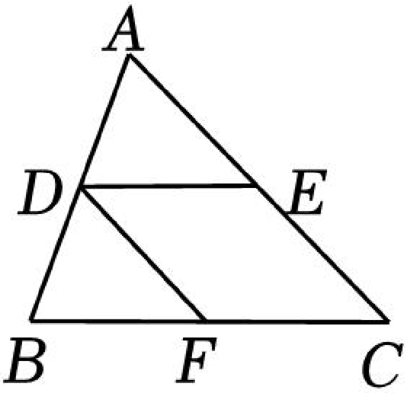
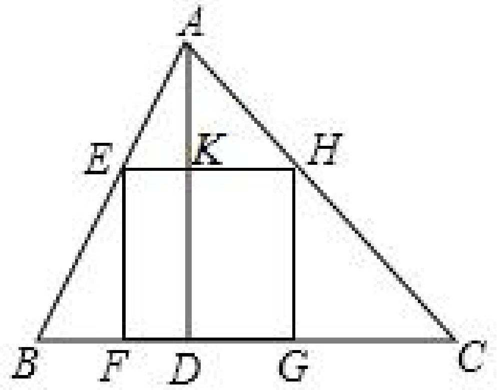
例 1 如图，设 D 是△ABC 的边 AB 上的一点，作 $DE // BC$ 交 AC 于点 E，作 $DF // AC$ 交 BC 于点 F．记△ADE，△DBF，△ABC 的面积分别为 S_1，S_2，S，

则：（1）$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$．（2）$S_{\square DECF}=2\sqrt{S_1S_2}$．



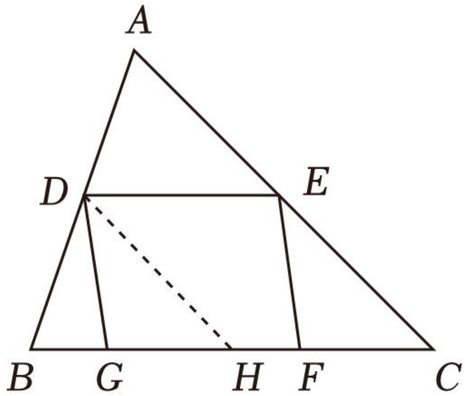
例 2 如图，已知正方形 $EFGH$ 内接于△ABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，设 $BC=a$，$AD=h$，$EH=x$．（1）求证：$\frac{x}{a}+\frac{x}{h}=1$；（2）求证：$S_{正方形EFGH}\leq\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．



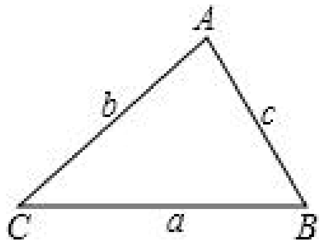
练习 1 如图，已知四边形 $DEFG$ 为△ABC 的内接平行四边形，

设△ADE，△EFC，△DGB，△ABC 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S，求证：

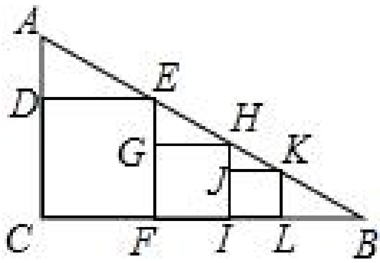
（1）$S_{\square DEFG}=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$；（2）$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2+S_3})^2$；（3）$S_{\square DEFG}\leqslant S_1+S_2+S_3$．



练习 2 如图，在一块锐角三角形的余料上，加工成正方形零件，使正方形的 4 个顶点都在三角形边上，若三角形的三边长分别为 a、b、c，且 $a>b>c$，问正方形的 2 个顶点放在哪条边上可使加工出来的正方形零件面积最大？

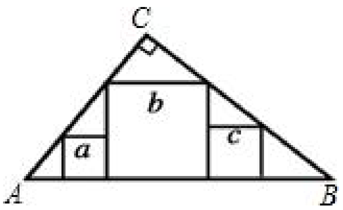


练习 3 如图，在 Rt△ACB 内作边长依次为 m、n、p（$m>n>p$）的三个正方形，设 $BC=a$，$AC=b$.（1）用 a、b 分别表示 m、n、p；（2）探讨 m、n、p 之间的关系.

