复习 1-9 最后两题

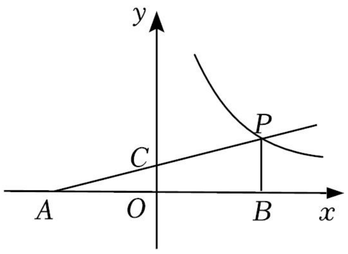
（1）

21．一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(x>0)$ 的图象交于点 $P(n,2)$，与 x 轴、y 轴分别交于点 $A(-4,0)$、C，$PB\perp x$ 轴于点 B，$S_{\Delta ACO}=2$．

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）在反比例函数图象上求一点 D，使得以 B、C、P、D 为顶点的四边形是菱形；

（3）若 ΔPAB 与 ΔPAQ 相似但不全等，判断平面内符合题意的点 Q 有几个？并求出其中一个点的坐标．



【分析】（1）由 $S_{\Delta ACO}=2$．得 $C(0,1)$，将 $A(-4,0)$，$C(0,1)$ 代入一次函数解析式即可，从而得出点 P 的坐标，再代入反比例函数解析式；

（2）由 $CP=CB$ 知，$D(8,1)$；

（3）由 AP 是公共边可知，利用翻折变换可知有 8 个点 Q．

【解答】解：（1）$\because S_{\Delta ACO}=2$．

$\therefore \dfrac{1}{2}\times OA\times OC=2$，

$\because A(-4,0)$，

$\therefore OA=4$，

$\therefore OC=1$，

$\therefore C(0,1)$，

将 $A(-4,0)$，$C(0,1)$ 代入一次函数解析式得：

$\begin{cases}-4k+b=0\\ b=1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ b=1\end{cases}$，

$\therefore$ 一次函数解析式为：$y=\dfrac{1}{4}x+1$，

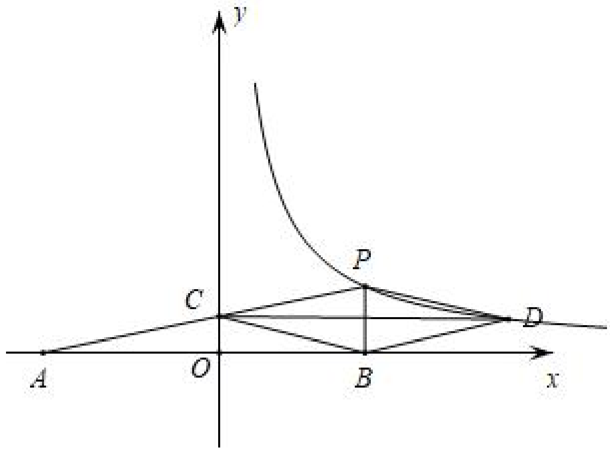
当 $y=2$ 时， $x=4$，

$\therefore P(4,2)$，

将 $P(4,2)$ 代入反比例函数解析式得： $m=8$，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为： $y=\dfrac{8}{x}$；

（2）如图，



当 PB 为菱形的对角线时，

$\because$ 四边形 $BCPD$ 为菱形，

$\therefore PB$ 垂直平分 CD，

$\because PB\perp x$ 轴， $P(4,2)$，

$\therefore D(8,1)$；

当 PC 为菱形的对角线时， $PB//CD$，

此时点 D 在 y 轴上，不可能在反比例函数的图象上，故此种情形不存在，

综上所述， $D(8,1)$；

（3）如图，当 $\angle PAQ=90^{\circ}$，且 $AQ_1:AP=1:4$ 时，

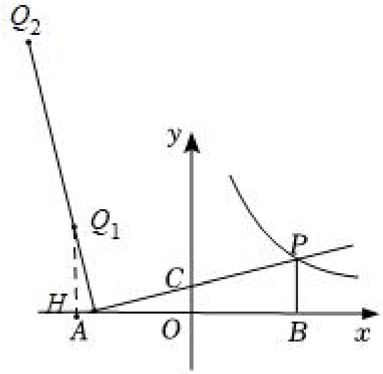
过点 Q_1 作 $Q_1H\perp x$ 轴于 H，

则 $\Delta PAB\backsim\triangle AQ_1H$，

$\therefore \dfrac{HA}{PB}=\dfrac{Q_1A}{AB}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore HA=\dfrac{1}{2}$， $HQ_1=2$，

$\therefore Q_1(-\dfrac{9}{2}，\ 2)$，



当 $AQ_2:AP=4:1$ 时，同理可求 Q_2 坐标，

若将此时的 AQ 沿 AP 翻折，此时共存在 4 个点 Q 符合题意，

当 $\angle APQ=90°$ 时，同理存在 4 个点 Q，

故 Q 点一共有 8 个．

【点评】本题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法求函数解析式，菱形的判定与性质，全等三角形的性质，矩形的判定与性质等知识，熟练掌握特殊四边形的性质是解题的关键．

22．如图 1，平面直角坐标系 xOy 中，$A(-4,3)$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象分别交矩形 $ABOC$ 的两边 AC、AB 于 E、F（E、F 不与 A 重合），沿着 EF 将矩形 $ABOC$ 折叠使 A、D 重合．

（1）当点 E 为 AC 中点时，求点 F 的坐标，并直接写出 EF 与对角线 BC 的关系；

（2）如图 2，连接 CD，

①ΔCDE 的周长是否有最小值，若有，请求出最小值；若没有，请说明理由；

②当 CD 平分 $\angle ACO$ 时，直接写出 k 的值．

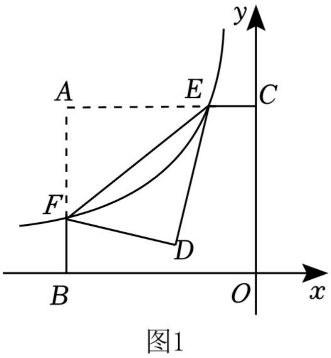


图1

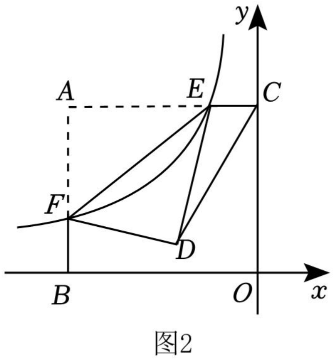
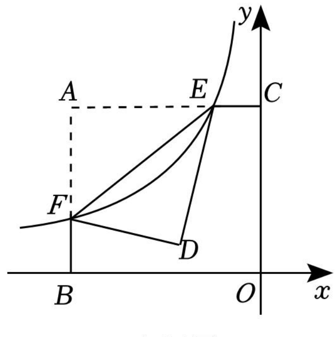


图2



备用图

【分析】（1）连接 BC，求出 $E(-2,3)$，即得 $k=-2\times3=-6$，从而 $F(-4,\frac{3}{2})$，可知 EF 是

ΔABC 的中位线，故 $EF//BC$， $EF=BC$；

（2）连接 BC， AD，求出 $AF=3+\frac{k}{4}=\frac{k+12}{4}$， $AE=\frac{k}{3}+4=\frac{k+12}{3}$，可得 $\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$，从而 $\Delta AFE\backsim\Delta ABC$，$\angle AFE=\angle ABC$，即得 $EF//BC$，又 A，D 关于 EF 对称，故 $AD\perp EF$，D 在过 A 且与 BC 垂直的直线上；①ΔCDE 的周长有最小值，根据 $C_{\Delta CDE}=CD+CE+DE=CD+CE+AE=CD+AC=CD+4$，知当 $CD\perp AD$ 时，CD 取最小值，$C_{\Delta CDE}$ 也取最小值，由 $\Delta ACD\backsim\Delta BCA$，有 $\frac{4}{5}=\frac{CD}{4}$，即可得 ΔCDE 的周长的最小值为 $\frac{16}{5}+4=\frac{36}{5}$；

②当 D' 在 x 轴上时，由 $\Delta ABD'\backsim\Delta CAB$，得 $BD'=\frac{9}{4}$，$D'(-\frac{7}{4}，0)$，可求出直线 AD' 解析式为 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$，直线 CD 解析式为 $y=x+3$，联立 $\begin{cases}y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\\y=x+3\end{cases}$，解得 $D(-\frac{16}{7}，\frac{5}{7})$，即得 AD 的中点坐标为 $(-\frac{22}{7}，\frac{13}{7})$，求出直线 BC 解析式为 $y=\frac{3}{4}x+3$，设直线 EF 解析式为 $y=\frac{3}{4}x+m$，把 $(-\frac{22}{7}，\frac{13}{7})$ 代入得 $m=\frac{59}{14}$，故 $F(-4,\frac{59}{14})$， $k=-4\times\frac{59}{14}=-\frac{34}{7}$.

