∵$AD=\frac{1}{4}BC$，$BC=4$，

∴$AD=1$，

∴D 在以 A 为圆心，以 1 为半径的圆上，

∴当 D 运动到直线 OA 与半圆相交时 OD 最大，

∵A（4，3），

∴OA＝5，

∵AD＝1，

∴OD 的最大值是 6．

过 A 作 $AE\perp x$ 轴于 E，过 D 作 $DF\perp x$ 轴于 F，

∴$AE\parallel DF$，

∴$\triangle AOE\backsim\triangle DOF$，

∴$\frac{OA}{OD}=\frac{OE}{OF}=\frac{5}{6}=\frac{AE}{DF}$，

∵OE＝4，AE＝3，

∴$OF=\frac{24}{5}$，$DF=\frac{18}{5}$，

∴D（$\frac{24}{5}$，$\frac{18}{5}$）．

【点评】本题是几何变换综合题，主要考查了新定义“旋半三角形”和“旋半中线”、全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、直角三角形 30 度角性质、等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题．

9．（2018 秋•丹江口市期末）已知，$\triangle ABC$ 中，AB＝6，AC＝4，M 是 BC 的中点，分别以 AB，AC 为边向外作正方形 $ABDE$，正方形 $ACFG$，连接 EG，MA 的延长线交 EG 于点 N，

（1）如图 1，若$\angle BAC$＝90°，求证：$AM=\frac{1}{2}EG$，$AM\perp EG$；

（2）将正方形 $ACFG$ 绕点 A 顺时针旋转至如图 2，（1）中结论是否仍然成立？请说明理由；

（3）将正方形 $ACFG$ 绕点 A 顺时针旋转至 B，C，F 三点在一条直线上，请画出图形，并直接写出 AN 的长．

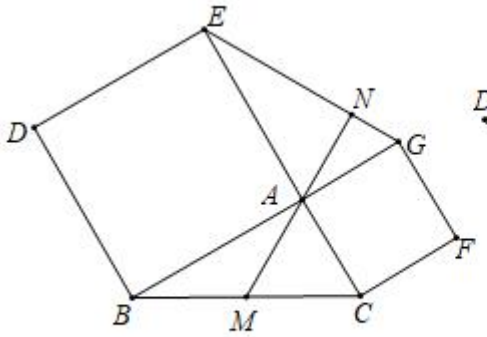


图1

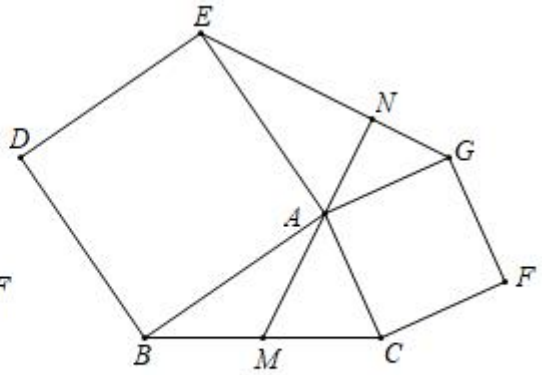


图2

【考点】四边形综合题．

【专题】矩形 菱形 正方形．

【分析】（1）方法一：如图 1 中，直接证明△ABC≌△AEG 即可解决问题；

方法二：如图 2 中，如图，延长 AM 至点 H，使 AM＝MH，连接 BH．证明△EAG≌△ABH 即可解决问题．

（2）如图 3 中，结论不变．证明方法类似方法二．

（3）分两种情形分别求解即可解决问题．

【解答】（1）证明：方法一：如图 1 中，

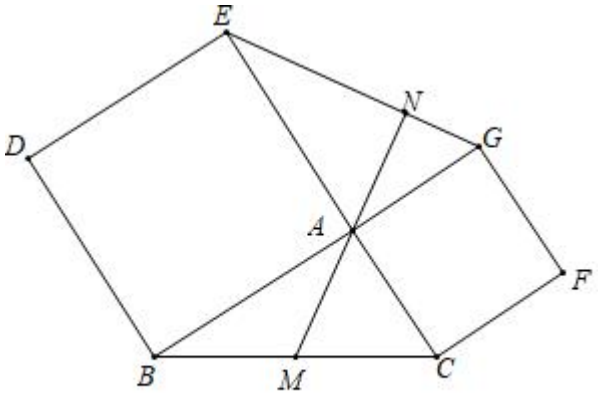


图1

∵四边形 $ABDE$，四边形 $ACFG$ 均为正方形，

∴∠BAE＝∠CAG＝90°＝∠BAC＝∠EAG，

且 AB＝AE，AC＝AG，

在△ABC 和△AEG 中，

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAC = \angle EAG, \\ AC = AG \end{cases}$$

∴△*ABC*≌△*AEG*（*SAS*），

∴*BC*＝*EG*，∠*CBA*＝∠*AEG*，

又∵*M* 是 *AB* 的中点，

∴$AM=BM=\frac{1}{2}BC$，

∴$AM=\frac{1}{2}EG$，

∠*M BA*＝∠*MAB*＝∠*AEN*，

∴∠*ANE*＝180°﹣（∠*NEA*+∠*EAN*）＝180°﹣（∠*BAM*+∠*EAN*）＝180°﹣（180°﹣90°）＝90°，

∴*AM*⊥*EG*.

方法二：如图，延长 *AM* 至点 *H*，使 *AM*＝*MH*，连接 *BH*.