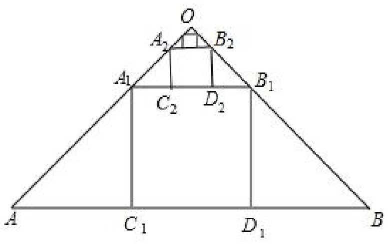


练习 4 （2008•烟台）如图，在 Rt△ABC 内有边长分别为 a，b，c 的三个正方形，则 a，b，c 满足的关系式是（　　）

A．$b=a+c$　　B．$b=ac$　　C．$b^2=a^2+c^2$　　D．$b=2a=2c$



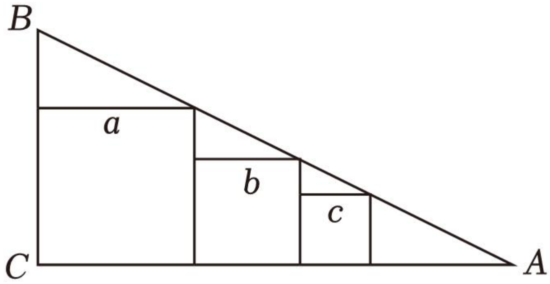
练习 5（2012•日照）如图，在斜边长为 1 的等腰直角三角形 OAB 中，作内接正方形 $A_1B_1D_1C_1$；在等腰直角三角形 OA_1B_1 中，作内接正方形 $A_2B_2D_2C_2$；在等腰直角三角形 OA_2B_2 中，作内接正方形 $A_3B_3D_3C_3$；…；依次作下去，则第 n 个正方形 $A_nB_nD_nC_n$ 的边长是（　　）



A．$\frac{1}{3^{n-1}}$　　B．$\frac{1}{3^{n}}$　　C．$\frac{1}{3^{n+1}}$　　D．$\frac{1}{3^{n+2}}$

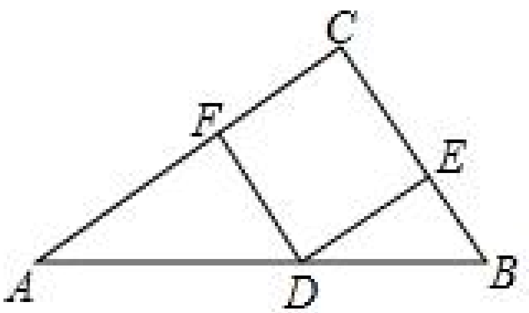
练习 6 （2022 秋）如图，在 Rt△*ABC* 内，画有边长依次为 *a*，*b*，*c* 的三个正方形，则 *a*，*b*，*c* 之间的关系是（　　）

A．$b=a+c$　　B．$b^2=ac$　　C．$b^2=a^2+c^2$　　D．$b=2a=2c$



练习 7（2022 秋）如图，Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，以点 *C* 为顶点向△*ABC* 内作正方形 *DECF*，使正方形的另三个顶点 *D*、*E*、*F* 分别在边 *AB*，*BC*，*AC* 上，若 *BC*＝6，*AB*＝10，则正方形 *DECF* 的边长为（　　）

A．$\frac{18}{7}$　　B．$\frac{24}{7}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{5}{3}$



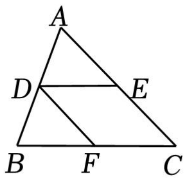
2023 年 11 月 14 日

参考答案与试题解析

例 1 如图，设 D 是△ABC 的边 AB 上的一点，作 DE∥BC 交 AC 于点 E，作 DF∥AC 交 BC 于点 F．记△ADE，△DBF，△ABC 的面积分别为 S_1，S_2，S，则：

（1）$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$．

（2）$S_{\square DECF}=2\sqrt{S_1S_2}$．



【考点】相似三角形的判定与性质；平行四边形的性质．

【答案】（1）证明见解析．

（2）证明见解析．

【分析】（1）由相似三角形的性质推出$\frac{S_1}{S}=(\frac{AD}{AB})^2$，$\frac{S_2}{S}=(\frac{BD}{BA})^2$，得到$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{AD+BD}{AB}=1$，即可证明问题．