【解答】解：（1）连接 BC，如图：

$\because E$ 为 AC 的中点，

$\therefore E(-2,3)$，

$\therefore k=-2\times3=-6$，

把 $x=-4$ 代入 $y=-\frac{6}{x}$ 得： $y=\frac{3}{2}$，

$\therefore F(-4,\frac{3}{2})$，

$\because A(-4,3)$， $B(-4,0)$，

$\therefore F$ 是 AB 的中点，

$\therefore EF$ 是 ΔABC 的中位线，

$\therefore EF//BC$， $EF=\frac{1}{2}BC$；

（2）连接 BC， AD，如图：

将 $y=3$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得： $x=\frac{k}{3}$，

将 $x=-4$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得，$y=-\frac{k}{4}$，

$\therefore AF=3+\frac{k}{4}=\frac{k+12}{4}$，$AE=\frac{k}{3}+4=\frac{k+12}{3}$，

$\therefore \frac{AF}{AB}=\frac{k+12}{12}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{k+12}{12}$，

$\therefore \frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \Delta AFE \backsim \Delta ABC$，

$\therefore \angle AFE=\angle ABC$，

$\therefore EF//BC$，

$\because A$，D 关于 EF 对称，

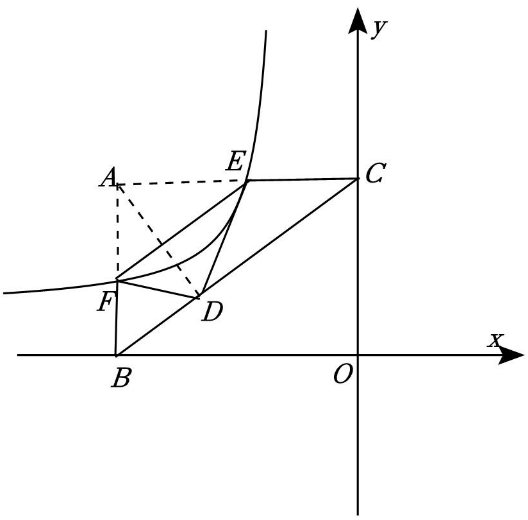
$\therefore AD\perp EF$，

$\therefore AD\perp BC$，

$\therefore D$ 在过 A 且与 BC 垂直的直线上；

①ΔCDE 的周长有最小值，

如图：



$\because C_{\Delta CDE}=CD+CE+DE=CD+CE+AE=CD+AC=CD+4$，

$\therefore$ 当 $CD\perp AD$ 时，CD 取最小值，$C_{\Delta CDE}$ 也取最小值，

此时，点 D 在 BC 上，

$\because \angle CAD=90^\circ-\angle ACB=\angle ABC$，$\angle ADC=90^\circ=\angle BAC$，

$\therefore \Delta ACD \backsim \Delta BCA$，

$\therefore \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CD}{CA}$，即 $\dfrac{4}{5}=\dfrac{CD}{4}$，

解得 $CD=\dfrac{16}{5}$，

$\therefore \Delta CDE$ 的周长的最小值为 $\dfrac{16}{5}+4=\dfrac{36}{5}$；

②当 D' 在 x 轴上时，如图：

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle BAD'=90^\circ-\angle CAD'=\angle ACB$，

$\because \angle ABD'=90^\circ=\angle BAC$，

$\therefore \Delta ABD'\backsim\Delta CAB$，

$\therefore \dfrac{AB}{CA}=\dfrac{BD'}{AB}$，即 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{BD'}{3}$，

$\therefore BD'=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore D'(-\dfrac{7}{4}$，$0)$，

由 $A(-4,3)$，$D'(-\dfrac{7}{4}$，$0)$ 可得直线 AD' 解析式为 $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{7}{3}$，

当 CD 平分 $\angle ACO$ 时，由 $C(0,3)$ 可得 CD 与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$，

$\therefore$ 直线 CD 解析式为 $y=x+3$，

联立 $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y=x+3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-\dfrac{16}{7} \\ y=\dfrac{5}{7} \end{cases}$，

$\therefore D(-\dfrac{16}{7}$，$\dfrac{5}{7})$，

$\therefore AD$ 的中点坐标为 $(-\dfrac{22}{7}$，$\dfrac{13}{7})$，

由 $B(-4,0)$，$C(0,3)$ 可得直线 BC 解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+3$，设直线 EF 解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+m$，

把 $(-\dfrac{22}{7}$，$\dfrac{13}{7})$ 代入得：$\dfrac{13}{7}=\dfrac{3}{4}\times(-\dfrac{22}{7})+m$，

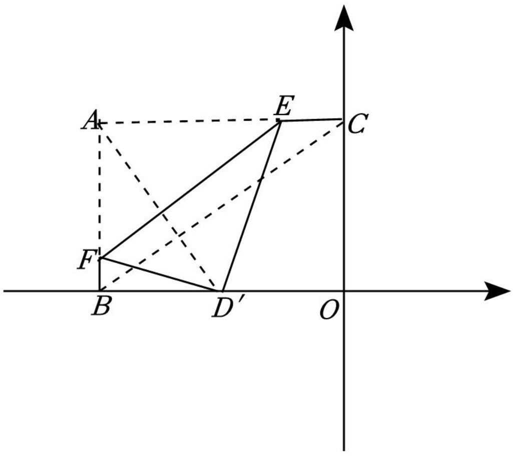
解得 $m=\dfrac{59}{14}$，

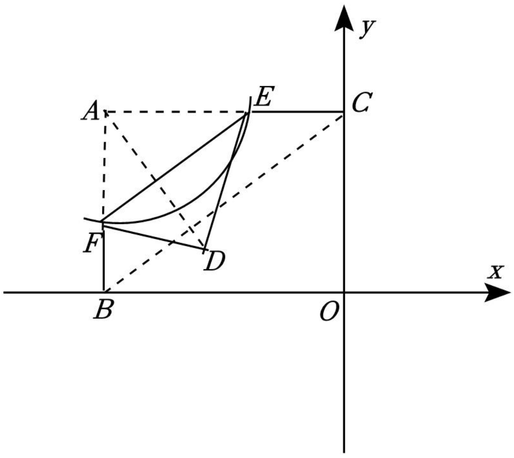
$\therefore$ 直线 EF 解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{59}{14}$，

当 $x=-4$ 时，$y=\dfrac{17}{14}$，

$\therefore F(-4,\frac{17}{14})$，

$\therefore k=-4\times\frac{17}{14}=-\frac{34}{7}$．





【点评】本题考查反比例函数的综合应用，涉及待定系数法，三角形周长，相似三角形判定与性质等知识，解题的关键是掌握相似三角形判定定理．

（2）

21．（8 分）【模型发现】如图 1，$\Delta ABC\backsim\Delta ADE$，求证：$\Delta ABD\backsim\Delta ACE$．

【深入探究】如图 2，等边ΔABC中，$AB=3$，D是AC上的动点，连接BD，将BD绕着点D逆时针旋转60°得到DE，连接CE，当点D从A运动到C时，求点E的运动路径长．

【应用拓展】如图 3，等腰 RtΔABC 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AD\perp BC$于D，E是AD上的一点，连接BE，将BE绕着点E逆时针旋转90°，得到EF，EF交BC于点G，连接CF，若$EG=\frac{1}{2}FG$，则$\frac{AB}{CF}$的值为 __$\frac{3}{2}$__．

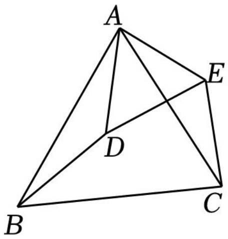


图1

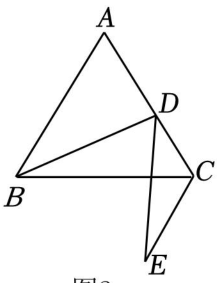


图2

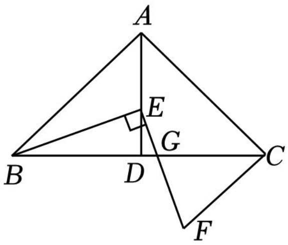


图3

【分析】【模型发现】由相似三角形的性质可得$\angle BAC=\angle DAE$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，利用相似三角形的判定可得结论；

【深入探究】由旋转的性质可得$BD=DE$，$\angle BDE=60^\circ$，由“SAS”可证$\Delta ABD\cong\Delta CBE$，可得$AD=CE$，即可求解；

【应用拓展】通过证明$\Delta ABE\backsim\Delta CBF$，可得$CF=\sqrt{2}AE$，由等腰直角三角形的性质可求$AB=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}AE$，即可求解．

【解答】【模型发现】证明：$\because\Delta ABC\backsim\Delta ADE$，

$\therefore\angle BAC=\angle DAE$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAE$，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$，

$\therefore\Delta ABD\backsim\Delta ACE$；

【深入探究】解：连接BE，

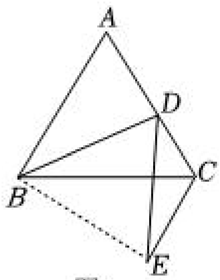


图2

$\because$将BD绕着点D逆时针旋转60°得到DE，

$\therefore BD=DE$，$\angle BDE=60^\circ$，

$\therefore\Delta BDE$是等边三角形，

$\therefore BD=BE$，$\angle DBE=60^\circ$，

$\because\Delta ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=BC=3=AC$，$\angle ABC=\angle DBE=60^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBE$，