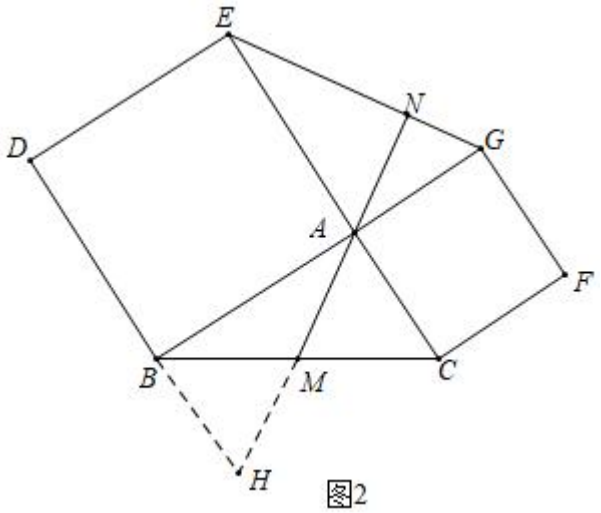


图2

在△*ACM* 和△*HBM* 中，

$$\begin{cases} AM = HM \\ \angle AMC = \angle HMB, \\ CM = BM \end{cases}$$

△*ACM*≌△*HBM*（*SAS*），

∴*BH*＝*AC*，∠*BHM*＝∠*CAM*，

∴*AC*∥*BH*，

∴∠*HBA*＝∠*CAB*＝90°

∵四边形 $ABDE$，四边形 $ACFG$ 均为正方形，

∴$\angle BAE=\angle CAG=90°=\angle BAC=\angle EAG$，

且 $AB=AE$，$AC=AG$，

∴$BH=AG$，

在△EAG 和△ABH 中，

$$\begin{cases}AE=AB\\ \angle EAG=\angle ABH\\ AG=BH\end{cases}，$$

∴△EAG≌△ABH（SAS），

∴$EG=BC$，$\angle NEA=\angle HAB$，

∴$\angle ANE=180°-(\angle NEA+\angle EAN)=180°-(\angle HAB+\angle EAN)=180°-(180°-90°)=90°$，

∴$AM\perp EG$，

∵$\angle BAC=90°$，AM 为 BC 中点，

∴$AM=\frac{1}{2}BC$，

∴$AM=\frac{1}{2}EG$.

（2）如图 3 中，结论不变.

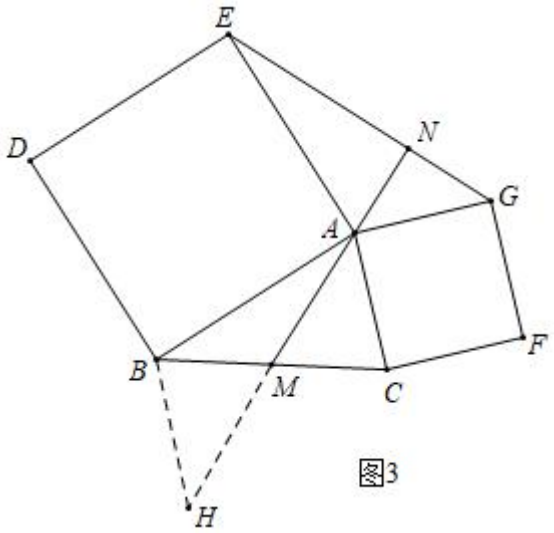


图3

理由：在△ACM 和△HBM 中，

$$\begin{cases} AM = HM \\ \angle AMC = \angle HMB, \\ CM = BM \end{cases}$$

△*ACM*≌△*HBM*（*SAS*），

∴*BH*＝*AC*，∠*BHM*＝∠*CAM*，

∴*AC*∥*BH*，

∴∠*HBA*+∠*CAB*＝180°，

∵四边形 *ABDE*，四边形 *ACFG* 均为正方形，

∴∠*BAE*＝∠*CAG*＝90°，

∴∠*BAC*+∠*EAG*＝180°，

∴∠*ABH*＝∠*EAG*，

且 *AB*＝*AE*，*AC*＝*AG*，

∴*BH*＝*AG*，

在△*EAG* 和△*ABH* 中，

$$\begin{cases} AE = AB \\ \angle EAG = \angle ABH, \\ AG = BH \end{cases}$$

△*EAG*≌△*ABH*（*SAS*），

∴*EG*＝*AH*，∠*GEA*＝∠*HAB*，

∴∠*ANE*＝180°﹣（∠*NEA*+∠*EAN*）＝180°﹣（∠*HAB*+∠*EAN*）＝180°﹣（180°﹣90°）＝90°，

∴*AM*⊥*EG*，

∵*AM* 为 *BC* 中点，

∴*AM*＝$\frac{1}{2}$*BC*，

∴*AM*＝$\frac{1}{2}$*EG*.

（3）①如图 4﹣1 中，当点 *F* 在 *BC* 的延长线上时，作 *CH*⊥*AM* 于 *H*.

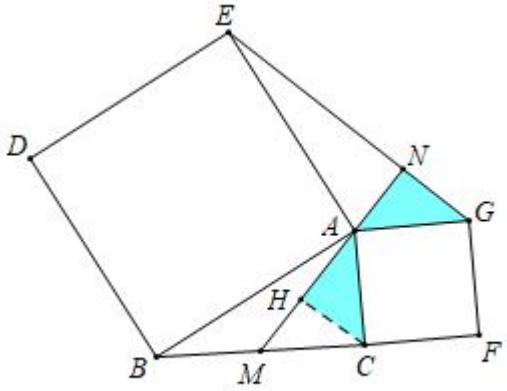


图4-1

易证：△ANG≌△CHA，可得 $AN=CH$，

在 Rt△ACM 中，∵$AC=4$，$CM=\sqrt{5}$，

∴$AM=\sqrt{4^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{21}$，

∵$\frac{1}{2}\cdot AM\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CM$，

∴$CH=\frac{4\sqrt{105}}{21}$，

∴$AN=CH=\frac{4\sqrt{105}}{21}$.

②如图 4﹣2 中，当点 F 在线段 BC 上时，同法可得 $AN=CH=\frac{4\sqrt{105}}{21}$

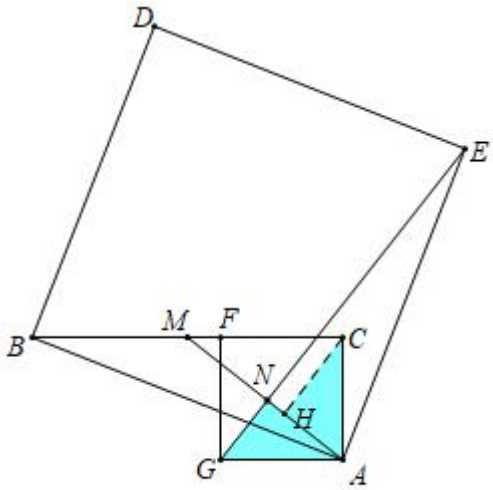


图4-2

综上所述，AN 的值为$\frac{4\sqrt{105}}{21}$.