（2）由（1）的结论和完全平方公式即可解决问题．

【解答】证明：（1）∵DE∥BC，DF∥AC 交 BC，

∴△ADE∽△ABC，△BDF∽△BAC，

∴$\frac{S_1}{S}=(\frac{AD}{AB})^2$，$\frac{S_2}{S}=(\frac{BD}{BA})^2$，

∴$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{AD}{AB}$，$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{BD}{AB}$，

∴$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{AD+BD}{AB}=1$，

∴$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$，

∴$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$．

（2）∵$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$，

∴$S_1+S_2+S_{\square DECF}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$，

∴$S_1+S_2+S_{\square DECF}=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$，

∴$S_{\square DECF}=2\sqrt{S_1S_2}$．

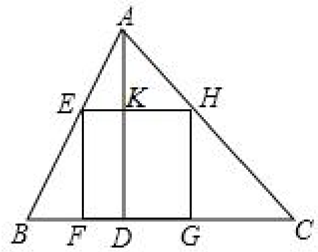
【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，关键是掌握相似三角形的性质：相似三角

形面积的比等于相似比的平方．

例 2 如图，已知正方形 $EFGH$ 内接于△ABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，设 $BC=a$，$AD=h$，$EH=x$．

（1）求证：$\frac{x}{a}+\frac{x}{h}=1$；

（2）求证：$S_{正方形EFGH}\leq\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．



【考点】相似三角形的判定与性质；正方形的性质．

【答案】见试题解答内容

【分析】(1)由 $EH/\!/BC$，$EF/\!/AD$，推出$\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$，$\frac{EF}{AD}=\frac{BE}{AB}$，可得$\frac{EH}{BC}+\frac{EF}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}=1$，由此即可解决问题；

（2）由 $S_{正方形EFGH}=x^2=\frac{a^2h^2}{(a+h)^2}=\frac{a^2h^2}{a^2+2ah+h^2}$，因为（$a-h$）$^2\geq0$，可知 $a^2+h^2\geq2ah$，推出 $S_{正方形EFGH}\leq\frac{a^2h^2}{4ah}$，即 $S_{正方形EFGH}\leq\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

【解答】证明：（1）∵$AD\perp BC$，四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴$EH/\!/BC$，$EF/\!/AD$，

∴△AEH∽△ABC，△BEF∽△BAD，

∴$\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$，$\frac{EF}{AD}=\frac{BE}{AB}$，

∴$\frac{EH}{BC}+\frac{EF}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB}=1$，

∴$\frac{x}{a}+\frac{x}{h}=1$．

（2）∵$\frac{x}{a}+\frac{x}{h}=1$，

∴$x=\frac{ah}{a+h}$，

∴$S_{正方形EFGH}=x^2=\frac{a^2h^2}{(a+h)^2}=\frac{a^2h^2}{a^2+2ah+h^2}$，

∵（$a-h$）^{2}≥0，

∴a^2+h^2≥$2ah$，

∴$S_{正方形EFGH}\leq\frac{a^2h^2}{4ah}$，

∴$S_{正方形EFGH}\leq\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

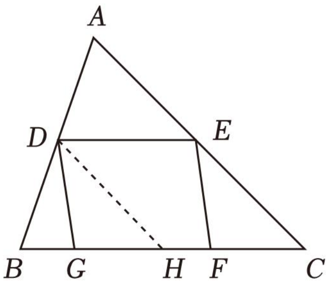
【点评】此题是相似三角形的判定与性质，正方形的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

练习 1 如图，已知四边形 $DEFG$ 为△ABC 的内接平行四边形，设△ADE，△EFC，△DGB，△ABC 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S，求证：

