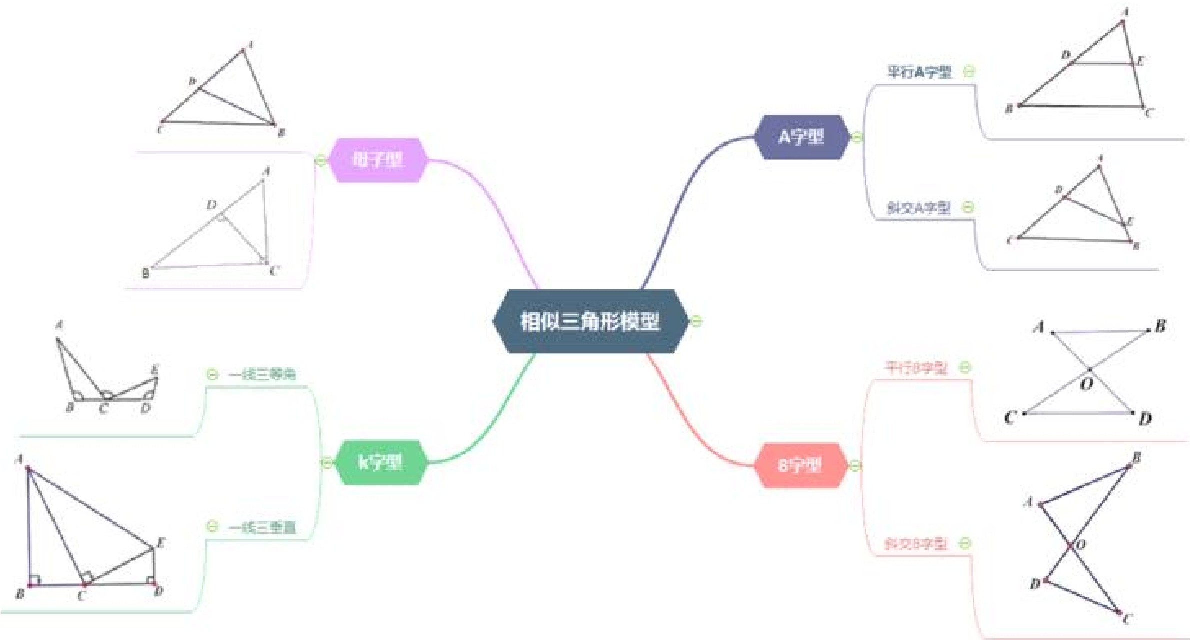
数学模型-----相似三角形模型

相似三角形是初中几何中的重要的内容，常常与其它知识点结合以综合题的形式呈现，其变化很多，是中考中的常考题型，如果我们注重解题方法或基本解题模型，相信再遇到相似三角形的问题就迎刃而解了．下面就介绍一下相似三角形模型．

一、模型类别



二、相关结论的运用

（一）模型 1：A 字型

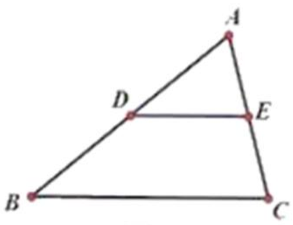


图 1

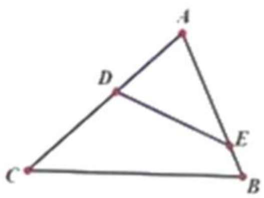


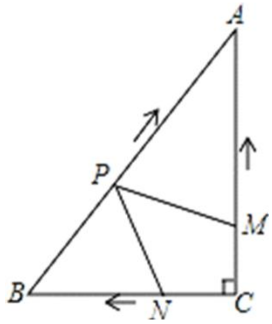
图 2

图 1 平行 A 字型条件：$DE//BC$，图 1 结论：$\triangle ADE\sim\triangle ABC$；

图 2 斜交 A 字型条件：$\angle C=\angle AED$，图 2 结论：$\triangle ADE\sim\triangle ABC$；

典例精讲：

如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°, AC=4\text{cm}, BC=3\text{cm}$．动点$M, N$从点 C 同时出发，均以每秒 1cm 的速度分别沿CA、CB向终点A, B移动，同时动点 P 从点 B 出发，以每秒 2cm 的速度沿BA向终点 A 移动，连接PM, PN，设移动时间为 t（单位：秒，$0<t<2.5$）．



（1）当 t 为何值时，以A, P, M为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似？

（2）是否存在某一时刻 t，使四边形$APNC$的面积 S 有最小值？若存在，求 S 的最小值；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

根据勾股定理求得$AB=5\text{cm}$.

（1）根据模型 1：平行 A 字型的结论得出$\triangle APM \backsim \triangle ABC$，和模型 1：斜交 A 字型模型的结论得出$\triangle AMP \backsim \triangle ABC$两种情况讨论：利用相似三角形的对应边成比例来求 t 的值.

（2）过点 P 作$PH \perp BC$于点 H，构造平行线$PH//AC$，根据模型 1：平行 A 字型的结论得出$\triangle PBH \backsim \triangle ABC$，从而求得以 t 表示的$PH$的值；然后根据"$S=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BPH}$"列出 S 与 t 的关系式$S=\frac{4}{5}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{5}(0<t<2.5)$，则由二次函数最值的求法即可得到 S 的最小值.

【详解】

解：∵如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°, AC=4\text{cm}, BC=3\text{cm}$.

∴根据勾股定理，得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5\text{cm}$.

（1）以A, P, M为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似，分两种情况：

①当$\triangle APM \backsim \triangle ABC$时，$\frac{AM}{AC}=\frac{AP}{AB}$，即$\frac{4-t}{4}=\frac{5-2t}{5}$，解得$t=0$（不合题意，舍去）.

②当$\triangle AMP \backsim \triangle ABC$时，$\frac{AP}{AC}=\frac{AM}{AB}$，即$\frac{5-2t}{4}=\frac{4-t}{5}$，解得$t=\frac{3}{2}$；

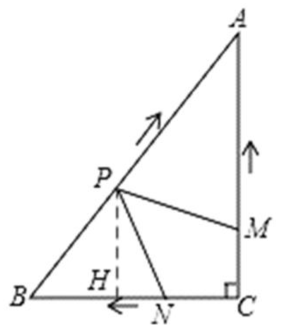
综上所述，当$t=\frac{3}{2}$时，以A、P、M为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似.

（2）存在某一时刻 t，使四边形$APNC$的面积 S 有最小值．理由如下：

假设存在某一时刻 t，使四边形$APNC$的面积 S 有最小值.

如图，过点 P 作$PH \perp BC$于点 H．则$PH//AC$，

∴$\triangle PBH \backsim \triangle ABC$



$\therefore \frac{PH}{AC}=\frac{BP}{BA}$,

即$\frac{PH}{4}=\frac{2t}{5}$.

$\therefore PH=\frac{8t}{5}$.

$\therefore S=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BPN}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 4-\frac{1}{2}\times(3-t)\cdot\frac{8}{5}t$

$=\frac{4}{5}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{5}(0<t<2.5)$.

$\because \frac{4}{5}>0$,

$\therefore$S 有最小值.