【点评】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属

于中考常压轴题．

10．（2019•潮阳区模拟）已知如图 1，在△ABC 中，∠ACB＝90°，BC＝AC，点 D 在 AB 上，DE⊥AB 交 BC 于 E，点 F 是 AE 的中点

（1）写出线段 FD 与线段 FC 的关系并证明；

（2）如图 2，将△BDE 绕点 B 逆时针旋转α（0°＜α＜90°），其它条件不变，线段 FD 与线段 FC 的关系是否变化，写出你的结论并证明；

（3）将△BDE 绕点 B 逆时针旋转一周，如果 BC＝4，BE＝$2\sqrt{2}$，直接写出线段 BF 的范围．

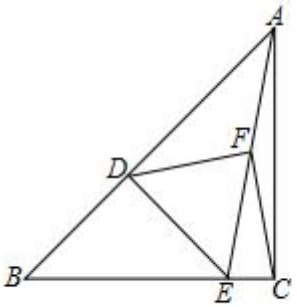


图 1

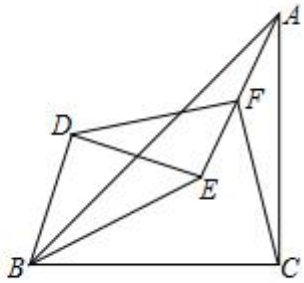


图 2

【考点】三角形综合题．

【专题】几何综合题．

【分析】（1）结论：FD＝FC，DF⊥CF．理由直角三角形斜边中线定理即可证明；

（2）如图 2 中，延长 AC 到 M 使得 CM＝CA，延长 ED 到 N，使得 DN＝DE，连接 BN、BM．EM、AN，延长 ME 交 AN 于 H，交 AB 于 O．想办法证明△ABN≌△MBE，推出 AN＝EM，再利用三角形中位线定理即可解决问题；

（3）分别求出 BF 的最大值、最小值即可解决问题；

【解答】解：（1）结论：FD＝FC，DF⊥CF．

理由：如图 1 中，

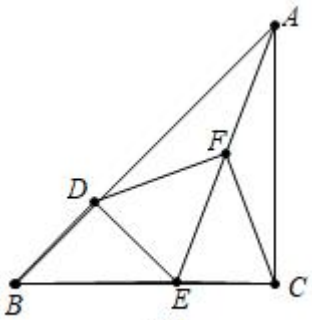


图1

∵∠ADE＝∠ACE＝90°，AF＝FE，

∴DF＝AF＝EF＝CF，

∴∠FAD＝∠FDA，∠FAC＝∠FCA，

∴∠DFE＝∠FDA+∠FAD＝2∠FAD，∠EFC＝∠FAC+∠FCA＝2∠FAC，

∵CA＝CB，∠ACB＝90°，

∴∠BAC＝45°，

∴∠DFC＝∠EFD+∠EFC＝2（∠FAD+∠FAC）＝90°，

∴DF＝FC，DF⊥FC.

（2）结论不变.

理由：如图 2 中，延长 AC 到 M 使得 CM＝CA，延长 ED 到 N，使得 DN＝DE，连接 BN、BM．EM、AN，延长 ME 交 AN 于 H，交 AB 于 O.

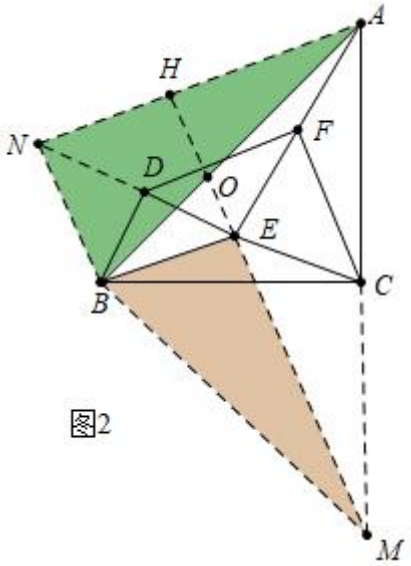


图2

∵BC⊥AM，AC＝CM，

∴BA＝BM，同法 BE＝BN，

∵∠ABM＝∠EBN＝90°，

∴∠NBA＝∠EBM，

∴△ABN≌△MBE（SAS），

∴AN＝EM，

∴∠BAN＝∠BME，

∵$AF=FE$，$AC=CM$，

∴$CF=\frac{1}{2}EM$，$FC\parallel EM$，同法 $FD=\frac{1}{2}AN$，$FD\parallel AN$，

∴$FD=FC$，

∵$\angle BME+\angle BOM=90°$，$\angle BOM=\angle AOH$，

∴$\angle BAN+\angle AOH=90°$，

∴$\angle AHO=90°$，

∴$AN\perp MH$，$FD\perp FC$.

方法二：延长 CF 到 M．使得 $CF=FM$，连接 EM，CD，CE，DM，证明△CDM 是等腰

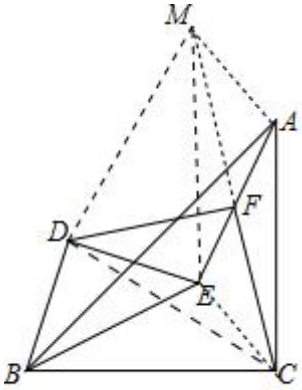


图 2

直角三角形即可解决问题．

（3）如图 3 中，当点 E 落在 AB 上时，BF 的长最大，最大值$=3\sqrt{2}$

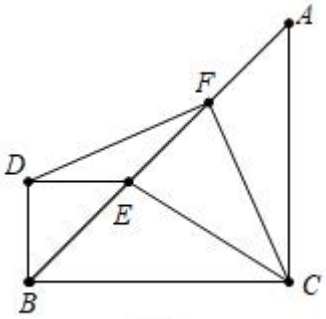


图3

如图 4 中，当点 E 落在 AB 的延长线上时，BF 的值最小，最小值$=\sqrt{2}$.

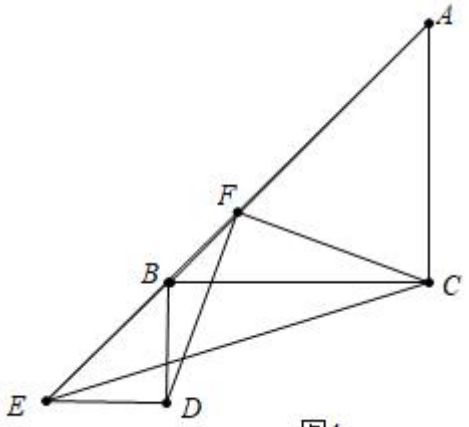


图4

综上所述，$\sqrt{2} \le BF \le 3\sqrt{2}$.