$\therefore \Delta ABD\cong \Delta CBE(SAS)$，

$\therefore AD=CE$，

$\because$ 点 D 从 A 运动到 C，

$\therefore$ 点 E 的运动路径长为 3；

【应用拓展】解：如图，连接 BF，过点 F 作 $FH\perp BC$ 于点 H，

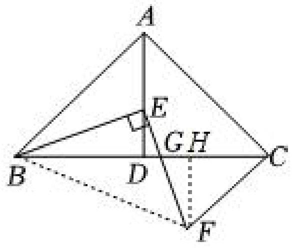


图3

$\because$ 将 BE 绕着点 E 逆时针旋转 90°，

$\therefore BE=EF$，$\angle BEF=90^{\circ}$，

$\therefore BF=\sqrt{2}BE$，$\angle EBF=45^{\circ}$，

$\because \angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore BC=\sqrt{2}AB$，$\angle ABC=45^{\circ}=\angle EBF=\angle BAD=\angle ACB$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBF$，

又 $\because \dfrac{BC}{AB}=\sqrt{2}=\dfrac{BF}{BE}$，

$\therefore \Delta ABE\backsim \Delta CBF$，

$\therefore \dfrac{CF}{AE}=\sqrt{2}$，$\angle BCF=\angle BAE=45^{\circ}$，

$\therefore CF=\sqrt{2}AE$，

$\because FH\perp BC$，

$\therefore \angle BCF=\angle HFC=45^{\circ}$，

$\therefore HC=HF$，

$\therefore CF=\sqrt{2}HF$，

$\therefore HF=AE$，

$\because AD\perp BC$，$HF\perp BC$，

$\therefore AD // HF$，

$\therefore \dfrac{HF}{DE}=\dfrac{FG}{EG}=2$，

$\therefore HF=2DE$，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AE$，

$\therefore AB=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}AE$，

$\therefore \dfrac{AB}{CF}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}AE}{\sqrt{2}AE}=\dfrac{3}{2}$，

故答案为：$\dfrac{3}{2}$．

【点评】本题是相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，旋转的性质，等腰直角三角形的性质，等边三角形的性质等知识，添加恰当辅助线构造全等三角形或相似三角形是解题的关键．

22．（9 分）如图 1，在平面直角坐标系内，直线 $y=-\dfrac{4}{3}x+8$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，交直线 $y=kx$ 于第一象限的点 C，点 D 在 y 轴上，AD 平分 $\angle BAO$．

（1）点 D 的坐标为 __$(0,3)$__；

（2）若 ΔBOC 与 ΔBAD 相似，求 k 的值；

（3）在（2）的条件下，如图 2，已知点 $M(m,-3)$，平移直线 $y=kx$ 交 x 轴于点 E，交 y 轴于点 F，平面内是否存在点 N，使得四边形 $EFMN$ 是正方形？若存在，请直接写出 m 的值；若不存在，请说明理由．

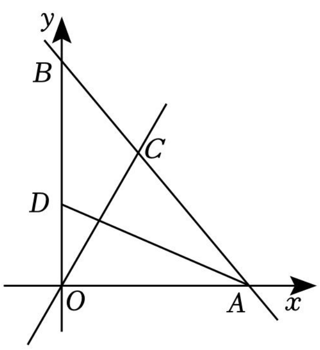


图1

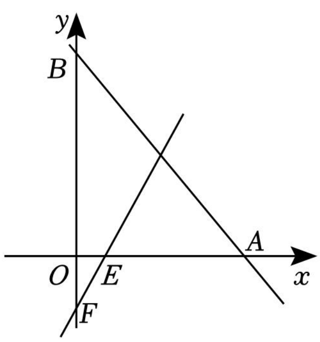
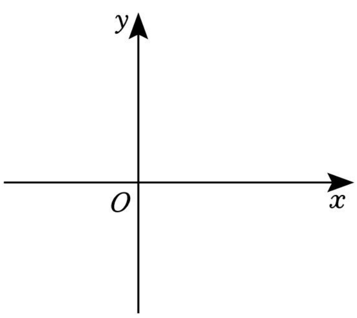


图2



备用图

【分析】（1）过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，根据角平分线的性质可得 $DE=OD$，证明 $\Delta AOD\cong\Delta AED(AAS)$，根据全等三角形的性质得 $AE=AO=6$，由勾股定理得 $AB=10$，则

$BD=8-OD$， $BE=AB-AE=4$，在 RtΔBDE 中，利用勾股定理求出 BD，可得 OD 的值，即可求解；

（2）若 ΔBOC 与 ΔBAD 相似，点 C 在第一象限，可得只有一种情况：$\Delta BOC\backsim\Delta BAD$ 相似，根据相似三角形的性质求出 $BC=4$，设 $C(a,-\dfrac{4}{3}a+8)$．根据两点的距离求出 a 的值，将点 C 的坐标代入 $y=kx$，即可求解；

（3）分三种情况：①点 F 在直线 $y=-3$ 的上方，②点 F 在直线 $y=-3$ 的下方，③ EF 为对角线时，根据正方形的性质以及全等三角形的判定和性质即可求解．

【解答】解：（1）$\because y=-\dfrac{4}{3}x+8$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，

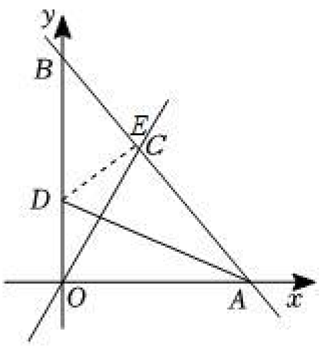
令 $x=0$，则 $y=8$，令 $y=0$，则 $x=6$，

$\therefore A(6,0)$， $B(0,8)$，

$\therefore OA=6$， $OB=8$，

$\therefore AB=10$，

过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，



$\therefore \angle AED=\angle AOD=90^\circ$，

$\because AD$ 平分 $\angle BAO$，

$\therefore DE=OD$， $\angle OAD=\angle EAD$，

$\therefore \Delta AOD\cong\Delta AED(AAS)$，

$\therefore AE=AO=6$，

$\therefore BE=AB-AE=4$，

在 RtΔBDE 中， $BD^2=DE^2+BE^2$，

$\therefore (8-OD)^2=OD^2+4^2$，

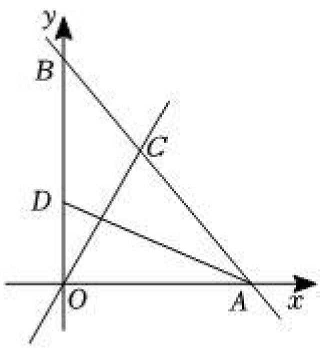
$\therefore OD=3$，

$\therefore D(0,3)$；

（2）若ΔBOC与ΔBAD相似，点C在第一象限，

$\therefore$只有一种情况：$\Delta BOC \backsim \Delta BAD$相似，

如图，



$\therefore \dfrac{BO}{BA}=\dfrac{BC}{BD}$，即$\dfrac{8}{10}=\dfrac{BC}{8-3}$，

$\therefore BC=4$，

设$C(a,-\dfrac{4}{3}a+8)$．

$\therefore BC=\sqrt{a^2+(8+\dfrac{4}{3}a-8)^2}=4$，解得$a=\pm\dfrac{12}{5}$（负值不合题意，舍去），

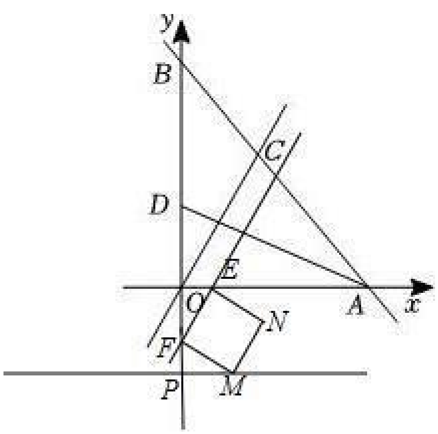
$\therefore C(\dfrac{12}{5}，\dfrac{24}{5})$．