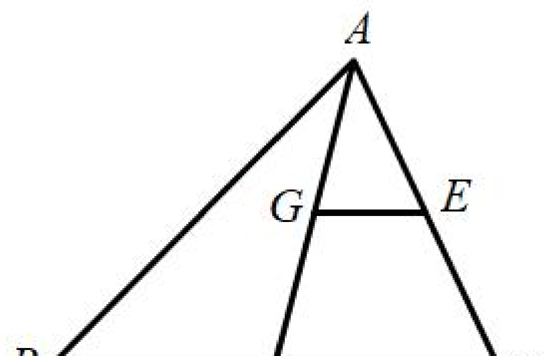
当$t=\frac{3}{2}$时，$S_{最小值}=\frac{21}{5}$.

答：当$t=\frac{3}{2}$时，四边形 APNC 的面积 S 有最小值，其最小值是$\frac{21}{5}$.

【解题技法】作平行线构造 A 字型相似，是解题中常用的一种作辅助线的方法

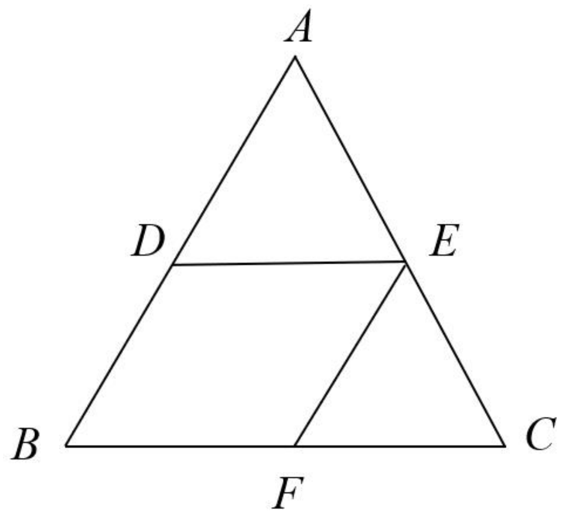
实战演练：

1．如图，AD经过$\triangle ABC$的重心，点E是AC的中点，过点E作$EG//BC$交AD于点G，若$BC=12$，则线段GE的长为（　　）



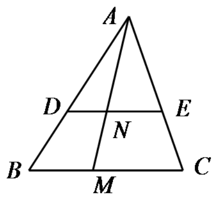
A．6　　B．4　　C．5　　D．3

2．如图，在$\triangle ABC$中，$DE//BC$，$EF//AB$，则下列结论正确的是（　）



A．$\frac{AD}{DB}=\frac{DE}{BC}$　　B．$\frac{BF}{BC}=\frac{EF}{AD}$　　C．$\frac{EF}{AB}=\frac{BF}{BC}$　　D．$\frac{AE}{EC}=\frac{DE}{FC}$

3．如图，在△ABC中，D、E 分别在 AB 边和 AC 边上，$DE//BC$，M 为 BC 边上一点（不与 B、C 重合），连结 AM 交 DE 于点 N，则（　）



A．$\frac{AD}{AN}=\frac{AN}{AE}$　　B．$\frac{BD}{MN}=\frac{MN}{CE}$　　C．$\frac{DN}{BM}=\frac{NE}{MC}$　　D．$\frac{DN}{MC}=\frac{NE}{BM}$

（二）模型 2：8 字型

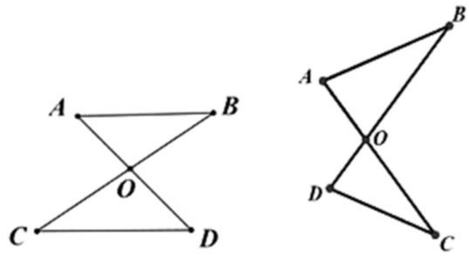


图 1　　图 2

图 1 平行 8 字型条件：$AB//CD$，　图 1 结论：$\triangle AOB \backsim \triangle DOC$；

图 2 斜交 8 字型条件：$\angle A=\angle D$,，图 2 结论：$\triangle AOB \backsim \triangle DOC$；

典例精讲：

如图 1，在矩形$ABCO$中，$OA=8, OC=6, D, E$分别是AB, BC上一点，$AD=2, CE=3, OE$与CD相交于点 F.

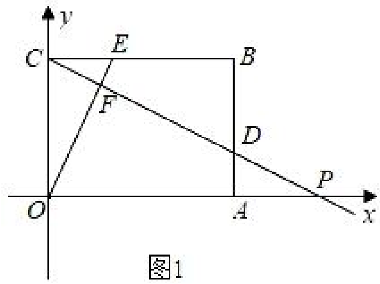


图1

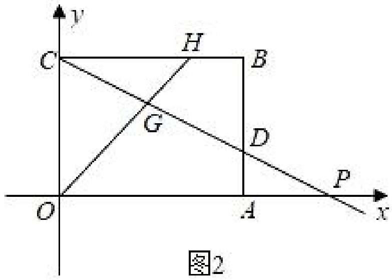


图2

（1）求证：$OE \perp CD$；

（2）如图 2，点 G 是CD的中点，延长OG交BC于 H，求CH的长．

【思路点拨】

（1）根据四边形$ABCO$是矩形，可得$OA = BC = 8, OC = AB = 6$，根据模型 1 中的图 1 结论得出$\triangle ADP \backsim \triangle OCP$，从而求出$PA$和$PO$，再根据模型 2 中的图 1 结论得出$\triangle OPF \backsim \triangle ECF$，求出$EF$和$CF$的长，再根据勾股定理的逆定理即可得$OE \perp CD$；

（2）在$Rt\triangle CBD$中，$CB = 8, BD = AB - AD = 6 - 2 = 4$，根据勾股定理可得$CD = 4\sqrt{5}$，根据点 G 是$CD$的中点，可得$CG = DG = 2\sqrt{5}$，所以得点 G 是$CP$的三等分点，根据模型 2 中的图 1 结论得出$\triangle OPG \backsim \triangle HCG$即可求出$CH$的长．

【详解】

（1）∵四边形$ABCO$是矩形，

∴$OA = BC = 8, OC = AB = 6$，

在$Rt\triangle OCE$中，$CE = 3$，

∴$OE = \sqrt{OC^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$，

∵$AB // OC$，即$AD // OC$，且$AD = 2$，

∴$\triangle ADP \backsim \triangle OCP$

∴$\frac{AD}{OC} = \frac{PA}{PO}$,

∴$\frac{2}{6} = \frac{PA}{PA+8}$,

∴$PA = 4$，

∴$PO = PA + OA = 12$，

∴在$Rt\triangle OPC$中，$OC = 6$，

∴$CP = \sqrt{OC^2 + PO^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$，

∵$OA // BC$，即$OP // CE$，

∴$\triangle OPF \backsim \triangle ECF$

∴$\frac{CE}{OP} = \frac{EF}{OF} = \frac{CF}{PF}$,

∴$\frac{EF}{OF} = \frac{CF}{PF} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,

$\therefore EF=\frac{1}{5}OE=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,

$CF=\frac{1}{5}CP=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,

$\because \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{9}{5}+\frac{36}{5}=9$,

$\therefore EF^2+CF^2=CE^2$,

$\therefore \triangle CEF$是直角三角形,

$\therefore \angle CFE=90°$,

$\therefore OE\perp CD$;

（2）在$Rt\triangle CBD$中，$CB=8, BD=AB-AD=6-2=4$,

根据勾股定理，得$CD=\sqrt{CB^2+BD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

$\because$点 G 是CD的中点,

$\therefore CG=DG=2\sqrt{5}$,

由（1）知：$CP=6\sqrt{5}$,

$\therefore DP=CP-CD=2\sqrt{5}$,

$\therefore$点 G 是CP的三等分点,

$\because OA//BC$，即$OP//CH$,

$\therefore \triangle APG\backsim\triangle HCG$

$\therefore \frac{CH}{OP}=\frac{CG}{GP}$,

$\therefore \frac{CH}{12}=\frac{1}{2}$,

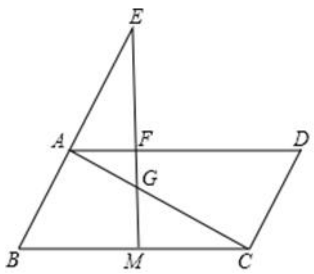
$\therefore CH=6$.