【点评】本题考查等腰直角三角形的性质、旋转变换、全等三角形的判定和性质、直角三角形斜边中线的性质、三角形中位线定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

11.（2019•蚌埠二模）定义：如图 1，在△*ABC* 和△*ADE* 中，*AB*＝*AC*＝*AD*＝*AE*，当∠*BAC*+∠*DAE*＝180°时，我们称△*ABC* 与△*DAE* 互为“顶补等腰三角形”，△*ABC* 的边 *BC* 上的高线 *AM* 叫做△*ADE* 的“顶心距”，点 *A* 叫做“旋补中心”.

特例感知：

（1）在图 2，图 3 中，△*ABC* 与△*DAE* 互为“顶补三角形”，*AM*，*AN* 是“顶心距”.

①如图 2，当∠*BAC*＝90°时，*AM* 与 *DE* 之间的数量关系为 *AM*＝__$\frac{1}{2}$__*DE*；

②如图 3，当∠*BAC*＝120°，*BC*＝6 时，*AN* 的长为 __3__.

猜想论证：

（2）在图 1 中，当∠*BAC* 为任意角时，猜想 *AM* 与 *DE* 之间的数量关系，并给予证明.

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 *ABCD*，*AD*＝*AB*，*CD*＝*BC*，∠*B*＝90°，∠*A*＝60°，*CD*＝2，在四边形 *ABCD* 的内部是否存在点 *P*，使得△*PAD* 与△*PBC* 互为“顶补等腰三角形”？若存在，请给予证明，并求△*PBC* 的“顶心距”的长；若不存在，请说明理由.

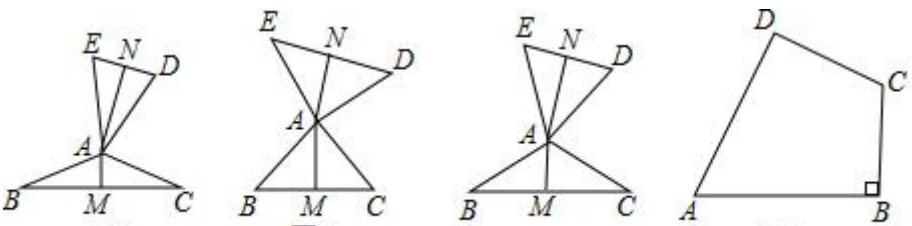


图1 图2 图3 图4

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题．

【分析】（1）①只要证明△BAC≌△EAD，推出 $BC=DE$，由 $AM\perp BC$，推出 $BM=CM$，推出 $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}DE$；

②只要证明△AMC≌△DNA，即可解决问题；

（2）结论：$DE=2AM$，只要证明△AMC≌△DNA 即可；

（3）如图 4 中，结论：存在．连接 AC，取 AC 的中点 P，连接 PD、PB、作 $PM\perp AD$ 于 M．点 P 即为所求的点；

【解答】解：（1）①如图 2 中，

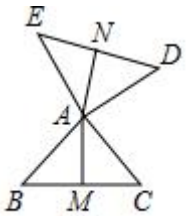


图2

∵$AB=AC=AE=AD$，$\angle BAC=\angle EAD=90°$，

∴△BAC≌△EAD，

∴$BC=DE$，

∵$AM\perp BC$，

∴$BM=CM$，

∴$AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}DE$．

故答案为$\frac{1}{2}$．

②如图 3 中，

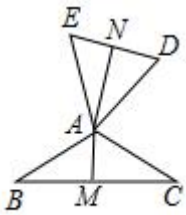


图3

∵$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，$AM\perp BC$，

∴$\angle CAM=60°$，$BM=CM=3$

∵$\angle BAC+\angle EAD=180°$，

∴$\angle EAD=60°$，

∵$AE=AD$，

∴$\triangle EAD$是等边三角形，

∴$\angle D=60°$，

∴$\angle AMC=\angle AND=90°$，$\angle CAM=\angle D$，$AC=AD$，

∴$\triangle AMC\cong\triangle DNA$，

∴$AN=CM=3$，

故答案为3．

（2）如图1中，结论：$DE=2AM$．

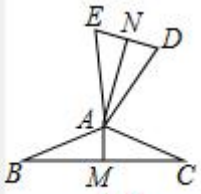


图1

∵$AD=AE$，$AN\perp DE$，

∴$EN=DN$，$\angle DAN=\angle NAE$，同法可证：$\angle CAM=\angle BAM$，

∵$\angle BAC+\angle EAD=180°$，

∴$\angle DAN+\angle CAM=90°$，

∵$\angle CAM+\angle C=90°$，

∴$\angle DAN=\angle C$，

∵$\angle AND=\angle AMC=90°$，$AC=DA$，

∴$\triangle AMC\cong\triangle DNA$，

∴$AM=DN$，

∴$DE=2AM$．

（3）如图4中，结论：存在．

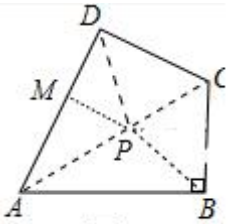


图4

理由：连接 AC，取 AC 的中点 P，连接 PD、PB、作 $PM\perp AD$ 于 M.

∵$AD=AB$，$CD=CB$，$AC=AC$，

∴$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，

∴$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$\angle DAC=\angle BAC=30°$，