（1）$S_{□DEFG}=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$；

（2）$S=$（$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2+S_3}$）^{2}；

（3）$S_{□DEFG}\leq S_1+S_2+S_3$．



【考点】相似三角形的判定与性质；平行四边形的性质．

【答案】（1）答案见解答过程；

（2）答案见解答过程；

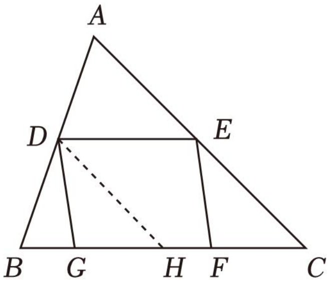
（3）答案见解答过程．

【分析】（1）过点 D 作 $DH\parallel AC$ 交 BC 于点 H，先证 $S_{\triangle DGH}=S_{\triangle EFC}=S_2$，由△$ADE$∽△$ABC$ 得$\frac{\sqrt{S_1}}{S}=\frac{AD}{AB}$，由△$DBH$∽△$ABC$ 得$\frac{\sqrt{S_2+S_3}}{S}=\frac{BD}{AB}$，由此得 $\sqrt{}\frac{\sqrt{S_1}}{S}+\frac{\sqrt{S_2+S_3}}{S}=\frac{AD}{AB}+\frac{BD}{AB}=1$，则 $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2+S_3})^2$，再结合 $S-S_1-S_2-S_3=S_{□DEFG}$ 即可得出结论；

（2）由（1）可可得出结论；

（3）由（1）可知：$S_{□DEFG}=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$，进而得 $S_1+S_2+S_3-S_{□DEFG}=(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2+S_3})^2\geq0$,，据此可得出结论．

【解答】证明：（1）过点 D 作 $DH\parallel AC$ 交 BC 于点 H，如图：



∵四边形 $DEFG$ 为平行四边形，

∴$DE // BC$，$DE = GF$，

又 $DH // AC$，

∴四边形 $DECH$ 为平行四边形，

∴$DE = CH$，△DGH 和△EFC 等高，

∴$GF = CH$，

即：$GH+HF = CF+HF$，

∴$GH = CF$，

∴$S_{\triangle DGH} = S_{\triangle EFC} = S_2$，

∵$DE // BC$，

∴△ADE∽△ABC，

∴$\frac{S_1}{S} = \frac{AD^2}{AB^2}$,

即：$\frac{\sqrt{S_1}}{S} = \frac{AD}{AB}$,

∵$DH // AC$，

∴△DBH∽△ABC，

∴$\frac{S_{\triangle DBH}}{S} = \frac{BD^2}{AB^2}$,

即：$\frac{\sqrt{S_2+S_3}}{S} = \frac{BD}{AB}$,

∴ $\sqrt{}\frac{\sqrt{S_1}}{S} + \frac{\sqrt{S_2+S_3}}{S} = \frac{AD}{AB} + \frac{BD}{AB} = 1$，

∴$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2 + S_3}$

∴$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2 + S_3})^2$，

即：$S = s_1+s_2+s_3-2\sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2 + S_3}$，

∵$S - S_1 - S_2 - S_3 = S_{\square DEFG}$，

∴$S_{\square DEFG} = 2\sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2 + S_3} = 2\sqrt{S_1(S_2 + S_3)}$；

（2）由（1）可知：$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2+S_3})^2$，

（3）由（1）可知：$S_{\square DEFG}=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$；

$\therefore S_1+S_2+S_3-S_{\square DEFG}$

$=S_1+S_2+S_3-2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$

$=(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2+S_3})^2\geq 0$，

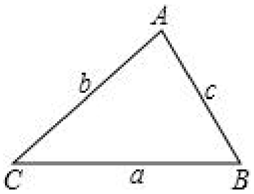
$\therefore S_1+S_2+S_3-S_{\square DEFG}\geqslant 0$，

$\therefore S_1+S_2+S_3\geqslant S_{\square DEFG}$，

即：$S_{\square DEFG}\leqslant S_1+S_2+S_3$.

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定方法，理解相似三角形的面积之比等于相似比的平方是解答此题的关键.

练习 2 如图，在一块锐角三角形的余料上，加工成正方形零件，使正方形的 4 个顶点都在三角形边上，若三角形的三边长分别为 a、b、c，且 $a>b>c$，问正方形的 2 个顶点放在哪条边上可使加工出来的正方形零件面积最大？



【考点】相似三角形的应用.

【答案】见试题解答内容

【分析】设 a、b、c 三边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，$\triangle ABC$ 的面积为 S，用 S、a、b、c、h_a、h_b、h_c 表示出正方形的边长，比较出其大小即可.