答：CH的长为 6.

【解题技法】利用 A 字型和 8 字型混合模型得出三角形相似，再利用相似三角形的对应边成比例得出线段的长或比值，解决本题的关键

实战演练：

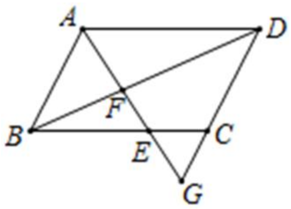
4．已知，如图，在平行四边形 ABCD 中，M 是 BC 边的中点，E 是边 BA 延长线上的一点，连接 EM，分别交线段 AD 于点 F、AC 于点 G.



（1）证明：$\Delta AFG\backsim\Delta CMG$

（2）求证：$\frac{GF}{GM}=\frac{EF}{EM}$；

5．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，连结 AE 并延长，交对角线 BD 于点 F、DC 的延长线于点 G．如果$\frac{CE}{BE}=\frac{2}{3}$，求$\frac{FE}{EG}$的值．

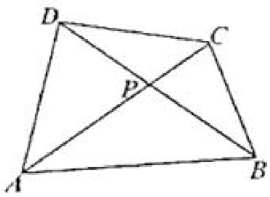


6．如图， BD,AC相交于点P，连结$AB,BC,CD,DA,\angle DAP=\angle CBP$．

(1)求证: $\triangle ADP\backsim\triangle BCP$；

(2)直接回答$\triangle ADP$与$\triangle BCP$是不是位似图形?

(3)若$AB=8,CD=4,DP=3$，求AP的长．



7．在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，BE 是 AC 边上的中线，点 D 在射线 BC 上．

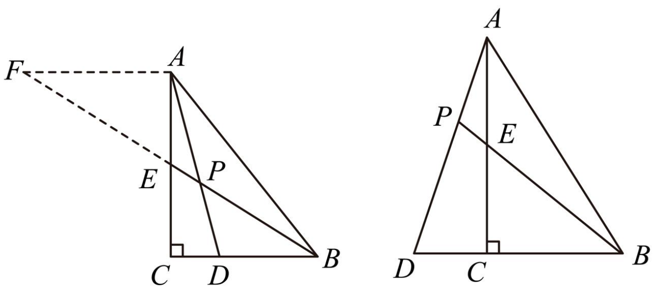


图1 图2

（1）如图 1，点 D 在 BC 边上，$CD:BD=1:2$，AD 与 BE 相交于点 P，过点 A 作$AF\parallel BC$，交 BE 的延长线于点 F，易得$\frac{AP}{PD}$的值为_；

（2）如图 2，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 在 BC 的延长线上，AD 与 AC 边上的中线 BE 的延长线交于点 P，$DC:BC=1:2$，求$\frac{AP}{PD}$的值；

（3）在（2）的条件下，若 CD=2，AC=6，则 BP=_．

（三）模型 3：k 字型

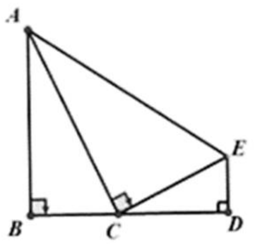


图1

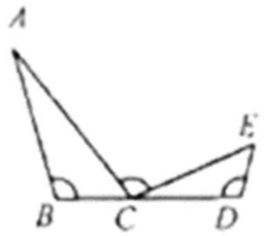


图2

图 1 一线三垂直条件：$AB \perp BD, DE \perp BD, AC \perp CE$，图 1 结论：$\triangle ABC \backsim \triangle CDE$；

图 2 一线三等角条件：$\angle B = \angle ACE = \angle D$，图 2 结论：$\triangle ABC \backsim \triangle CDE$；

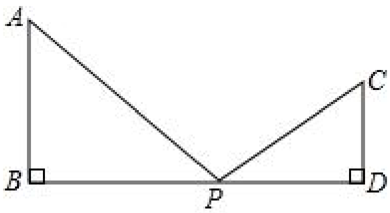
典例精讲：

如图，点 P 是线段BD上一个动点，$\angle B = \angle D = 90°, AB = 6, CD = 4, BD = a$.

（1）当$\angle APC = 90°, a = 14$ 时，求BP的长度；

（2）若$\angle APC = 90°$时，点 P 有两个符合要求即P_1, P_2，且$P_1P_2 = 2$，求 a 的值；

（3）若$\angle APC = 120°$时，点 P 有且只有一个点符合要求，求 a 的值.



【思路点拨】

（1）根据模型 3：k 字型的一线三垂直，证得$\triangle ABP \backsim \triangle PDC$，根据相似三角形的性质即可求得；

（2）设$BP = x$，则$PD = a - x$，根据模型 3：k 字型的一线三垂直证得$\triangle ABP \backsim \triangle PDC$，由相似三角形的性质得到$x^2 - ax + 24 = 0$，设方程的两个根为$x_1, x_2$，根据根与系数的关系可知$x_1 + x_2 = a, x_1 \cdot x_2 = 24$，根据题意即可得到$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$，即可得到$a^2 - 4 \times 24 = 4$，解得即可；

（3）作$\angle AEP = \angle CFP = 120°$，解直角三角形求得$BE = 2\sqrt{3}, DF = \frac{4\sqrt{3}}{3}, AE = 4\sqrt{3}, CF = \frac{8\sqrt{3}}{3}$，根据模型 3：k 字型的一线三等角证得$\triangle EPA \backsim \triangle FCP$，由相似三角形的性质得到$x^2 - \left(a - \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)x + 32 = 0$，根据题意$\Delta = \left(a - \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 32 = 0$，即可即可.