∴$\angle ACD=\angle ACB=60°$，

∵$PA=PC$，

∴$PA=PD=PC=PB$，

∴$\triangle PCD$，$\triangle PCB$ 都是等边三角形，

∴$\angle CPD=\angle CPB=60°$，

∴$\angle APD=120°$，

∴$\angle APD+\angle CPB=180°$，

∴$\triangle APD$ 和$\triangle PBC$ 是“顶补等腰三角形”，

在$\triangle ACD$ 中，易证 PM 是中位线，

∴$PM=\frac{1}{2}CD=1$

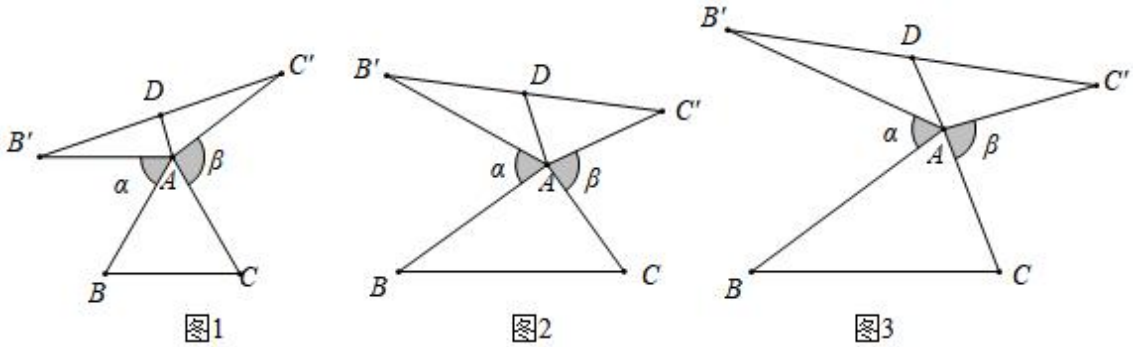
【点评】本题考查四边形综合题、等腰三角形的性质、全等三角形的判定和性质、直角三角形斜边中线的性质、等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

12.（2018 春•成华区期末）我们定义：在$\triangle ABC$ 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，我们称$\triangle AB'C'$叫$\triangle ABC$ 的“旋补三角形”，$\triangle AB'C'$的边 $B'C'$上的中线 AD 叫做$\triangle ABC$ 的“旋补中线”．下面各图中，$\triangle AB'C'$均是$\triangle ABC$ 的“旋补三角形”，AD 均是$\triangle ABC$ 的“旋补中线”.

（1）如图 1，若$\triangle ABC$ 为等边三角形，$BC=8$，则 AD 的长等于；

（2）如图 2，若$\angle BAC=90°$，求证：$AD=\frac{1}{2}BC$；

（3）如图 3，若△ABC 为任意三角形，（2）中结论还成立吗？如果成立，给予证明；如果不成立，说明理由．



【考点】几何变换综合题．

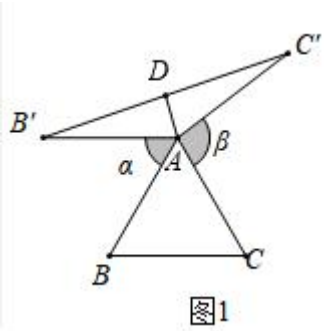
【专题】几何综合题．

【分析】（1）首先证明△ADB' 是含有 30° 是直角三角形，可得 $AD=\frac{1}{2}AB'$ 即可解决问题．

（2）首先证明△BAC≌△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题；

（3）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．如图 1 中，延长 AD 到 A'，使得 $AD=DA'$，连接 $B'A'$，$C'A'$，首先证明四边形 $AC'A'B'$ 是平行四边形，再证明△BAC≌△$AB'A'$，即可解决问题；

【解答】解：（1）如图 1 中，



∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=AB'=AC'$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAC=60°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=120°$，

∴$\angle B'=\angle C'=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC=4$，

（2）证明：如图 2 中，

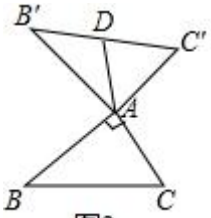


图2

∵AB 绕点 A 旋转得到 AB'，AC 绕点 A 旋转得到 AC'，

∴$AB'=AB$，$AC'=AC$，

∵$\angle BAC=90°$，$\alpha+\beta=180°$，$\angle B'AC'=360°-(\alpha+\beta)-\angle BAC$，

∴$\angle B'AC'=360°-180°-90°=90°$，

∴$\angle BAC=\angle B'AC'$，

∴$\triangle BAC\cong\triangle B'AC'$（$SAS$）

∴$BC=B'C'$，

∵AD 是$\triangle AB'C'$边 $B'C'$上的中线，$\angle B'AC'=90°$．

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'$．

∴$AD=\frac{1}{2}BC$.

（3）结论 $AD=\frac{1}{2}BC$ 成立．

理由：如图 3 中，延长 AD 到 A'，使得 $AD=DA'$，连接 $B'A'$，$C'A'$．

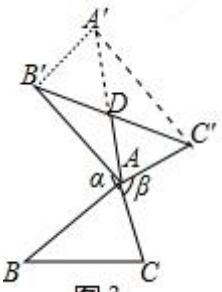


图 3

∴$AD=\frac{1}{2}AA'$，

∵$B'D=DC'$，$AD=DA'$，

∴四边形 $AB'A'C'$ 是平行四边形，

∴$AC'=B'A'=AC$，

∵$\angle BAC+\angle B'AC'=360°-180°=180°$，$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，

∴$\angle BAC=\angle AB'A'$，∵$AB=AB'$，

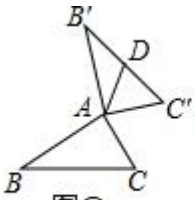
∴$\triangle BAC\cong\triangle AB'A'$（$SAS$）

∴$BC=AA'$，

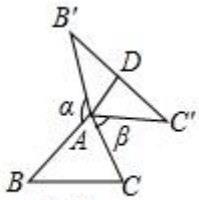
∴$AD=\frac{1}{2}BC$.

【点评】本题考查四边形综合题、全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、直角三角形 30 度角性质、等边三角形的判定和性质、矩形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

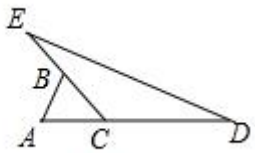
13.（2018 春•南京期末）将△ABC 的边 AB 绕点 A 顺时针旋转α得到 AB'，边 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，α+β=180°，连接 $B'C'$，作△$AB'C'$ 的中线 AD.



图①



图②



图③

【初步感知】

（1）如图①，当∠BAC=90°，BC=4 时，AD 的长为 __2__；

【探究运用】

（2）如图②，△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并证明.

【应用延伸】

（3）如图③，已知等腰△ACB，$AC=BC=m$，延长 AC 到 D，延长 CB 到 E，使 $CD=CE=n$，将△CED 绕点 C 顺时针旋转一周得到△$CE'D'$，连接 BE'、AD'，若∠CBE'=90°，求 AD' 的长度（用含 m、n 的代数式表示）.

【考点】几何变换综合题.

【专题】几何综合题.