将点C的坐标代入$y=kx$得，$\dfrac{12}{5}k=\dfrac{24}{5}$，

$\therefore k=2$；

（3）分三种情况：

①点F在直线$y=-3$的上方，设直线$y=-3$与y轴交于点P，



$\because$四边形$EFMN$是正方形，

$\therefore EF=FM$，$\angle EFM=90^\circ$，

$\therefore \angle OFE+\angle PFM=90^{\circ}$，

$\because \angle OFE+\angle OEF=90^{\circ}$，

$\therefore \angle OEF=\angle PFM$，

$\because \angle EOF=\angle FPM=90^{\circ}$，

$\therefore \Delta OEF\cong \Delta PFM(AAS)$，

$\therefore OE=PF$， $OF=PM$，

$\because$点$M(m,-3)$，

$\therefore OF+PF=3$， $OF=PM=m$，

$\therefore OE=PF=3-m$，

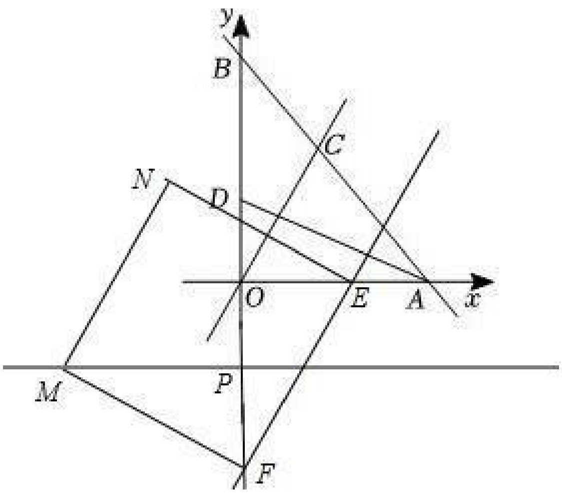
设平移直线$y=2x$得$y=2x-n$，

$\therefore E(\dfrac{n}{2}$， $0)$， $F(0,-m)$， $n=m$，

$\therefore 3-m=\dfrac{m}{2}$，

$\therefore m=2$；

②点F在直线$y=-3$的下方，设直线$y=-3$与y轴交于点P，



同理得$\therefore \Delta OEF\cong \Delta PFM(AAS)$，

$\therefore OE=PF$， $OF=PM$，

$\because$点$M(m,-3)$，

$\therefore OP=3$， $OF=OP+PF=-m$，

$\therefore OE=PF=-m-3$，

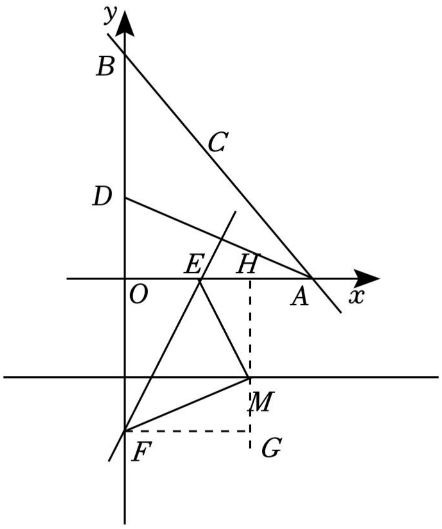
设平移直线$y=2x$得$y=2x-n$，

$\therefore E(\frac{n}{2}, 0)$， $F(0,m)$， $n=-m$，

$\therefore -m-3=-\frac{m}{2}$，

$\therefore m=-6$；

③ EF 为对角线时，



同理得$\therefore \Delta MEH \cong \Delta FMG(AAS)$，

$\therefore EH=MG$， $HM=GF$，

$\because$ 点 $M(m,-3)$，

$\therefore HM=GF=3$，

$\therefore m=3$；

综上， m 的值为 2 或 -6 或 3．

【点评】本题是一次函数综合题，考查了一次函数图象上点的坐标特征，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，平移的性质，正方形的性质，解题的关键是正确画图，学会利用数形结合和分类讨论的思想解决问题．

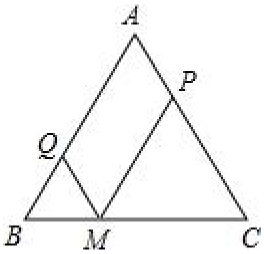
（3）

21．已知：在△ABC 中，$AB=AC=a$，M 为底边 BC 上任意一点，过点 M 分别作 AB、AC 的平行线交 AC 于 P，交 AB 于 Q．

（1）写出图中的两对相似三角形（不需证明）；

（2）求四边形 $AQMP$ 的周长；

（3）M 位于 BC 的什么位置时，四边形 $AQMP$ 为菱形？说明你的理由．



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）因为∠B=∠C=∠PMC=∠QMB，所以△PMC∽△QMB∽△ABC；

（2）根据平行四边形的定义得到四边形 $APMQ$ 是平行四边形，于是得到∠B=∠PMC，∠C=∠QMB．根据等腰三角形的性质得到∠B=∠C，推出∠PMC=∠QMB．根据等腰三角形的性质得到 $BQ=QM$，$PM=PC$．根据得到结论；

（3）根据中位线的性质及菱形的判定不难求得四边形 $AQMP$ 为菱形．

【解答】证明：（1）∵PM∥AB，

∴△PCM∽△ACB，

∵QM∥AC，

∴△BMQ∽△BCA；

（2）解：∵AB∥MP，QM∥AC，

∴四边形 $APMQ$ 是平行四边形，∠B=∠PMC，∠C=∠QMB．

∵$AB=AC$，

∴∠B=∠C，

∴∠PMC=∠QMB．

∴$BQ=QM$，$PM=PC$．

∴四边形 $AQMP$ 的周长$=AQ+AP+QM+MP=AQ+QB+AP+PC=AB+AC=2a$；

（3）当点 M 在 BC 的中点时，四边形 $APMQ$ 是菱形，

证明：∵AB∥MP，点 M 是 BC 的中点，

∴$\frac{CM}{CB}=\frac{CP}{AC}=\frac{1}{2}$，

∴P 是 AC 的中点，

∴PM 是三角形 ABC 的中位线，

同理：QM 是三角形 ABC 的中位线．

∵$AB=AC$，

∴$QM=PM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC$，

又由（1）知四边形 $APMQ$ 是平行四边形，

∴平行四边形 $APMQ$ 是菱形．

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定，平行四边形的判定和性质，三角形中位线

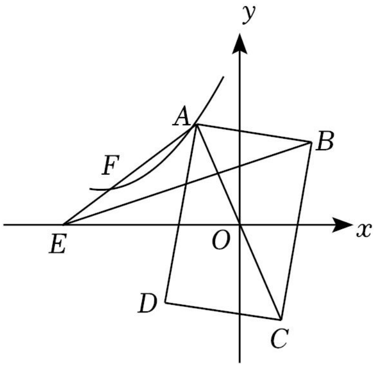
的性质，菱形的判定，熟练掌握菱形的判定定理是解题的关键．

22．如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点与坐标原点重合，点 E 是 x 轴上一点，连接 AE、BE，若 AD 平分 $\angle OAE$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k<0$，$x<0$）的图象经过 AE 上的点 A、F，且 $AF=EF$，$\triangle ABE$ 的面积为 18．

（1）连接 BD，证明 $AF\parallel BD$．

（2）连接 OF，求$\triangle AOF$ 的面积．

（3）求 k 的值．



【答案】（1）见解析；

（2）9；

（3）－12．

【分析】（1）连接 BD，先由 AD 平分 $\angle EAO$ 得 $\angle AED=\angle OAD$，由矩形 $ABCD$ 的性质得到 $\angle OAD=\angle ODA$，从而得到 $\angle EAD=\angle ADO$，故而 $AF\parallel BD$；

（2）由平行线的性质得到$\triangle ABE$ 和$\triangle AOE$ 的面积相等，根据 $AF=EF$，于是得到结论；

（3）设点 A 的坐标，结合 $AE=EF$ 得到点 F 和点 E 的坐标，最后结合$\triangle AOE$ 的面积求出 k 的取值．

【解答】（1）证明：连接 BD，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AO=\frac{1}{2}AC$，$OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，

∴$OA=OD$，

∴$\angle OAD=\angle ADO$，

∵AD 平分 $\angle EAO$，

∴$\angle EAD=\angle OAD$，

∴$\angle EAD=\angle ADO$，

∴$AF\parallel BD$；

（2）解：∵$AF\parallel BD$，

∴$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AEO}=18$，

∵$AF=EF$，

∴$S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOE}=9$；

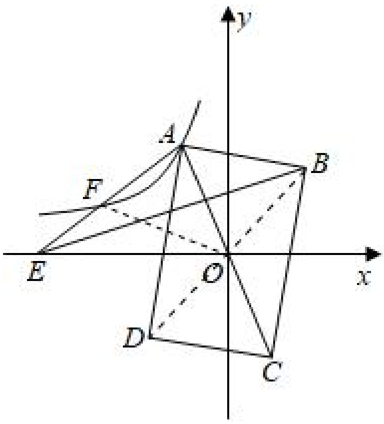
（3）解：设 A（a，$\dfrac{k}{a}$），

∵$AF=EF$，

$\therefore F$（$2a$，$\frac{k}{2a}$），E（$3a$，0），

$\therefore S_{\triangle AEO}=\frac{1}{2}\times$（$-3a$）$\times\frac{k}{a}=18$，

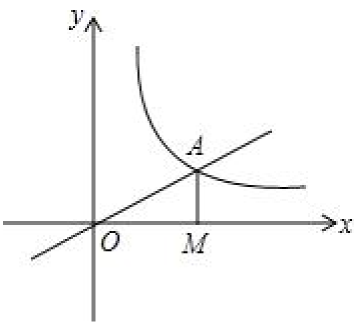
$\therefore k=-12$.



【点评】本题考查了反比例函数的综合题，矩形的性质、平行线的性质和判定、反比例函数图象上点的坐标特征，解题的关键是通过平行线的判定和性质得到$\triangle ABE$和$\triangle AEO$的面积相等.

（4）

20．如图，正比例函数$y=\frac{1}{2}x$的图象与反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）在第一象限的图象交于A点，过A点作x轴的垂线，垂足为M，已知$\triangle OAM$的面积为1．如果B为反比例函数在第一象限图象上的点（点B与点A不重合），且B点的横坐标为1，在x轴上求一点P，使$PA+PB$最小.