【详解】

解：（1）$\because \angle B = \angle D = 90°, \angle APC = 90°$，

$\therefore \angle A + \angle APB = \angle CPD + \angle APB = 90°$，

$\therefore \angle A = \angle CPD$，

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle PDC$，

$\therefore \frac{BP}{CD}=\frac{AB}{PD}$，即$\frac{BP}{4}=\frac{6}{14-BP}$，

解得$BP=2$或12；

（2）设$BP=x$，则$PD=a-x$，

由（1）可知$\triangle ABP \backsim \triangle PDC$，

$\therefore \frac{AB}{PD}=\frac{BP}{DC}$，即$\frac{6}{a-x}=\frac{x}{4}$，

$\therefore x^2-ax+24=0$，

设方程的两个根为x_1,x_2，根据根与系数的关系可知$x_1+x_2=a, x_1\cdot x_2=24$，

$\because P_1P_2=2$，

$\therefore |x_1-x_2|=2$，

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$，

$\therefore a^2-4\times 24=4$，

解得$a=\pm 10$（负数舍去），

$\therefore a=10$；

（3）作$\angle AEP=\angle CFP=120°$，

$\therefore \angle AEB=\angle CFD=60°$，

$\because AB=6, CD=4$，

$\therefore BE=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=2\sqrt{3}, DF=\frac{\sqrt{3}}{3}CD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AE=2BE=4\sqrt{3}, CF=2DF=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\because \angle AEP=\angle CFP=\angle APC=120°$，

$\therefore \angle EAP=\angle CPF$，

$\therefore \triangle EPA \backsim \triangle FCP$，

$\therefore \frac{AE}{PF}=\frac{EP}{FC}$，

设$EP=x$，则$PF=a-\frac{10\sqrt{3}}{3}-x$，

$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{a-\frac{10\sqrt{3}}{3}-x}=\frac{x}{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$，

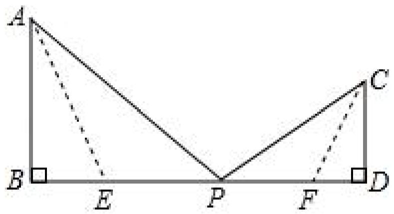
$\therefore x^2-\left(a-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)x+32=0$，

$\because \triangle=0$，

$\therefore \left(a-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2-4\times 1\times 32=0$，

$\because a>0$，

$\therefore a=\frac{10\sqrt{3}}{3}+8\sqrt{2}$.



【解题技法】通过运用模型 3：k 字型中从特殊到一般的方法，证明出两组对应角相等，从而得出相似三角形，利用对应边成比例是解题的关键．

实战演练：

8．如图 1 和图 2，在ΔABC中，$AB=AC$，$BC=8$，$\tan C=\frac{3}{4}$．点K在AC边上，点M，N分别在AB，BC上，且$AM=CN=2$．点P从点M出发沿折线$MB-BN$匀速移动，到达点N时停止；而点Q在AC边上随P移动，且始终保持$\angle APQ=\angle B$．

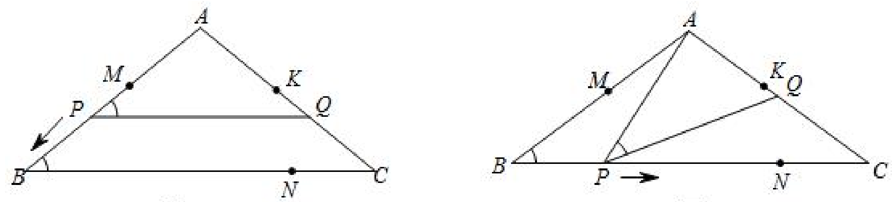


图1　　图2

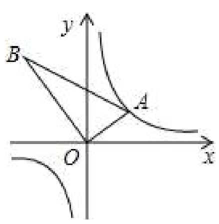
（1）当点P在BC上时，求点P与点A的最短距离；

（2）若点P在MB上，且PQ将ΔABC的面积分成上下 4：5 两部分时，求MP的长；

（3）设点P移动的路程为x，当 $0\le x\le 3$ 及 $3\le x\le 9$ 时，分别求点P到直线AC的距离（用含x的式子表示）；

（4）在点P处设计并安装一扫描器，按定角$\angle APQ$扫描ΔAPQ区域（含边界），扫描器随点P从M到B再到N共用时 36 秒．若$AK=\frac{9}{4}$，请直接写出点K被扫描到的总时长．

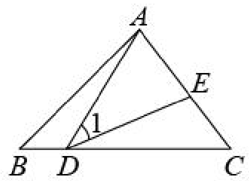
9．如图，△AOB 是直角三角形，∠AOB＝90°，OB＝2OA，点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象上．若点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象上，则 k 的值为_____．

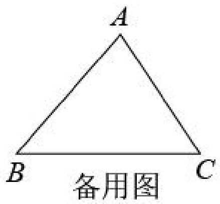


10．如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在边BC、AC上，连接AD、DE，且$\angle B=\angle ADE=\angle C$．

（1）证明：$\triangle BDA\backsim\triangle CED$；

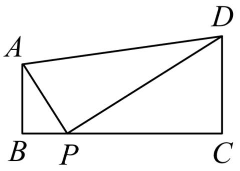
（2）若$\angle B=45°$, $BC=2$，当点 D 在BC上运动时（点 D 不与B、C重合），且$\triangle ADE$是等腰三角形，求此时BD的长．



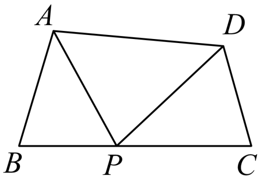


备用图

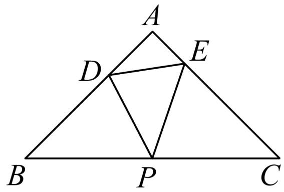
11．感知：如图①，在四边形ABCD中，AB∥CD，∠B＝90°，点P在BC边上，当∠APD＝90°时，可知△ABP∽△PCD．（不要求证明）



图①



图②



图③

探究：如图②，在四边形ABCD中，点P在BC边上，当∠B＝∠C＝∠APD时，求证：△ABP∽△PCD．

拓展：如图③，在△ABC中，点P是边BC的中点，点D、E分别在边AB、AC上．若∠B＝∠C＝∠DPE＝45°，BC＝$6\sqrt{2}$，BD＝4，则DE的长为_____．

（四）模型4：母子型

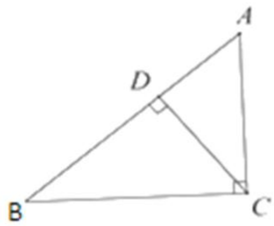


图1

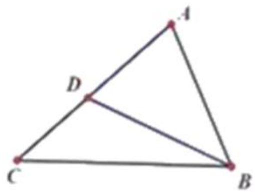


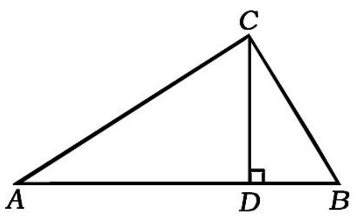
图2

图1垂直母子型条件：$AC\perp BC, AB\perp CD$，图1结论：$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle CBD$；

图2斜交母子字型条件：$\angle C=\angle ABD$，图2结论：$\triangle ABC\backsim\triangle ABD$；

典例精讲：

1、在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°, CD\perp AB$，垂足为$D, AD=8, DB=2$，求$CD$的长



【思路点拨】

根据垂直母子型模型4证得$\triangle ADC\backsim\triangle CDB$，再根据对应边成比例，即可求出$CD$的值．

【详解】

$\because CD\perp AB$，

∴$\angle ADC=\angle CDB=90°$，

∴$\angle ACD+\angle A=90°$，

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ACD+\angle BCD=90°$，

∴$\angle A=\angle BCD$，

∴$\triangle ADC\backsim\triangle CDB$，

∴$\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$,

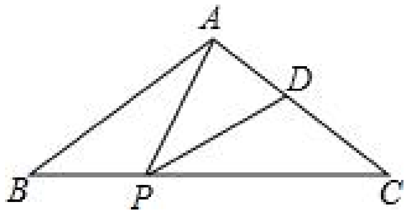
∴$CD^2=AD\cdot BD=8\times 2=16$，

∴$CD=4$．

2、如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点 P、D 分别是BC、AC边上的点，且$\angle APD=\angle B$.