【分析】（1）只要证明 $BC=B'C'=4$，再利用直角三角形斜边中线的性质即可解决问

题；

（2）如图①中，延长 AD 到 E，使得 $DE=AD$．连接 EB'，EC'．只要证明△$AB'E$≌△BAC，即可解决问题；

（3）分两种情形，利用（2）中结论以及勾股定理计算即可；

【解答】（1）解：∵α+β=90°，

∴∠BAB'+∠CAC'=180°，

∵∠BAC=90°，

∴∠$B'AC'$=90°，

∴$AB=AB'$ $AC=AC'$，∠BAC=∠$B'AC'$，

∴△ABC≌△$AB'C'$，

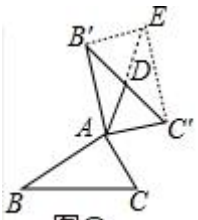
∴$BC=B'C'=4$，

∵AD 是直角三角形△$AB'C'$ 斜边的中线，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=2$．

故答案为 2．

（2）证明：如图①中，延长 AD 到 E，使得 $DE=AD$．连接 EB'，EC'．



图①

∵$B'D=DC'$，$AD=DE$，

∴四边形 $AC'EB'$ 是平行四边形，

∴$B'E$∥AC'，$B'E=AC'=AC$，

∴∠$AB'E$+∠$B'AC'$=180°，

∵α+β=180°，

∴∠BAC+∠$B'AC'$=180°，

∴∠$AB'E$=∠BAC，

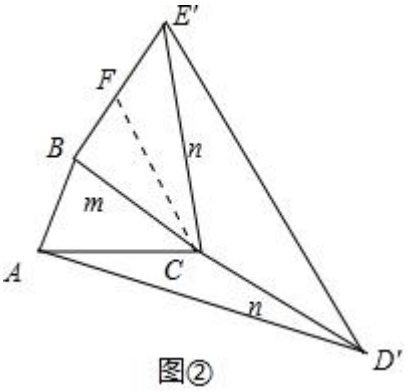
∵$AB'=AB$，

∴△$AB'E$≌△BAC，

∴$AE=BC$，

∴$AD=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}BC$.

（3）①如图②中，作△BCE' 的中线 CF.



图②

在 Rt△BCE' 中，$BE'=\sqrt{n^2-m^2}$，

∴$BF=FE'=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{2}$，

在 Rt△BCF 中，$CF=\sqrt{m^2+\frac{n^2-m^2}{4}}=\frac{\sqrt{3m^2+n^2}}{2}$，

由（2）可知：$AD'=2CF=\sqrt{3m^2+n^2}$.

②如图③中，作△CBE' 的中线 CF，延长 CF 到 G，使得 $FG=CF$，则四边形 $CBGE'$ 是平行四边形，

∴$CB\parallel GE'$，$CB=GE'=AC$，

∴$\angle CE'G+\angle BCE'=180°$，

∵$\angle BCG+\angle E'CD'=180°$，

∴$\angle BCG+\angle ECG+\angle BCG+\angle D'CG=180°$，

∴$\angle D'CA+\angle BCE'=180°$，

∴$\angle GE'C=\angle D'CA$，

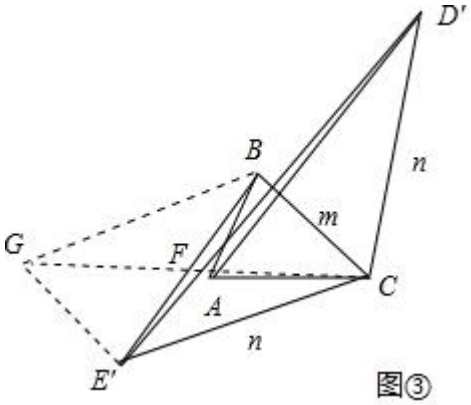
∵$CD'=CE'$，

∴△CGE' ≌△$D'AC$（SAS），

∴$AD'=CG=2CF$，

由①可知，$CF=\frac{\sqrt{3m^2+n^2}}{2}$，

$\therefore AD' = 2CF = \sqrt{3m^2+n^2}$.



图③

【点评】本题考查几何变换综合题、旋转变换、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

14.（2018•濮阳二模）（1）问题发现

在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，分别以 AB 和 AC 为斜边，向△ABC 的外侧作等腰直角三角形，如图 1 所示，其中 $DF\perp AB$ 于点 F，$EG\perp AC$ 于点 G，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME.

填空：线段 AF，AG，AB 之间的数量关系是__$AF=AG=\frac{1}{2}AB$__；

线段 MD，ME 之间的数量关系是__$MD=ME$__.

（2）拓展探究

在任意三角形 ABC 中，分别以 AB 和 AC 为斜边向△ABC 的外侧作等腰直角三角形，如图 2 所示，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME，则 MD 与 ME 具有怎样的数量关系和位置关系？并说明理由；

（3）解决问题

在任意三角形 ABC 中，分别以 AB 和 AC 为斜边，向△ABC 的内侧作等腰直角三角形，如图 3 所示，M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME，若 $MD=2$，请直接写出线段 DE 的长.

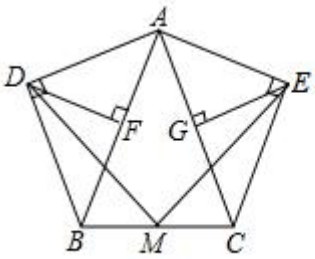


图1

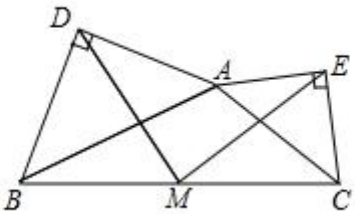


图2

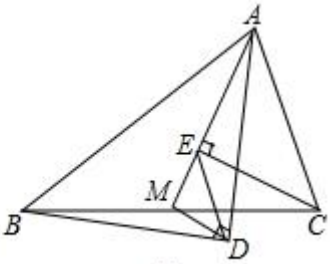


图3

【考点】三角形综合题.

【专题】几何图形.