【答案】见试题解答内容

【分析】根据反比例函数图象上的点的横纵坐标的乘积为函数的系数和$\triangle OAM$的面积为1可得$k=2$，即反比例函数的解析式为$y=\frac{2}{x}$. 要使$PA+PB$最小，需作出A点关于x轴的

对称点 C，连接 BC，交 x 轴于点 P，P 为所求点．A 点关于 x 轴的对称点 C（2，﹣1），而 B 为（1，2），故 BC 的解析式为 $y=-3x+5$，当 $y=0$ 时，$x=\frac{5}{3}$，即可得出答案．

【解答】解：设 A 点的坐标为（a，b），则 $b=\frac{k}{a}$，

$\therefore ab=k$，

$\because \frac{1}{2}ab=1$，

$\therefore \frac{1}{2}k=1$

$\therefore k=2$，

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$．

根据题意画出图形，如图所示：

联立得$\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$，

$\therefore A$ 为（2，1），

设 A 点关于 x 轴的对称点为 C，则 C 点的坐标为（2，﹣1）．

令直线 BC 的解析式为 $y=mx+n$

$\because B$ 为（1，2），

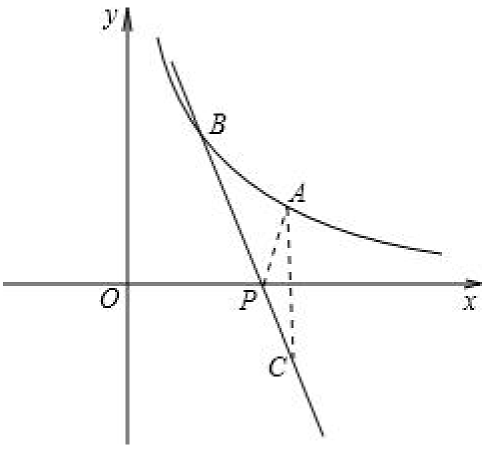
将 B 和 C 的坐标代入得：$\begin{cases} 2m+n=-1 \\ m+n=2 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} m=-3 \\ n=5 \end{cases}$

$\therefore BC$ 的解析式为 $y=-3x+5$，

当 $y=0$ 时，$\frac{5}{3}$，

$\therefore P$ 点为（$\frac{5}{3}$，0）．



【点评】此题考查了反比例函数和一次函数的交点问题，反比例函数和一次函数解析式的确定、图形的面积求法、轴对称等知识及综合应用知识、解决问题的能力．有点难度．

21．阅读下面的短文，并回答下列问题

我们把相似形的概念推广到空间：如果两个几何体大小不一定相等，但形状完全相同，就把它们叫做相似体．

如图，甲、乙是两个不同的立方体，立方体都是相似体，它们的一切对应线段之比都等于相似比（a：b）．

设 $S_{甲}$、$S_{乙}$分别表示这两个立方体的表面积，则$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{6a^2}{6b^2}=(\frac{a}{b})^2$，又设 $V_{甲}$、$V_{乙}$分别表示这两个立方体的体积，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{a^3}{b^3}=(\frac{a}{b})^3$．

（1）下列几何体中，一定属于相似体的是 <u>A</u>

A、两个球体 B、两个圆锥体 C、两个圆柱体 D、两个长方体．

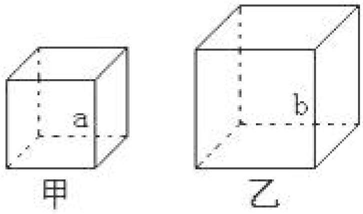
（2）请归纳出相似体的三条主要性质：

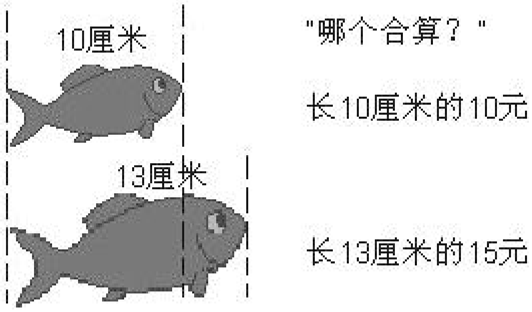
①相似体的一切对应线段（或弧）长度的比等于 <u>相似比</u>；

②相似体表面积的比等于 <u>相似比平方</u>；

③相似体体积的比等于 <u>相似比立方</u>．

（3）寒假里，康子帮母亲到市场去买鱼，鱼摊上有一种鱼，个个都长得非常相似，现有大小两种不同的价钱，如图所示，鱼长 10 厘米的每条 10 元，鱼长 13 厘米的每条 15 元．康子不知道买哪种更好些，你能否帮他出出主意．





【答案】见试题解答内容

【分析】相似体体积的比等于相似比立方，因为同一种鱼的密度一样，所以它们的质量比等于体积比．

【解答】解：（1）A

（2）相似比；相似比的平方；相似比的立方

（3）因为同一种鱼的密度一样，所以它们的质量比等于体积比

设这两种鱼的质量分别为 m、M，则有$\frac{M}{m}=(\frac{13}{10})^3=2.197$

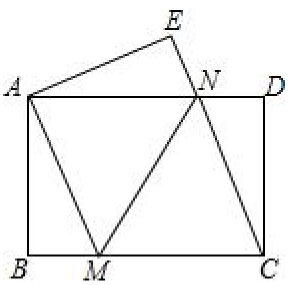
而它们的价格比为 15：10＝1.5，∴买 15 元一条的鱼更合算．

【点评】此题主要考查相似形的性质相似体体积的比等于相似比立方，关键是把实际问题转化为数额学问题．

22．如图，将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 MN 折叠，使点 C 落在点 A 处，点 D 落在点 E 处，直线 MN 交 BC 于点 M，交 AD 于点 N．

（1）求证：$CM=CN$；

（2）若△CMN 的面积与△CDN 的面积比为 3：1，求$\frac{MN}{DN}$的值．



【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 由折叠的性质可得：∠ANM＝∠CNM，由四边形 $ABCD$ 是矩形，可得∠ANM＝∠CMN，则可证得∠CMN＝∠CNM，继而可得 $CM=CN$；

（2）首先过点 N 作 $NH \perp BC$ 于点 H，由△CMN 的面积与△CDN 的面积比为 3：1，易得 $MC=3ND=3HC$，然后设 $DN=x$，由勾股定理，可求得 MN 的长，继而求得答案．

【解答】（1）证明：∵将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 MN 折叠，使点 C 落在点 A 处，

∴$\angle ANM=\angle CNM$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD \parallel BC$，

∴$\angle ANM=\angle CMN$，

∴$\angle CMN=\angle CNM$，

∴$CM=CN$；

（2）解：过点 N 作 $NH \perp BC$ 于点 H，

则四边形 $NHCD$ 是矩形，

∴$HC=DN$，$NH=DC$，

∵△CMN 的面积与△CDN 的面积比为 3：1，

∴$\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CDN}}=\frac{\frac{1}{2} \cdot MC \cdot NH}{\frac{1}{2} \cdot DN \cdot NH}=\frac{MC}{ND}=3$，

∴$MC=3ND=3HC$，

∴$MH=2HC$，

设 $DN=x$，则 $HC=x$，$MH=2x$，

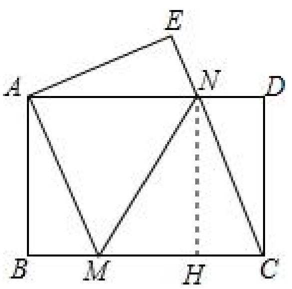
∴$CM=3x=CN$，

在 Rt△CDN 中，$DC=\sqrt{CN^2-DN^2}=2\sqrt{2}x$，

∴$HN=2\sqrt{2}x$，

在 Rt△MNH 中，$MN=\sqrt{MH^2+HN^2}=2\sqrt{3}x$，

∴$\frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}x}{x}=2\sqrt{3}$．



【点评】此题考查了矩形的性质、折叠的性质、勾股定理以及三角形的面积．此题难度

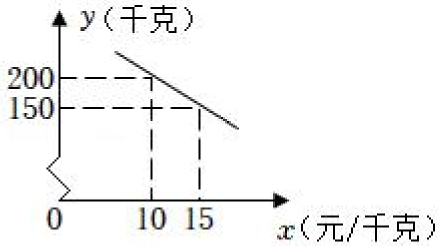
适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想与方程思想的应用．

（5）

21．（8 分）某地草莓已经到了收获季节，已知草莓的成本价为 10 元/千克，投入市场销售后，发现该草莓销售不会亏本，且每天销售量 y（千克）与销售单价 x（元/千克）之间的函数关系如图所示．

（1）求 y 与 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

（2）若产量足够，当该品种的草莓定价为多少时，每天销售获得的利润最大？最大利润是多少？



【分析】（1）利用待定系数法求解可得；

（2）根据“总利润＝单件利润×销售量”列出函数解析式，并配方成顶点式即可得出最大值．

【解答】解：（1）设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

将（10，200）、（15，150）代入，得$\begin{cases}10k+b=200\\15k+b=150\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-10\\b=300\end{cases}$，

∴y 与 x 的函数关系式为 $y=-10x+300$，

由 $-10x+300\geqslant 0$ 得 $x\leqslant 30$，所以 x 的取值范围为 $10\leqslant x\leqslant 30$；