（1）求证：$AC\cdot CD=CP\cdot BP$；

（2）若$AB=10,BC=12$，当$PD//AB$时，求BP的长．



【思路点拨】

（1）根据已知得出$\angle APD=\angle B=\angle C$，再根据斜交母子型模型 4 得出$\triangle ABP\backsim\triangle PCD$，根据相似三角形的性质得到$AB\cdot CD=CP\cdot BP$，由$AB=AC$即可得到$AC\cdot CD=CP\cdot BP$；

（2）由$PD//AB$根据斜交母子型模型 4 得出$\triangle BAP\backsim\triangle BCA$，然后运用相似三角形的性质即可求出$BP$的长．

【详解】

（1）∵$AB=AC$，∴$\angle B=\angle C$.

∵$\angle APD=\angle B$，∴$\angle APD=\angle B=\angle C$.

∵$\angle APC=\angle BAP+\angle B,\angle APC=\angle APD+\angle DPC$，

∴$\angle BAP=\angle DPC$，

∴$\triangle ABP\backsim\triangle PCD$，

∴$\frac{BP}{CD}=\frac{AB}{CP}$,

∴$AB\cdot CD=CP\cdot BP$.

∵$AB=AC$，

∴$AC\cdot CD=CP\cdot BP$；

（2）如图，∵$PD//AB$，

∴$\angle APD = \angle BAP$.

∵$\angle APD = \angle C$，

∴$\angle BAP = \angle C$.

∵$\angle B = \angle B$，

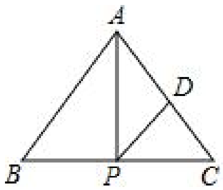
∴$\triangle BAP \backsim \triangle BCA$，

∴$\frac{BA}{BC} = \frac{BP}{BA}$.

∵$AB = 10, BC = 12$，

∴$\frac{10}{12} = \frac{BP}{10}$，

∴$BP = \frac{25}{3}$.



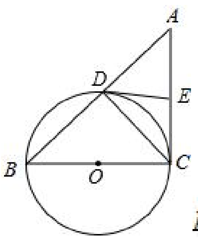
【解题技法】利用母子型模型 4 中有一组隐含的等角，此时需要通过已知得出判定三角形相似的条件，把证明$AC \cdot CD = CP \cdot BP$转化为证明$AB \cdot CD = CP \cdot BP$是解题的关键.

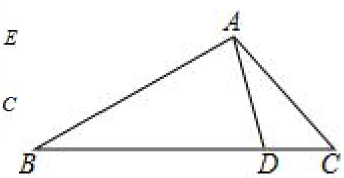
实战演练：

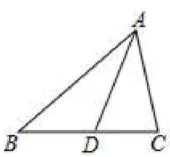
12．如图，已知BC是$\odot O$的直径，AC切$\odot O$于点C，AB交O于点D，E为AC的中点，连接CD，DE.

（1）求证：DE是$\odot O$的切线；

（2）若$BD = 4$，$CD = 3$，求AC的长.







13．如图，在ΔABC中，$AC = 2$，$BC = 4$，D为BC边上的一点，且$\angle CAD = \angle B$．若ΔADC的面积为a，则ΔABD的面积为（　　）

A．$2a$　　B．$\frac{5}{2}a$　　C．$3a$　　D．$\frac{7}{2}a$

14．如图，点 D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，且$\angle CAD = \angle B$，若$\triangle ABC$ 的周长为 10，则$\triangle ACD$ 的周长是（　　）

A．5　　B．$5\sqrt{2}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

参考答案：

1．D

【分析】根据重心的概念得到点D为BC中点，即CD的长，再根据平行证明△AGE∽△ADC，结合点E是AC中点，得到$\frac{AE}{AC}=\frac{GE}{CD}=\frac{1}{2}$，从而求出GE.

【详解】解：∵AD经过△ABC的重心，

∴点D是BC中点，

∵BC=12，

∴CD=BD=6，

∵GE∥BC，

∴△AGE∽△ADC，

∵点E是AC中点，

∴$\frac{AE}{AC}=\frac{GE}{CD}=\frac{1}{2}$，即$\frac{GE}{6}=\frac{1}{2}$，

解得：GE=3，

故选D.

【点睛】本题考查的是重心的概念和性质、相似三角形的判定和性质，掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点是解题的关键.

2．D

【分析】由两直线平行，得到两对同位角相等，证明△ADE∽△ABC，△CEF∽△CAB；由等代换可证明△ADE～△EFC，最后由相似三角形的性质判断四个答案的正误.

【详解】解：∵DE∥BC，

∴∠ADE=∠B，∠AED=∠C，

∴△ADE∽△ABC，

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}\neq\frac{AD}{DB}$

∴答案A错舍去；

又∵EF∥AB，

∴∠CEF=∠A，∠CFE=∠B，

∴△CEF∽△CAB，

$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{FC}{BC}\neq\frac{BF}{BC}$

∴答案C错舍去；

∵$DE//BC$，$EF//AB$，

∴四边形 BDEF 是平行四边形，

∴DE=BF

∵∠ADE=∠B，∠CFE=∠B，

∴∠ADE=∠CFE，

又∵∠AED=∠C，

∴△ADE～△EFC，

$\therefore \frac{EF}{AD}=\frac{DE}{FC}=\frac{BF}{FC}\neq\frac{BF}{BC}$

∴答案 B 舍去

∵△ADE～△EFC，

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{DE}{FC}$

∴答案 D 正确；

故选：D．

【点睛】本题考查了平行线的性质，相似三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质等知识点，重点掌握三角形相似的判定与性质，易错点学生不会找两个相似三角形对应边的比相等．

3．C

【分析】根据平行线的性质和相似三角形的判定可得△ADN∽△ABM，△ANE∽△AMC，再根据相似三角形的性质即可得到答案．

【详解】∵$DE//BC$，∴△ADN∽△ABM，△ANE∽△AMC，∴$\frac{DN}{BM}=\frac{AN}{AM},\frac{AN}{AM}=\frac{NE}{MC}\Rightarrow\frac{DN}{BM}=\frac{NE}{MC}$,

故选 C．

【点睛】本题考查平行线的性质、相似三角形的判定和性质，解题的关键是熟练掌握平行线的性质、相似三角形的判定和性质．

4．（1）详见解析；（2）详见解析．

【分析】（1）利用平行线的性质及对顶角相等即可证明$\Delta AFG\backsim\Delta CMG$；

（2）由相似三角形的性质可知$\frac{GF}{GM}=\frac{AF}{CM}$，由 AD∥BC 可知$\frac{AF}{BM}=\frac{EF}{EM}$，通过等量代换即可证明结论．