【分析】（1）由条件可以通过三角形全等和轴对称的性质，直角三角形的性质得出结论；

（2）取 AB、AC 的中点 F、G，连接 DF，MF，EG，MG，根据三角形的中位线的性质和等腰直角三角形的性质就可以得出四边形 $AFMG$ 是平行四边形，从而得出△DFM≌△MGE，根据其性质就可以得出结论；

（3）取 AB、AC 的中点 F、G，连接 DF，MF，EG，MG，DF 和 MG 相交于 H，根据三角形的中位线的性质 K 可以得出△DFM≌△MGE，由全等三角形的性质和勾股定理就可以得出答案.

【解答】解：（1）$AF=AG=\frac{1}{2}AB$，理由如下：

∵△ADB 和△AEC 是等腰直角三角形，

∴∠ABD＝∠DAB＝∠ACE＝∠EAC＝45°，∠ADB＝∠AEC＝90°

∵在△ADB 和△AEC 中，

$$\begin{cases}\angle ADB=\angle AEC\\ \angle ABD=\angle ACE\\ AB=AC\end{cases},$$

∴△ADB≌△AEC（AAS），

∴$BD=CE$，$AD=AE$，

∵$DF\perp AB$ 于点 F，$EG\perp AC$ 于点 G，

∴$AF=BF=DF=\frac{1}{2}AB$，$AG=GC=GE=\frac{1}{2}AC$.

∵$AB=AC$，

∴$AF=AG=\frac{1}{2}AB$；

$MD=ME$，理由如下：

∵M 是 BC 的中点，

∴$BM=CM$.

∵$AB=AC$，

∴∠ABC＝∠ACB，

∴∠ABC+∠ABD＝∠ACB+∠ACE，

即∠DBM＝∠ECM.

在△DBM和△ECM中，

$$\begin{cases} BD = CE \\ \angle DBM = \angle ECM, \\ BM = CM \end{cases}$$

∴△DBM≌△ECM（SAS），

∴MD＝ME；

故答案为：AF＝AG＝$\frac{1}{2}AB$；MD＝ME；

（2）MD＝ME，MD⊥ME.

理由如下：

取AB，AC的中点F，G，连接DF，FM，MG，EG，设AB与DM交于点H，如图2，

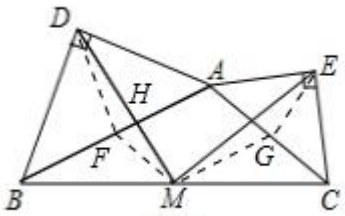


图2

∵△ADB和△AEC都是等腰直角三角形，

∴∠DFA＝∠EGA＝90°，DF＝AF＝$\frac{1}{2}AB$，EG＝AG＝$\frac{1}{2}AC$.

∵点M是BC的中点，

∴FM和MG都是△ABC的中位线，

∴AF∥MG，AF＝DF＝MG，

∴四边形$AFMG$是平行四边形，

∴FM＝AG＝GE，∠AFM＝∠AGM，

∴∠DFM＝∠MGE.

在△DFM和△MGE中，

FM＝GE，∠DFM＝∠MGE，DF＝MG，

∴△DFM≌MGE（SAS），

∴MD＝ME，∠FDM＝∠GME.

∴∠BHM＝90°＋∠FDM＝90°＋∠GME，∠BHM＝∠HMG＝∠DME+∠GME，

∴∠DME＝90°，即MD⊥ME；

（3）线段 DE 的长为 $2\sqrt{2}$，理由如下：

分别取 AB，AC 的中点 F，G，连接 MF，DF，MG，EG，设 DF 和 MG 交于点 H，如图3，

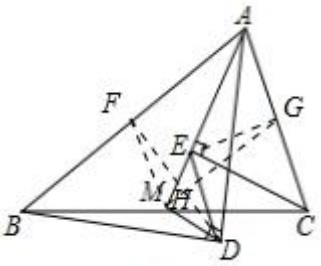


图3

∵△ADB 和△AEC 都是等腰直角三角形，

∴∠DFA＝∠EGA＝90°，$DF=AF=\frac{1}{2}AB$，$EG=AG=\frac{1}{2}AC$.

∵点 M 是 BC 的中点，

∴FM 和 MG 都是△ABC 的中位线，

∴AF∥MG，$AF=DF=MG$，

∴四边形 $AFMG$ 是平行四边形，

∴$FM=AG=GE$，∠AFM＝∠AGM，

∴∠DFM＝∠MGE.

在△DFM 和△MGE 中，

$FM=GE$，∠DFM＝∠MGE，$DF=MG$，

∴△DFM≌MGE（SAS）.

∴$MD=ME$，∠FDM＝∠GME.

∵DF⊥AB 即∠FHM＝90°.

又∵∠FHM＝∠HMD+∠FDM，

∴∠FHM＝∠HMD+∠GME＝∠DME＝90°，

∴△DME 是等腰直角三角形，

在 Rt△DME 中，$MD=ME=2$，由勾股定理，得 $DE=2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了三角形综合题，等腰直角三角形的性质的运用，等腰三角形的性质的运用，全等三角形的判定及性质的运用，三角形的中位线的性质的运用，直角三角形的斜边上的中线的性质的运用，平行四边形的判定及性质的运用，解答时根据三角形的中位线的性质制造全等三角形是解答本题的关键.

15．（2018•东河区二模）我们定义：如图 1，在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$．当α+β＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，△$AB'C'$边 $B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋补中线”，点 A 叫做“旋补中心”．

特例感知：

（1）在图 2，图 3 中，△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，AD 是△ABC 的“旋补中线”．

①如图 2，当△ABC 为等边三角形时，AD 与 BC 的数量关系为 AD＝__$\frac{1}{2}$__BC；

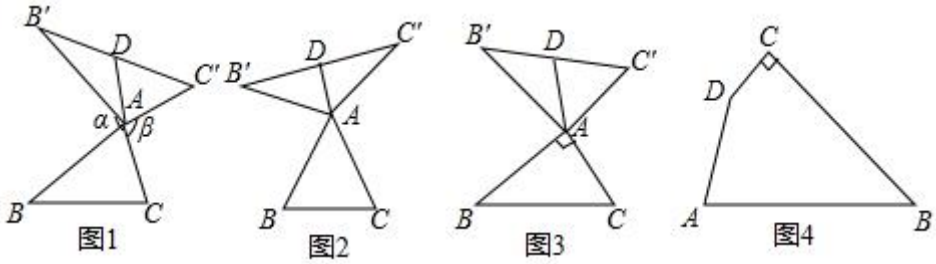
②如图 3，当∠BAC＝90°，BC＝8 时，则 AD 长为 __4__．

猜想论证：

（2）在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明．

拓展应用

（3）如图 4，在四边形 $ABCD$，∠C＝90°，∠D＝150°，BC＝12，CD＝$2\sqrt{3}$，AB＝$2\sqrt{39}$．在四边形内部是否存在点 P，使△PDC 是△PAB 的“旋补三角形”？若存在，给予证明，并求△PAB 的“旋补中线”长；若不存在，说明理由．