（2）设每天销售获得的利润为 w 元，

则 $w=(x-10)y=(x-10)(-10x+300)=-10(x-20)^2+1000$，

∵$10\leqslant x\leqslant 30$，$a=-10<0$，

∴当 $x=20$ 时，w 取得最大值，最大值为 1000．

答：该品种的草莓定价为 20 元/千克时，每天销售获得的利润最大，最大利润为 1000 元．

【点评】本题主要考查二次函数的应用，解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式及找到题目蕴含的相等关系，据此列出二次函数的解析式，并熟练掌握二次函数的性质．

22．（10 分）（1）【问题发现】

如图①，正方形 $AEFG$ 的两边分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB 和 AD 上，连接 CF．

填空：

①线段 CF 与 DG 的数量关系为 __________；

②直线 CF 与 DG 所夹锐角的度数为 __________．

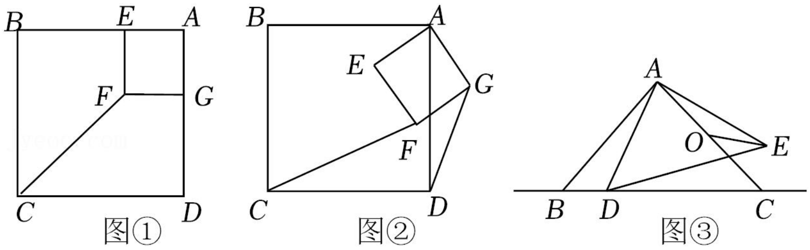
（2）【拓展探究】

如图②，将正方形 $AEFG$ 绕点 A 逆时针旋转，在旋转的过程中，（1）中的结论是否仍然成立，请利用图②进行说明．

（3）【解决问题】

如图③，△ABC和△ADE都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，$AB=AC=10$，$O$为$AC$的中点．若点$D$在直线$BC$上运动，连接$OE$，则在点$D$的运动过程中，线段$OE$长的最小值为

__________（直接写出结果）．

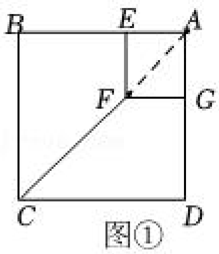


【分析】（1）连接AF，由正方形的性质可得点A、F、C三点共线，$AC=\sqrt{2}AD$，$AF=\sqrt{2}AG$，从而得出答案；

（2）连接AF，AC，利用△CAF∽△DAG，得$CF=\sqrt{2}DG$，$\angle ACF=\angle ADG$，从而解决问题；

（3）连接CE，利用SAS证明△BAD≌△CAE，得$\angle ABD=\angle ACE=45°$，则$\angle DCE=90°$，可知当$OE\perp CE$时，$OE$最小，再利用等腰直角三角形的性质求出答案．

【解答】解：（1）连接AF，



∵四边形$AEFG$、$ABCD$是正方形，

∴$\angle GAF=45°$，

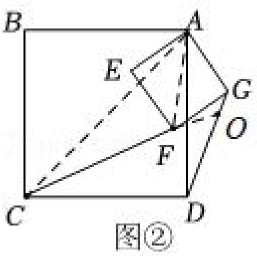
∴点A、F、C三点共线，

∴$AC=\sqrt{2}AD$，$AF=\sqrt{2}AG$，

∴$CF=\sqrt{2}GD$，

故答案为：$CF=\sqrt{2}GD$，$45°$；

（2）仍然成立，连接AF，AC，



∵$\angle CAD=\angle FAG=45°$，

∴$\angle CAF=\angle DAG$，$\frac{AC}{AD}=\frac{AF}{AG}=\sqrt{2}$，

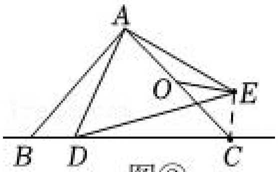
∴△CAF∽△DAG，

∴$CF=\sqrt{2}DG$，$\angle ACF=\angle ADG$，

∴$\angle COD=\angle CAD=45°$，

∴（1）中的结论仍然成立；

（3）连接 CE，



图③

∵$\angle BAC=\angle DAE=90°$，

∴$\angle BAD=\angle CAE$，

∵$AB=AC$，$AD=AE$，

∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（$SAS$），

∴$\angle ABD=\angle ACE=45°$，

∴$\angle DCE=90°$，

∴当 $OE\perp CE$ 时，OE 最小，

∵$AC=10$，O 为 AC 的中点．

∴$OC=5$，

∵$\angle OCE=45°$，

∴$OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OC=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$．

【点评】本题是四边形综合题，主要考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质等知识，熟练掌握旋转型相似是解题的关键

（6）

21．（9 分）【学科融合】如图 1，在反射现象中，反射光线，入射光线和法线都在同一个平面内；反射光线和入射光线分别位于法线两侧；反射角 r 等于入射角 i．这就是光的反射定律．

【问题解决】如图 2．小红同学正在使用手电筒进行物理光学实验，地面上从左往右依次是墙、木板和平面镜，手电筒的灯泡在点 G 处，手电筒的光从平面镜上点 B 处反射后，恰好经过木板的边缘点 F，落在墙上的点 E 处，点 E 到地面的高度 $DE=3.5m$，点 F 到地面的高度 $CF=1.5m$，灯泡到木板的水平距离 $AC=5.4m$，木板到墙的水平距离为 $CD=4m$．图中点 A，B，C，D 在同一条直线上．

（1）求 BC 的长；

（2）求灯泡到地面的高度 AG．

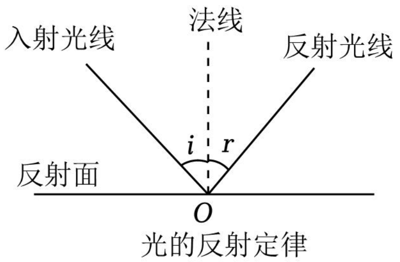


图1

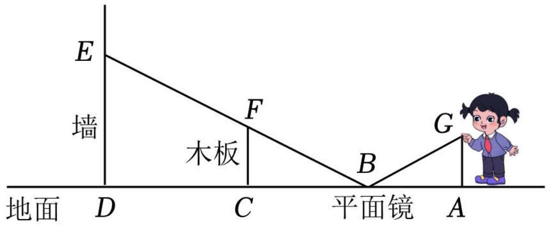


图2

【分析】（1）直接利用相似三角形的判定与性质得出 BC 的长；

（2）根据相似三角形的性质列方程进而求出 AG 的长．

【解答】解：（1）由题意可得：$FC\parallel DE$，

则△BFC∽BED，

∴$\frac{BC}{BD}=\frac{FC}{DE}$，

即$\frac{BC}{BC+4}=\frac{1.5}{3.5}$，

解得：$BC=3$，

答：BC 的长为 $3m$；

（2）∵$AC=5.4m$，

∴$AB=5.4-3=2.4$（m），

∵光在镜面反射中的反射角等于入射角，

∴$\angle FBC=\angle GBA$，

又∵$\angle FCB=\angle GAB$，

∴$\triangle BGA\backsim\triangle BFC$，

∴$\frac{AG}{AB}=\frac{FC}{BC}$，

∴$\frac{AG}{2.4}=\frac{1.5}{3}$，

解得：$AG=1.2$（m），

答：灯泡到地面的高度 AG 为 $1.2m$．

【点评】此题主要考查了相似三角形的应用，正确得出相似三角形是解题关键．

22．【问题背景】如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，点 M，N 分别在边 BC，AD 上．且$\frac{BM}{MC}=\frac{1}{m}$，连接 BN，点 P 在 BN 上，连接 PM 并延长至点 Q，使$\frac{PM}{MQ}=\frac{1}{m}$，连接 CQ．

【尝试初探】求证：$CQ\parallel BN$；

【深入探究】若 $AN=BM=AB$，$m=2$，点 P 为 BN 中点，连接 NC，NQ，求证：$NC=NQ$；

【拓展延伸】如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 为对角线 BD 上一点，连接 PC 并延长至点 Q．使$\frac{PC}{QC}=\frac{1}{n}$（$n>1$），连接 DQ．若 $n^2BP^2+DQ^2=(n^2+1)AB^2$，求$\frac{BP}{BD}$的值（用含 n 的代数式表示）．

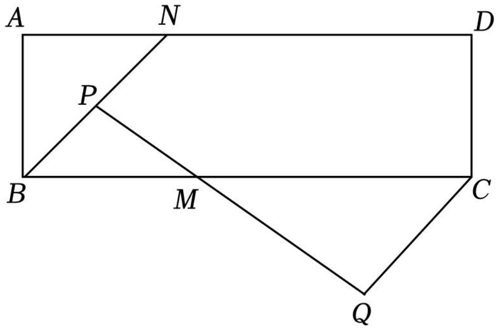


图1

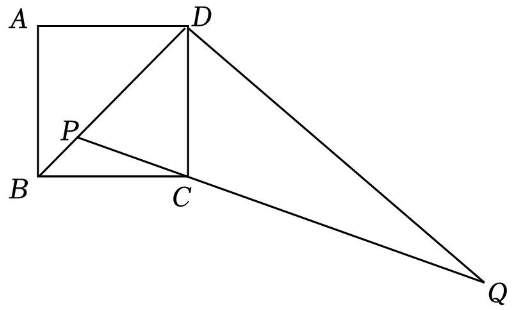


图2

【分析】(1)证明$\triangle BMP \backsim \triangle CMQ$,从而$\angle PBM = \angle QCM$,进而得出结论;

(2)连接MN,作$NE \perp CQ$于E,可证明四边形$ABMN$是正方形,四边形$PQEN$是矩形,结合$BN = CQ = 2BP = 2PN$,进一步得出结论;

(3)延长AD,BC,作$EF \perp AD$于F,连接DE,BE交DQ于E,根据$n^2BP^2 + DQ^2 = (n^2+1) \cdot AB^2$可得出$EQ^2 + DQ^2 = CE^2 + CD^2 = DE^2$,从而$\angle DQE = 90°$,可推出$\triangle DBG$,$\triangle EQG$是等腰直角三角形,设$BP = a$,$BC = b$,则$EQ = nx$,$CE = nb$,从而$EG = CE - CG = nb - b = (n-1)b$,结合$EG = \sqrt{2}EQ$,进一步得出结果.