【详解】(1）证明：$\because AD\parallel BC$

$\therefore \angle FAG=\angle MCG$

$\because \angle AGF=\angle CGM$

$\therefore \Delta AFG\backsim\Delta CMG$

（2）证明：$\because \Delta AFG\backsim\Delta CMG$

$\therefore \dfrac{GF}{GM}=\dfrac{AF}{CM}$

∵AD∥BC，

∴$\frac{AF}{BM}=\frac{EF}{EM}$

又∵CM＝BM，

$\therefore \dfrac{AF}{CM}=\dfrac{EF}{EM}$

$\therefore \dfrac{GF}{GM}=\dfrac{EF}{EM}$

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定及性质，掌握相似三角形的判定方法及性质是解题的关键．

5．$\frac{FE}{EG}=\frac{9}{16}$

【分析】由四边形ABCD是平行四边形，可得AD=BC，AD∥BC，即可证得△ADF∽△EBF，△GEC∽△GAD，然后由相似三角形的对应边成比例，求得答案．

【详解】∵四边形ABCD是平行四边形，

∴AD=BC，AD∥BC，

∴△ADF∽△EBF，△GEC∽△GAD，

∴$\frac{EF}{AF}=\frac{BE}{AD}$，$\frac{EG}{AG}=\frac{EC}{AD}$，

∵$\frac{CE}{BE}=\frac{2}{3}$,

∴$\frac{BE}{AD}=\frac{3}{5}$，$\frac{CE}{AD}=\frac{2}{5}$,

∴$\frac{FE}{AF}=\frac{3}{5}$，$\frac{EG}{AG}=\frac{2}{5}$，

∴$\frac{FE}{AE}=\frac{3}{8}$，$\frac{EG}{AE}=\frac{2}{3}$，

∴$\frac{FE}{EG}=\frac{9}{16}$．

【点睛】此题考查相似三角形的判定与性质以及平行四边形的性质．解题关键在于注意掌握数形结合思想的应用．

6.（1）详见解析；（2）不是；（3）$AP=6$

【分析】(1）根据已知条件可知$\angle DAP=\angle CBP$，根据对顶角相等可知$\angle DPA=\angle CPB$，由此可证明$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$；

（2）根据位似图形的定义（如果两个图形不仅是相似图形，而且对应顶点的连线相交于一点，对应边互相平行，那么这样的两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心.）

（3）由△ADP∽△BCP，可得$\frac{AP}{DP}=\frac{BP}{CP}$，而∠APB与∠DPC为对顶角，则可证△APB∽△DPC，从而得$\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{DC}$，再根据$AB=8, CD=4, DP=3$即可求得AP的长.

【详解】(1)证明:∵$\angle DAP=\angle CBP, \angle DPA=\angle CPB$，

∴$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$；

(2)点A、D、P的对应点依次为点B、C、P，对应点的连线不相交于一点，故$\triangle ADP$与$\triangle BCP$不是位似图形；

(3)解:∵$\triangle ADP\backsim\triangle BCP$

∴$\frac{AP}{DP}=\frac{BP}{CP}$

∵$\angle APB=\angle DPC$，

∴$\triangle APB\backsim\triangle DPC$，

∴$\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{DC}$

∴$\frac{8}{4}=\frac{AP}{3}$

∴$AP=6$.

【点睛】本题考查相似三角形的性质和判定，位似图形的定义．熟练掌握相似三角形的判定定理是解决此题的关键.

7.（1）$\frac{3}{2}$；（2）$\frac{2}{3}$；（3）6

【分析】(1）易证△AEF≌△CEB，则有AF=BC．设CD=k，则DB=2k，AF=BC=3k，由AF∥BC可得△APF∽△DPB，然后根据相似三角形的性质就可求出$\frac{AP}{PD}$的值；（2）过点A作AF∥DB，交BE的延长线于点F，设DC=k，由DC：BC=1：2得BC=2k，DB=DC+BC=3k．易证△AEF≌△CEB，则有EF=BE，AF=BC=2k．易证△AFP∽△DBP，然后根据相似三角形的性质就可求出$\frac{AP}{PD}$的值；

（3）当CD=2时，可依次求出BC、AC、EC、EB、EF、BF的值，然后根据$\frac{FP}{BP}$的值求出$\frac{BF}{BP}$

的值，就可求出 BP 的值．

【详解】解：（1）如图 1 中，

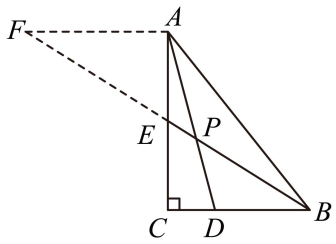


图1

∵AF∥BC，

∴∠F=∠EBC，

∵∠AEF=∠BEC，AE=EC，

∴△AEF≌△CEB（AAS），

∴AF=BC．

设 CD=k，则 DB=2k，AF=BC=3k，

∵AF∥BC，

∴△APF∽△DPB，

∴$\frac{PA}{PD}=\frac{AF}{BD}=\frac{3}{2}$,

故答案是：$\frac{3}{2}$;

（2）如图 2，过点 A 作 AF∥DB，交 BE 的延长线于点 F，

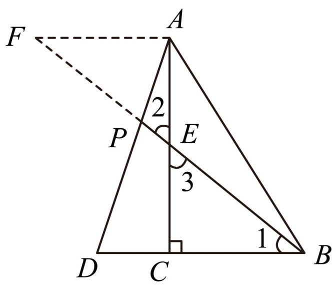


图2

设 DC=k，由 DC：BC=1：2 得 BC=2k，DB=DC+BC=3k．

∵E 是 AC 中点，

∴AE=CE．

∵AF∥DB，

∴∠F=∠1．

在△AEF 和△CEB 中，

$\begin{cases}\angle F=\angle 1\\ \angle 2=\angle 3\\ AE=CE\end{cases}$，

∴△AEF≌△CEB，

∴EF=BE，AF=BC=2k．

∵AF∥DB，

∴△AFP∽△DBP，

∴$\frac{PA}{PD}=\frac{FP}{BP}=\frac{AF}{BD}=\frac{2k}{3k}=\frac{2}{3}$;

（3）当 CD=2 时，BC=4，

∵AC=6，

∴EC=AE=3，

∴EB= $\sqrt{EC^2+BC^2}=5$

∴EF=BE=5，BF=10．

∵$\frac{FP}{BP}=\frac{2}{3}$,

∴ $\frac{BF}{BP}=\frac{5}{3}$,

∴BP=$\frac{3}{5}$BF=$\frac{3}{5}$×10=6．

故答案为 6．

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识，结合中点，作平行线构造全等三角形是解决本题的关键．

8．（1）3;（2）$MP=\frac{4}{3}$;（3）当 $0\le x\le 3$ 时，$d=\frac{24}{25}x+\frac{48}{25}$; 当 $3\le x\le 9$ 时，$d=-\frac{3}{5}x+\frac{33}{5}$;（4）$t=23s$

【分析】（1）根据当点P在BC上时，PA⊥BC 时 PA 最小，即可求出答案;