【解答】解：设 a、b、c 三边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，$\triangle ABC$ 的面积为 S，

三边上正方形的边长分别为 x_a、x_b、x_c，

当两个顶点在 BC 上时，$EF\parallel BC$

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ACB$

$\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AD}$

$\therefore \frac{x_a}{a}=\frac{h_a-x_a}{h_a}$

解得：$x_a=\frac{a\cdot h_a}{a+h_a}$

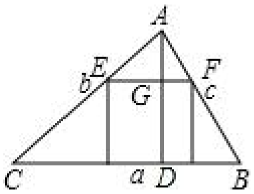
$\because S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$

$\therefore x_a=\dfrac{2S}{a+h_a}$,

同理：$x_b=\dfrac{2S}{b+h_b}$，$x_c=\dfrac{2S}{c+h_c}$,

作差比较可得 $x_a<x_b<x_c$，

即当正方形的 2 个顶点放在最短边上可使正方形零件面积最大.

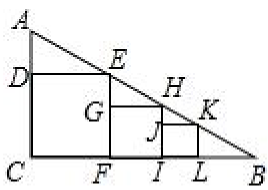


【点评】本题考查的是相似三角形在实际生活中的运用，解答此题的关键是要熟知三角形的面积为定值解答.

练习 3 如图，在 Rt△ACB 内作边长依次为 m、n、p（$m>n>p$）的三个正方形，设 $BC=a$，$AC=b$.

（1）用 a、b 分别表示 m、n、p；

（2）探讨 m、n、p 之间的关系.



【考点】相似三角形的判定与性质；正方形的性质.

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）由四边形 $CDEF$ 是正方形，即可得 $CD=CF=DE=EF=m$，$DE/\!/AC$，然后根据平行线分线段成比例定理，即可得$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$，又由 $BC=a$，$AC=b$，即可求得 m 的值，同理求得 n，p 的值；

（2）根据△EGH∽△HJK，得到比例式$\dfrac{EG}{HJ}=\dfrac{GH}{JK}$，代入 m，n，p 即可得到结论.

【解答】解：（1）∵四边形 $CDEF$ 是正方形，

则 $CD=CF=DE=EF=m$，$DE/\!/BC$，

$\therefore\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$,

即$\dfrac{m}{a}=\dfrac{b-m}{b}$,

$\therefore m=\dfrac{ab}{a+b}$,

同理：$n=\dfrac{a^2b}{(a+b)^2}$，

$p=\dfrac{a^3b}{(a+b)^3}$，

（2）∵$GH /\!/ JK /\!/ BC$，

∴$\angle GEH=\angle JHK=\angle B$，

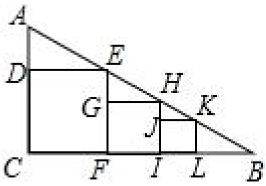
∵$\angle EGH=\angle HJK=90^\circ$，

∴$\triangle EGH\backsim\triangle HJK$，

∴$\dfrac{EG}{HJ}=\dfrac{GH}{JK}$，

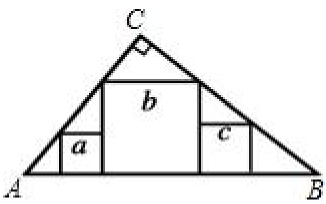
即$\dfrac{m-n}{n-p}=\dfrac{n}{p}$，

∴$n^2=pm$．



【点评】本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定与性质，解题的关键是根据相似三角形对应边成比例找出后面正方形的边长与第一个正方形的边长的关系．

练习 4 （2008•烟台）如图，在 Rt△ABC 内有边长分别为 a，b，c 的三个正方形，则 a，b，c 满足的关系式是（　　）



A．$b=a+c$　　　B．$b=ac$　　　C．$b^2=a^2+c^2$　　　D．$b=2a=2c$

【考点】相似三角形的判定与性质；正方形的性质．

【答案】A

【分析】因为 Rt△ABC 内有边长分别为 a、b、c 的三个正方形，所以图中三角形都相似，且与 a、b、c 关系密切的是△DHE 和△GQF，只要它们相似即可得出所求的结论．

【解答】解：∵$DH /\!/ AB /\!/ QF$

∴$\angle EDH=\angle A$，$\angle GFQ=\angle B$；

又∵$\angle A+\angle B=90^\circ$，$\angle EDH+\angle DEH=90^\circ$，$\angle GFQ+\angle FGQ=90^\circ$；