【解答】(1)证明:$\because \frac{BM}{MC} = \frac{PM}{MQ} = \frac{1}{m}$,$\angle BMP = \angle CMQ$,

$\therefore \triangle BMP \backsim \triangle CMQ$,

$\therefore \angle PBM = \angle QCM$,

$\therefore CQ \parallel BN$;

(2)如图1,

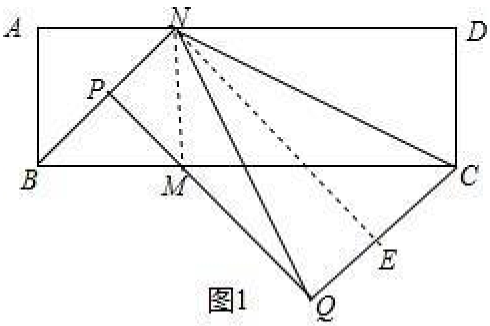


图1

连接MN,作$NE \perp CQ$于E,

$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,$\angle ABC = 90°$,

$\because AN = BM$,

$\therefore$四边形$ABMN$是平行四边形,

$\because \angle ABC = 90°$,

$\therefore$ ▱$ABMN$是矩形,

$\because AB = BM$,

$\therefore$矩形$ABMN$是正方形,

$\therefore MN = BM$,

$\because$点P是BN的中点,

$\therefore BP = NP = \frac{1}{2}BN$,$PQ \perp BN$,

由(1)知:$CQ \parallel BN$,$\triangle BMP \backsim \triangle CMQ$,

$\therefore PQ\perp CQ$，$\frac{BP}{CQ}=\frac{BM}{CM}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle NPQ=\angle CQP=90°$，$CQ=2BP$，

∴四边形 $PQEN$ 是矩形，

$\therefore EQ=NP$，

$\therefore EQ=CE=\frac{1}{2}CQ$，

$\therefore NC=NQ$；

（3）解：如图 2，

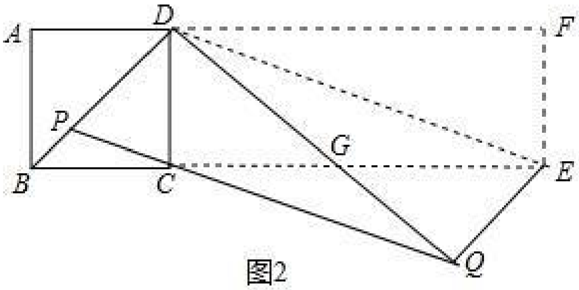


图2

延长 AD，BC，作 $EF\perp AD$ 于 F，连接 DE，BE 交 DQ 于 E，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD$，$\angle DBC=45°$，$\angle DCB=90°$，

由上可知：$EQ=n\bullet BP$，$CE=n\bullet BC=n\bullet AB$，$CD=AB$，

$\because n^2BP^2+DQ^2=(n^2+1)\bullet AB^2$，

$\therefore EQ^2+DQ^2=CE^2+CD^2=DE^2$，

$\therefore\angle DQE=90°$，

$\because BD/\!/EQ$，

$\therefore\angle BDQ=\angle DQE=90°$，$\angle QEG=\angle DBC=45°$，

$\therefore\angle DGB=90°-\angle DBC=45°$，$\angle EGQ=45°$，

$\therefore\angle DBC=\angle DGB$，

$\therefore BD=DG$，

$\therefore BC=CG$，

设 $BP=a$，$BC=b$，

则 $EQ=nx$，$CE=nb$，

$\therefore EG=CE-CG=nb-b=(n-1)b$，

$\because EG=\sqrt{2}EQ$，

$\therefore(n-1)b=\sqrt{2}na$，

$\therefore\sqrt{2}b(n-1)=2na$，

$\therefore\frac{a}{\sqrt{2}b}=\frac{n-1}{2n}$，

即：$\frac{BP}{BD}=\frac{n-1}{2n}$.

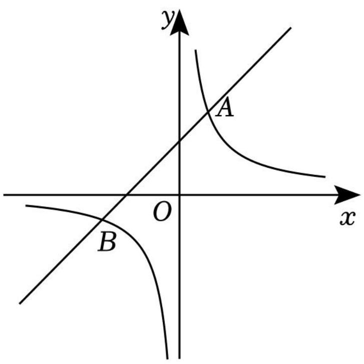
【点评】本题考查了矩形的性质和判定，正方形的性质和判定，相似三角形的判定和性质，勾股定理的逆定理等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形.

（7）

21．（9分）如图，一次函数 $y=x+2$ 与反比例函数 $y=\dfrac{a}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，且点 A 的坐标为 $(1,m)$，点 B 的坐标为 $(n,-1)$．

（1）求 m，n 的值和反比例函数的解析式；

（2）点 A 关于原点 O 的对称点为 A'，在 x 轴上找一点 P，使 $PA'+PB$ 最小，求出点 P 的坐标．



【解答】解：（1）将点 $A(1,m)$，点 $B(n,-1)$ 分别代入 $y=x+2$ 之中，

得：$m=1+2$，$-1=n+2$，

解得：$m=3$，$n=-3$，

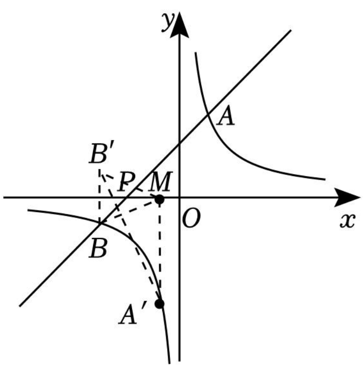
$\therefore$ 点 $A(1,3)$，点 $B(-3,-1)$，

将点 $(1,3)$ 代入 $y=\dfrac{a}{x}$ 之中，得：$a=1\times 3=3$，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为：$y=\dfrac{3}{x}$，

故得 $m=3$，$n=-3$，反比例函数的解析式为：$y=\dfrac{3}{x}$．

（2）作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $A'B'$ 交 x 轴于点 P，连接 PB，如图：



则 $PA'+PB$ 为最小，

故得点 P 为所求作的点．理由如下：

在 x 轴上任取一点 M，连接 MB，MB'，MA'，

$\because$ 点 B 关于 x 轴的对称点 B'，

$\therefore x$ 轴为线段 BB' 的垂直平分线，

$\therefore PB=PB'$，$MB=MB'$，

$\therefore MA'+MB=MA'+MB'$，$PA'+PB=PA'+PB'=A'B'$，

根据“两点之间线段最短”得：$A'B'\quad MA'+MB'$，

即：$PA'+PB\quad MA'+MB$，

$\therefore PA'+PB$ 为最小.

$\because$ 点 $A(1,3)$，点 A 与点 A' 关于原点 O 对称，

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(-1,-3)$，

又$\because$ 点 $B(-3,-1)$，点 B 和点 B' 关于 x 轴对称，

$\therefore$ 点 B' 点的坐标为 $(-3,1)$，

设直线 $A'B'$ 的解析式为：$y=kx+b$，

将点 $A'(-1,-3)$，$B'(-3,1)$ 代入 $y=kx+b$，

得：$\begin{cases}-k+b=-3\\-3k+b=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-2\\b=-5\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 $A'B'$ 的解析式为：$y=-2x-5$，

对于 $y=-2x-5$，当 $y=0$ 时，$x=-2.5$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2.5,0)$.

22.（10 分）ΔABC 中，$AB=AC$，DE 垂直平分 AB，交线段 BC 于点 E（点 E 与点 C 不重合），点 F 为直线 AC 上一点，点 G 为边 AB 上一点（点 G 与点 A 不重合），且 $\angle GEF+\angle BAC=180^\circ$.

（1）如图 1，当 $\angle B=45^\circ$ 时，求证：线段 $AG=CF$；

（2）如图 2，当 $\angle B=30^\circ$ 时，猜想线段 AG 和 CF 的数量关系，并说明理由；

（3）若 $BC=12$，$DG=\dfrac{16}{5}$，$\dfrac{DB}{BE}=\dfrac{3}{4}$，请在备用图中补全图形并求线段 CF 的长.