（2）过 A 点向 BC 边作垂线，交 BC 于点 E，证明△APQ∽△ABC，可得$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{AP}{AB})^2$，根据$\frac{S_上}{S_下}$=$\frac{4}{5}$可得 $\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{AP}{AB})^2$=$\frac{4}{9}$，可得$\frac{AP}{AB}=\frac{2}{3}$，求出 AB=5，即可解出 MP;

（3）先讨论当 0≤x≤3 时，P 在 BM 上运动，P 到 AC 的距离：d=PQ·sinC，求解即可，再讨论当 3≤x≤9 时，P 在 BN 上运动，BP=x-3，CP=8-（x-3）=11-x，根据 d=CP·sinC 即可得出答案;

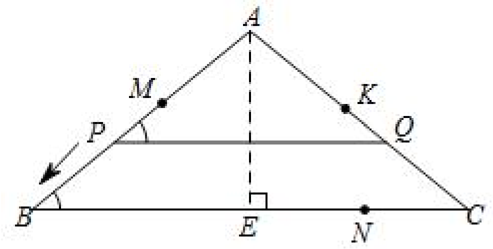
（4）先求出移动的速度$=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$，然后先求出从Q平移到K耗时，再求出不能被扫描的时间段即可求出时间.

【详解】（1）当点P在BC上时，PA⊥BC时PA最小，

∵AB=AC，△ABC为等腰三角形，

∴$PA_{min}=\tan C\cdot\frac{BC}{2}=\frac{3}{4}\times4=3$；

（2）过A点向BC边作垂线，交BC于点E，



$S_{上}=S_{\triangle APQ}$，

$S_{下}=S_{四边形BPQC}$，

∵$\angle APQ=\angle B$，

∴PQ∥BC，

∴△APQ∽△ABC，

∴$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$,

∴$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{AP}{AB})^2$,

当$\frac{S_{上}}{S_{下}}=\frac{4}{5}$时，$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{AP}{AB})^2=\frac{4}{9}$,

∴$\frac{AP}{AB}=\frac{2}{3}$,

$AE=\frac{BC}{2}\cdot\tan C=3$，

根据勾股定理可得AB=5，

∴$\frac{AP}{AB}=\frac{MP+2}{5}=\frac{2}{3}$,

解得$MP=\frac{4}{3}$;

（3）当$0\le x\le3$时，P在BM上运动，

P到AC的距离：$d=PQ\cdot\sin C$，

由（2）可知$\sin C=\frac{3}{5}$,

∴$d=\frac{3}{5}PQ$，

∵$AP=x+2$，

∴$\frac{AP}{AB}=\frac{x+2}{5}=\frac{PQ}{BC}$,

∴$PQ=\frac{x+2}{5}\times 8$，

∴$d=\frac{x+2}{5}\times 8\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}x+\frac{48}{25}$,

当$3\leq x\leq 9$时，P 在 BN 上运动，

$BP=x-3$，$CP=8-(x-3)=11-x$，

$d=CP\cdot\sin C=\frac{3}{5}(11-x)=-\frac{3}{5}x+\frac{33}{5}$,

综上$d=\begin{cases}\frac{24}{25}x+\frac{48}{25}(0\leq x\leq 3)\\-\frac{3}{5}x+\frac{33}{5}(3\leq x\leq 9)\end{cases}$；

（4）$AM=2<AQ=\frac{9}{4}$,

移动的速度$=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$,

①从 Q 平移到 K，耗时：$\frac{\frac{9}{4}-2}{\frac{1}{4}}=1$秒，

②P 在 BC 上时，K 与 Q 重合时

$CQ=CK=5-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}$,

∵$\angle APQ+\angle QPC=\angle B+\angle BAP$，$\angle APQ=\angle B$

∴$\angle QPC=\angle BAP$，

又∵$\angle B=\angle C$，

∴$\triangle ABP\backsim\triangle PCQ$，

设$BP=y$，$CP=8-y$，

$\frac{AB}{PC}=\frac{BP}{CQ}$，即$\frac{5}{8-y}=\frac{y}{\frac{11}{4}}$,

整理得$y^2-8y=-\frac{55}{4}$,

$(y-4)^2=\frac{9}{4}$,

解得$y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=\frac{11}{2}$,

$\frac{5}{2}\div\frac{1}{4}=10$秒，

$\frac{11}{2}\div\frac{1}{4}$=22 秒，

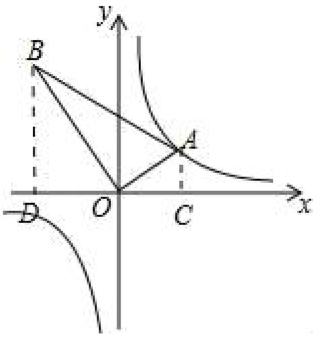
∴点K被扫描到的总时长 36-（22-10）-1=23 秒．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，一次函数的应用，结合知识点灵活运用是解题关键．

9．-4

【分析】要求函数的解析式只要求出 B 点的坐标就可以，过点 A，B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，分别于 C，D．根据条件得到△ACO∽△ODB，得到：$\frac{BD}{OC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{OA}$=2，然后用待定系数法求解即可．

【详解】过点 A，B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，分别于 C，D，



设点 A 的坐标是(m，n)，则 AC＝n，OC＝m．

∵∠AOB＝90°，

∴∠AOC+∠BOD＝90°，

∵∠DBO+∠BOD＝90°，

∴∠DBO＝∠AOC，

∵∠BDO＝∠ACO＝90°，

∴△BDO∽△OCA．

∴$\frac{BD}{OC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{OA}$,

∵OB＝2OA，

∴BD＝2m，OD＝2n，

因为点 A 在反比例函数 y＝$\frac{1}{x}$的图象上，

∴mn＝1，

∵点 B 在反比例函数 y＝$\frac{k}{x}$的图象上，

∴B 点的坐标是(﹣2n，2m)，

∴k＝－2n•2m＝－4mn＝－4，

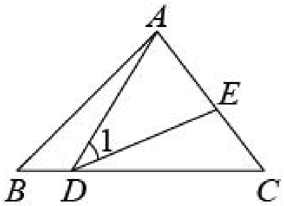
故答案为－4．

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，相似三角形的判定和性质，利用相似三角形的性质求得点B的坐标(用含n的式子表示)是解题的关键．

10．(1)理由见详解；（2）$BD=2-\sqrt{2}$或1，理由见详解．

【分析】（1）根据题目已知条件易得：$\angle ADE+\angle ADB+\angle EDC=180°$，$\angle B+\angle ADB+\angle DAB=180°$，所以得到$\angle DAB=\angle EDC$，问题得证．

（2）由题意易得$\triangle ABC$是等腰直角三角形，所以$\angle BAC=90°$，当$\triangle ADE$是等腰三角形时，根据分类讨论有三种情况：①AD=AE，②AD=DE，③AE=DE；因为点D不与B、C重合，所以第一种情况不符合，其他两种情况根据等腰三角形的性质“等边对等角”及$\angle B=\angle ADE=45°$，求出问题即可．



【详解】解：（1）

如图可知：$\angle ADE+\angle ADB+\angle EDC=180°$

在$\triangle ABD$中，$\therefore\angle B+\angle ADB+\angle DAB=180°$

又$\because\angle B=\angle ADE=\angle C$

$\therefore\angle EDC=\angle DAB$

$\therefore\triangle BDA\backsim\triangle CED$.