【考点】四边形综合题．

【专题】综合题．

【分析】（1）①首先证明△ADB' 是含有 30° 是直角三角形，可得 AD=$\frac{1}{2}AB'$ 即可解决问题；

②首先证明△BAC≌△$B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题；

（2）结论：AD=$\frac{1}{2}BC$．如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 AD＝DM，连接 $B'M$，$C'M$，首先证明四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，再证明△BAC≌△$AB'M$，即可解决问题；

（3）存在．如图 4 中，延长 AD 交 BC 的延长线于 M，作 BE⊥AD 于 E，作线段 BC 的垂直平分线交 BE 于 P，交 BC 于 F，连接 PA、PD、PC，作△PCD 的中线 PN．连接 DF 交 PC 于 O．想办法证明 PA＝PD，PB＝PC，再证明∠APD+∠BPC＝180°，即可得出

结论.

【解答】解：（1）①如图 2 中，

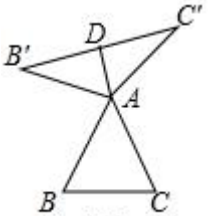


图2

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC=AB'=AC'$，

∵$DB'=DC'$，

∴$AD\perp B'C'$，

∵$\angle BAC=60°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=120°$，

∴$\angle B'=\angle C'=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC$，

故答案为$\frac{1}{2}$.

②如图 3 中，

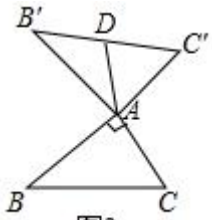


图3

∵$\angle BAC=90°$，$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，

∴$\angle B'AC'=\angle BAC=90°$，

∵$AB=AB'$，$AC=AC'$，

∴△BAC≌△$B'AC'$，

∴$BC=B'C'$，

∵$B'D=DC'$，

∴$AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{2}BC=4$，

故答案为4．

（2）结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．

理由：如图1中，延长AD到M，使得$AD=DM$，连接$B'M$，$C'M$

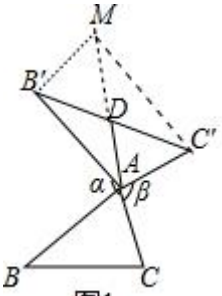


图1

∵$B'D=DC'$，$AD=DM$，

∴四边形$AC'MB'$是平行四边形，

∴$AC'=B'M=AC$，

∵$\angle BAC+\angle B'AC'=180°$，$\angle B'AC'+\angle AB'M=180°$，

∴$\angle BAC=\angle MB'A$，∵$AB=AB'$，

∴$\triangle BAC\cong\triangle AB'M$，

∴$BC=AM$，

∴$AD=\frac{1}{2}BC$．

（3）存在．

理由：如图4中，延长AD交BC的延长线于M，作$BE\perp AD$于E，作线段BC的垂直平分线交BE于P，交BC于F，连接PA、PD、PC，作$\triangle PCD$的中线PN．

连接DF交PC于O．

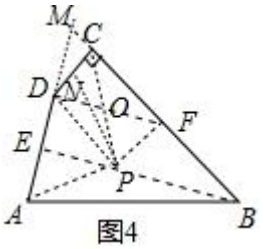


图4

∵$\angle ADC=150°$，

∴$\angle MDC=30°$，

在 Rt△DCM 中，∵$CD=2\sqrt{3}$，$\angle DCM=90°$，$\angle MDC=30°$，

∴$CM=2$，$DM=4$，$\angle M=60°$，

在 Rt△BEM 中，∵$\angle BEM=90°$，$BM=14$，$\angle MBE=30°$，

∴$EM=\frac{1}{2}BM=7$，

∴$BM=7\sqrt{3}$，

∴$DE=EM-DM=3$，

在 Rt△AEB 中，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(2\sqrt{39})^2-(7\sqrt{3})^2}=3$

∴$AE=DE$，∵$BE\perp AD$，

∴$PA=PD$，$PB=PC$，

在 Rt△CDF 中，∵$CD=2\sqrt{3}$，$CF=6$，

∴$\tan\angle CDF=\sqrt{3}$，

∴$\angle CDF=60°$

∴$\angle ADF=90°=\angle AEB$，

∴$\angle CBE=\angle CFD$，

∵$\angle CBE=\angle PCF$，

∴$\angle CFD=\angle PCF$，

∵$\angle CFD+\angle CDF=90°$，$\angle PCF+\angle CPF=90°$，

∴$\angle CPF=\angle CDF=60°=\angle CDF$，

易证△FCP≌△CFD，

∴$CD=PF$，∵$CD\parallel PF$，

∴四边形 $CDPF$ 是矩形，

∴$\angle CDP=90°$，

∴$\angle ADP=\angle ADC-\angle CDP=60°$，

∴△ADP 是等边三角形，

∴$\angle ADP=60°$，∵$\angle BPF=\angle CPF=60°$，

∴$\angle BPC=120°$，

∴$\angle APD+\angle BPC=180°$，

∴△PDC 是△PAB 的“旋补三角形”，

∵$AB=2\sqrt{39}$.

∴△PAB 的“旋补中线”长$=\frac{1}{2}AB=\sqrt{39}$.

【点评】本题是四边形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、直角三角形 30 度角性质、等边三角形的判定和性质、矩形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

考点卡片

1．二次函数综合题

（1）二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时，先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号，然后判断新的函数关系式中系数的符号，再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征，则符合所有特征的图象即为正确选项．

（2）二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起．这类试题一般难度较大．解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题，善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识，并注意挖掘题目中的一些隐含条件．

（3）二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系，建立二次函数模型．关键在于观察、分析、创建，建立直角坐标系下的二次函数图象，然后数形结合解决问题，需要我们注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义．

2．三角形综合题

三角形综合题．

3．四边形综合题

四边形综合题．

4．几何变换综合题

几何变换综合题．

5．相似形综合题

相似形综合题．