∴∠*EDH*＝∠*FGQ*，∠*DEH*＝∠*GFQ*；

∴△*DHE*∽△*GQF*，

∴$\frac{DH}{GQ}=\frac{EH}{FQ}$

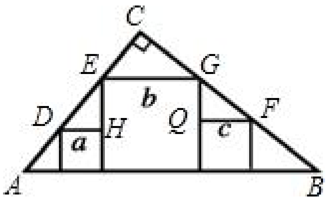
∴$\frac{a}{b-c}=\frac{b-a}{c}$

∴$ac=(b-c)(b-a)$

∴$b^2=ab+bc=b(a+c)$，

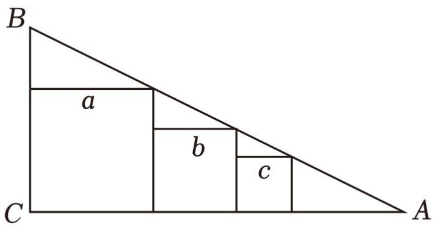
∴$b=a+c$.

故选：*A*.



【点评】此题考查了相似三角形的判定，同时还考查观察能力和分辨能力.

练习 4 （2022 秋•丰顺县校级月考）如图，在 Rt△*ABC* 内，画有边长依次为 *a*，*b*，*c* 的三个正方形，则 *a*，*b*，*c* 之间的关系是（　　）



A．$b=a+c$　　B．$b^2=ac$　　C．$b^2=a^2+c^2$　　D．$b=2a=2c$

【考点】相似三角形的性质；正方形的性质.

【答案】*B*

【分析】先证明△*FHG*∽△*GMN*，得到$\frac{HF}{GM}=\frac{HG}{MN}$，然后代入 *a*，*b*，*c* 进行计算即可.

【解答】解：∵*DH*∥*AB*∥*QF*∴∠*EDH*＝∠*A*，∠*GFQ*＝∠*B*；

又∵∠*A*+∠*B*＝90°，∠*EDH*+∠*DEH*＝90°，∠*GFQ*+∠*FGQ*＝90°；

∴∠*EDH*＝∠*FGQ*，∠*DEH*＝∠*GFQ*；

∴△*DHE*∽△*GQF*，

△*FHG*∽△*GMN*，

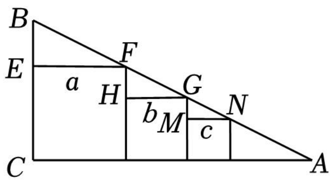
∴$\frac{HF}{GM}=\frac{HG}{MN}$，

则$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}$,

∴$ac-bc=b^2-bc$，

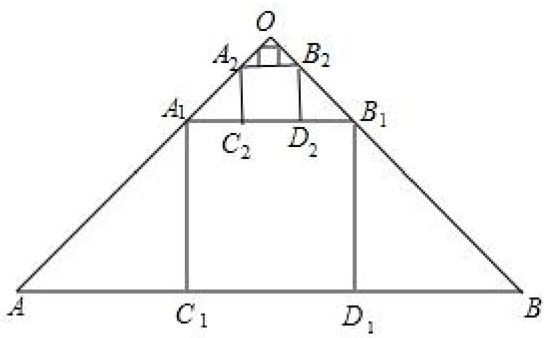
∴$b^2=ac$，

故选：B.



【点评】本题考查了相似三角形的判定，解题关键是根据相似找出对应边成比例.

练习 5（2012•日照）如图，在斜边长为 1 的等腰直角三角形 OAB 中，作内接正方形 $A_1B_1D_1C_1$；在等腰直角三角形 OA_1B_1 中，作内接正方形 $A_2B_2D_2C_2$；在等腰直角三角形 OA_2B_2 中，作内接正方形 $A_3B_3D_3C_3$；…；依次作下去，则第 n 个正方形 $A_nB_nD_nC_n$ 的边长是（　　）



A．$\frac{1}{3^{n-1}}$　　B．$\frac{1}{3^n}$　　C．$\frac{1}{3^{n+1}}$　　D．$\frac{1}{3^{n+2}}$

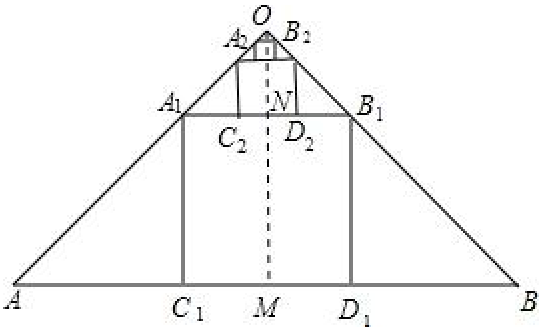
【考点】等腰直角三角形；正方形的性质.