（2）$\because\angle B=\angle ADE=\angle C$，$\angle B=45°$

$\therefore\triangle ABC$是等腰直角三角形

$\therefore\angle BAC=90°$

∵BC=2，∴AB=AC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$BC=$\sqrt{2}$

①当AD=AE时，$\therefore\angle ADE=\angle AED$

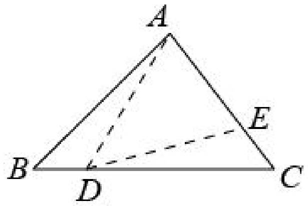
$\because\angle B=45°$，$\therefore\angle B=\angle ADE=\angle AED=45°$

$\therefore\angle DAE=90°$

$\therefore\angle DAE=\angle BAC=90°$

∵点D在BC上运动时（点D不与B、C重合）,点E在AC上

∴此情况不符合题意.



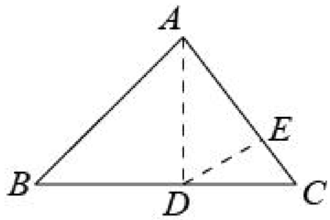
②

当 AD=DE 时，$\therefore \angle DAE = \angle DEA$

∴由（1）结论可知：$\triangle BDA \cong \triangle CED$

∴AB=DC=$\sqrt{2}$

$\therefore\ BD = 2-\sqrt{2}$.



③

当 AE=DE 时，$\angle ADE = \angle DAE = 45°$

$\therefore \triangle AED$是等腰直角三角形

$\because \angle B = 45°$，$\therefore \angle B$=$\angle C$=$\angle DAE = 45°$

$\therefore \angle ADC = 90°$，即$AD \perp BC$

$\therefore\ BD = \frac{1}{2}BC$=1.

综上所诉：$BD = 2-\sqrt{2}$或 1.

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定及等腰三角形的存在性问题，关键是利用“K”型相似模型及根据“等边对等角”、等腰直角三角形的性质得到线段的等量关系，进而求解问题.

11．探究：见解析；拓展：$\frac{5}{2}$.

【分析】感知：先判断出∠BAP＝∠DPC，进而得出结论；

探究：根据两角相等，两三角形相似，进而得出结论；

拓展：利用△BDP∽△CPE 得出比例式求出 CE，结合三角形内角和定理证得 AC⊥AB 且 AC＝AB；最后在直角△ADE 中利用勾股定理来求 DE 的长度.

【详解】解：感知：∵∠APD＝90°，

∴∠APB+∠DPC＝90°，

∵∠B＝90°，

∴∠APB+∠BAP＝90°，

∴∠BAP＝∠DPC，

∵AB∥CD，∠B＝90°，

∴∠C＝∠B＝90°，

∴△ABP∽△PCD；

探究：∵∠APC＝∠BAP+∠B，∠APC＝∠APD+∠CPD，

∴∠BAP+∠B＝∠APD+∠CPD．

∵∠B＝∠APD，

∴∠BAP＝∠CPD．

∵∠B＝∠C，

∴△ABP∽△PCD；

拓展：同探究的方法得出，△BDP∽△CPE，

∴$\frac{BD}{CP}=\frac{BP}{CE}$,

∵点P是边BC的中点，

∴BP＝CP＝$3\sqrt{2}$，

∵BD＝4，

∴$\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{CE}$,

∴CE＝$\frac{9}{2}$,

∵∠B＝∠C＝45°，

∴∠A＝180°﹣∠B﹣∠C＝90°，

即AC⊥AB且AC＝AB＝6，

∴AE＝AC﹣CE＝6﹣$\frac{9}{2}$＝$\frac{3}{2}$，AD＝AB﹣BD＝6﹣4＝2，

在Rt△ADE中，DE＝$\sqrt{AD^2+AE^2}$＝$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}$＝$\frac{5}{2}$.

故答案是：$\frac{5}{2}$.

【点睛】此题是相似综合题．主要考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理、三角形内角和定理以及三角形外角的性质．解本题的关键是判断出△ABP∽△PCD．

12．（1）见解析；（2）$AC=\frac{15}{4}$.

【分析】（1）连接OD，根据切线的性质和直角三角形斜边的中线以及等腰三角形的性质得出，$\angle EDC=\angle ECD$，$\angle ODC=\angle OCD$，然后利用等量代换即可得出$DE\perp OD$，从而证明结论；

（2）首先根据勾股定理求出 BC 的长度，然后证明$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，最后利用$\frac{CD}{AC}=\frac{BD}{BC}$求解即可.

【详解】（1）证明：连接OD，如图，

∵BC是$\odot O$的直径，

∴$\angle BDC=90°$，

∴$\angle ADC=90°$，

∵E为AC的中点，

∴$DE=EC=\frac{1}{2}AC$，

∴$\angle EDC=\angle ECD$，

∵$OD=OC$ ，

∴$\angle ODC=\angle OCD$，

∵AC切$\odot O$于点C，

∴$AC\perp OC$.

∴$\angle EDC+\angle ODC=\angle ECD+\angle OCD=90°$，

∴$DE\perp OD$，

∴DE是$\odot O$的切线；

（2）解：在 Rt$\triangle BCD$中，

∵$BD=4$，$CD=3$，

∴$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=5$

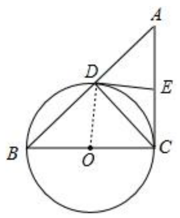
∵$\angle BDC=\angle BCA=90°$，$\angle B=\angle B$.

∴$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，

∴$\frac{CD}{AC}=\frac{BD}{BC}$,

即$\frac{3}{AC}=\frac{4}{5}$,

∴$AC=\frac{15}{4}$.



【点睛】本题主要考查圆的综合问题，掌握切线的判定及性质，相似三角形的判定及性质是解题的关键.

13．C【分析】根据相似三角形的判定定理得到$\Delta ACD \sim \Delta BCA$，再由相似三角形的性质得到答案.

【详解】∵$\angle CAD=\angle B$，$\angle ACD=\angle BCA$，

∴$\Delta ACD \sim \Delta BCA$，

∴$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCA}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$，即$\frac{a}{S_{\Delta BCA}}=\frac{1}{4}$，

解得，ΔBCA的面积为$4a$，

∴ΔABD的面积为：$4a-a=3a$，

故选C.

【点睛】本题考查相似三角形的判定定理和性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定定理和性质.

14．B【分析】先根据已知证明△ACD∽△BCA，再根据相似三角形的性质得到$AC^2=CD\cdot CB$，设BD=CD=x，得到AC=$\sqrt{2}$x，根据相似三角形的性质计算即可.

【详解】解：∵∠CAD=∠B，∠C=∠C，

∴△ACD∽△BCA，

∴$\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}$，即$AC^2=CD\cdot CB$，

设BD=CD=x，

∵点D是△ABC的边BC的中点，

∴BC=2x

∴AC=$\sqrt{2}$x，

∴$\frac{\triangle ACD的周长}{\triangle ABC的周长}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{2}x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{\triangle ACD的周长}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

∴△ACD的周长=$5\sqrt{2}$，

故选B.【点睛】本题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的周长比等于相似比是解题的关键.