【答案】B

【分析】过 O 作 OM 垂直于 AB，交 AB 于点 M，交 A_1B_1 于点 N，由三角形 OAB 与三角形 OA_1B_1 都为等腰直角三角形，得到 M 为 AB 的中点，N 为 A_1B_1 的中点，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得出 OM 为 AB 的一半，由 $AB=1$ 求出 OM 的长，再由 ON 为 A_1B_1 的一半，即为 MN 的一半，可得出 ON 与 OM 的比值，求出 MN 的长，即为第 1 个正方形的边长，同理求出第 2 个正方形的边长，依此类推即可得到第 n 个正方形的边长；

根据题意得到三角形 AA_1C_1 与三角形 BD_1B_1 都为等腰直角三角形，再利用正方形的性质及等量代换得到 $C_1D_1=\frac{1}{3}AB$，依此类推确定出所求即可.

【解答】解：法 1：过 O 作 $OM\perp AB$，交 AB 于点 M，交 A_1B_1 于点 N，如图所示：



∵$A_1B_1\parallel AB$，∴$ON\perp A_1B_1$，

∵△OAB 为斜边为 1 的等腰直角三角形，

∴$OM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$,

又∵△OA_1B_1 为等腰直角三角形，

∴$ON=\frac{1}{2}A_1B_1=\frac{1}{2}MN$,

∴ON：OM＝1：3，

∴第 1 个正方形的边长 $A_1C_1=MN=\frac{2}{3}OM=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

同理第 2 个正方形的边长 $A_2C_2=\frac{2}{3}ON=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3^2}$,

则第 n 个正方形 $A_nB_nD_nC_n$ 的边长$\frac{1}{3^n}$;

法 2：由题意得：$\angle A=\angle B=45^\circ$，

∴$AC_1=A_1C_1=C_1D_1=B_1D_1=BD_1$，$AB=1$，

∴$C_1D_1=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}$,

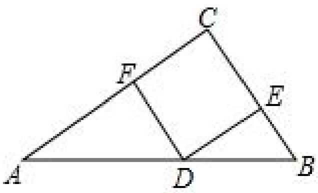
同理可得：$C_2D_2=\frac{1}{3}A_1B_1=\frac{1}{3^2}AB=\frac{1}{3^2}$,

依此类推$C_nD_n=\frac{1}{3^n}$.

故选：B．

【点评】此题考查了等腰直角三角形的性质，以及正方形的性质，属于一道规律型的题，熟练掌握等腰直角三角形的性质是解本题的关键．

练习 7 （2022 秋•兴隆县期中）如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，以点 C 为顶点向△ABC 内作正方形 $DECF$，使正方形的另三个顶点 D、E、F 分别在边 AB，BC，AC 上，若 $BC=6$，$AB=10$，则正方形 $DECF$ 的边长为（　　）



A. $\frac{18}{7}$　　B. $\frac{24}{7}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

【考点】相似三角形的判定与性质；勾股定理；正方形的性质．

【答案】B

【分析】根据勾股定理得出 AC 的长，再根据相似三角形的判定和性质解答即可．

【解答】解：∵Rt△ABC 中，∠C＝90°，BC＝6，AB＝10，

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=8$，

∵正方形 $DECF$，

∴DE∥AC，CE＝DE

∴△DEB∽△ABC，

∴$\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$，

即$\frac{6-CE}{6}=\frac{CE}{8}$，

解得：$CE=\frac{24}{7}$，

故选：B．

【点评】本题主要考查平行线分线段成比例的性质，掌握平行线分线段中的线段对应成比例是解题的关键，注意方程思想的应用．