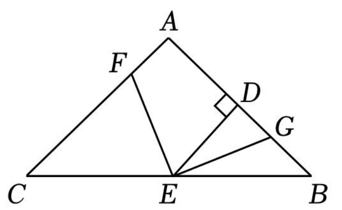


图1

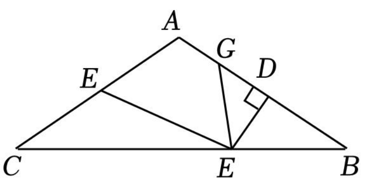
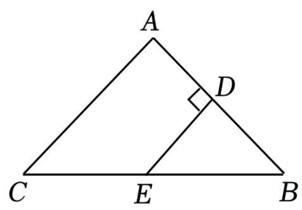


图2



备用图

【解答】（1）证明：$AG=CF$，理由如下：

如图 1，连接 AE，

$\because DE$ 垂直平分 AB，

$\therefore AE=BE$，

$\therefore \angle BAE=\angle B=45^\circ$，

$\therefore \angle AEB=90^\circ$，

$\therefore AE\perp BC$，

$\because AB=AC$，

$\therefore BE=EC=AE$， $\angle BAE=\angle EAC=\angle C=45^\circ$，

$\because \angle GEF+\angle BAC=180^\circ$，

$\therefore \angle AGE+\angle AFE=360^\circ-180^\circ=180^\circ$，

$\because \angle AFE+\angle CFE=180^\circ$，

$\therefore \angle AGE=\angle CFE$，

$\because \angle GAE=\angle C=45^\circ$，

$\therefore \Delta AEG\cong \Delta CEF(AAS)$，

$\therefore AG=CF$；

（2）解：$AG=\dfrac{1}{2}CF$，理由如下：

如图 2，连接 AE，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle C=\angle B=30^\circ$，

$\therefore \angle BAC=120^\circ$，

$\because DE$ 垂直平分 AB，

$\therefore AE=BE$，

$\therefore \angle BAE=\angle B=30^\circ$，

$\therefore \angle CAE=90^\circ$， $\angle BAE=\angle C=30^\circ$，

$\because \angle GEF+\angle BAC=180^\circ$，

$\therefore \angle AGE+\angle AFE=180^\circ$，

$\because \angle CFE+\angle AFE=180^\circ$，

$\therefore \angle AGE=\angle CFE$，

$\therefore \Delta AGE \backsim \Delta CFE$，

$\therefore \dfrac{AG}{CF}=\dfrac{AE}{CE}$，

在 RtΔACE 中，$\angle C=30^{\circ}$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}CE$，

$\therefore \dfrac{AG}{CF}=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}CF$；

（3）解：过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，

$\because AB=AC$，$BC=12$，

$\because BH=CH=\dfrac{1}{2}BC=6$，

$\because \cos B=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore AB=\dfrac{4}{3}BH=8$，

①当 G 在 DA 上时，如图 3，连接 AE，

$\because DE$ 垂直平分 AB，

$\therefore AD=BD=4$，$AE=BE$，

$\therefore AG=AD-DG=4-\dfrac{16}{5}=\dfrac{4}{5}$，

$\because \cos B=\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore BE=\dfrac{4}{3}BD=\dfrac{16}{3}$，

$\therefore AE=BE=\dfrac{16}{3}<BH$，

$\therefore \angle BAE=\angle B$，$E$ 在 H 的左侧，$CE=BC-BE=12-\dfrac{16}{3}=\dfrac{20}{3}$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle BAE$，

$\because \angle GEF+\angle BAC=180^{\circ}$，

$\therefore \angle AGE+\angle AFE=360^{\circ}-180^{\circ}=180^{\circ}$，

$\because \angle AFE+\angle CFE=180^{\circ}$，

$\therefore \angle CFE = \angle AGE$，

$\therefore \Delta CFE \backsim \Delta AGE$，

$\therefore \dfrac{CF}{AG} = \dfrac{CE}{AE}$，

即 $\dfrac{CF}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{20}{3}}{\frac{16}{3}}$，

解得：$CF = 1$；

②当点 G 在 BD 上，如图 4，连接 AE，

同（1）可得，$\Delta CFE \backsim \Delta AGE$，

$\therefore \dfrac{CF}{AG} = \dfrac{CE}{AE}$，

$\because AG = AD + DG = 4 + \dfrac{16}{5} = \dfrac{36}{5}$，

$\therefore \dfrac{CF}{\frac{36}{5}} = \dfrac{\frac{20}{3}}{\frac{16}{3}}$，

解得：$CF = 9$；

综上所述，CF 的长为 1 或 9．

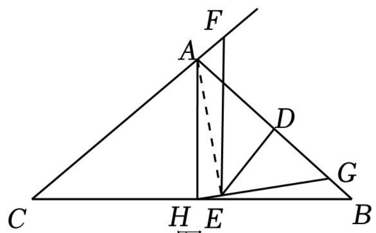


图4

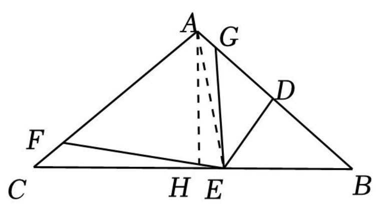


图3

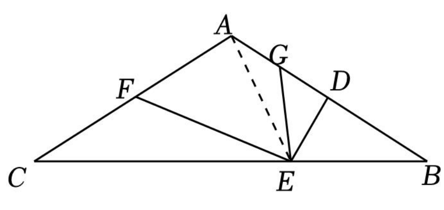


图2

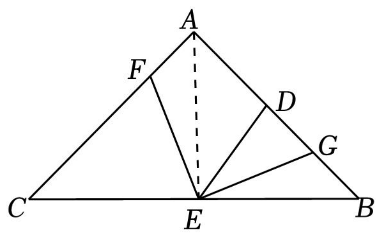


图1

（8）

21．阅读材料：各类方程的解法

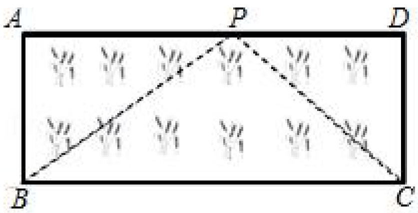
求解一元一次方程，根据等式的基本性质，把方程转化为$x=a$的形式．求解二元一次方程组，把它转化为一元一次方程来解；类似的，求解三元一次方程组，把它转化为解二元一次方程组．求解一元二次方程，把它转化为两个一元一次方程来解．求解分式方程，把它转化为整式方程来解，由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验．各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想$--$转化，把未知转化为已知．

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程．例如，一元三次方程$x^3+x^2-2x=0$，可以通过因式分解把它转化为$x(x^2+x-2)=0$，解方程$x=0$和$x^2+x-2=0$，可得方程$x^3+x^2-2x=0$的解．

（1）问题：方程$x^3+x^2-2x=0$的解是$x_1=0$，$x_2=$__-2__，$x_3=$_____；

（2）拓展：用“转化”思想求方程$\sqrt{2x+3}=x$的解；

（3）应用：如图，已知矩形草坪$ABCD$的长$AD=8m$，宽$AB=3m$，小华把一根长为$10m$的绳子的一端固定在点B，沿草坪边沿BA，AD走到点P处，把长绳PB段拉直并固定在点P，然后沿草坪边沿PD、DC走到点C处，把长绳剩下的一段拉直，长绳的另一端恰好落在点C．求AP的长．



【解答】解：（1）$x^3+x^2-2x=0$，

$x(x^2+x-2)=0$，

$x(x+2)(x-1)=0$

所以 $x=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-1=0$

$\therefore x_1=0$， $x_2=-2$， $x_3=1$；

故答案为：-2，1；

（2） $\sqrt{2x+3}=x$，

方程的两边平方，得 $2x+3=x^2$

即 $x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore x-3=0$ 或 $x+1=0$

$\therefore x_1=3$， $x_2=-1$，

当 $x=-1$ 时， $\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq-1$，

所以 -1 不是原方程的解.

所以方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$；

（3）因为四边形 $ABCD$ 是矩形，

所以 $\angle A=\angle D=90^\circ$， $AB=CD=3m$

设 $AP=xm$，则 $PD=(8-x)m$

因为 $BP+CP=10$，

$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}$， $CP=\sqrt{CD^2+PD^2}$

$\therefore \sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$

$\therefore \sqrt{(8-x)^2+9}=10-\sqrt{9+x^2}$

两边平方，得 $(8-x)^2+9=100-20\sqrt{9+x^2}+9+x^2$

整理，得 $5\sqrt{x^2+9}=4x+9$

两边平方并整理，得 $x^2-8x+16=0$

即 $(x-4)^2=0$

所以 $x=4$.

经检验， $x=4$ 是方程的解.

答： AP 的长为 $4m$.

22. 如图 1，在 ΔABC 中，$AB=AC=10$，$BC=16$，点 D 为 BC 边上的动点（点 D 不与点 B，

C 重合）．以 D 为顶点作 $\angle ADE=\angle B$，射线 DE 交 AC 边于点 E，过点 A 作 $AF\perp AD$ 交射线 DE 于点 F，连接 CF．

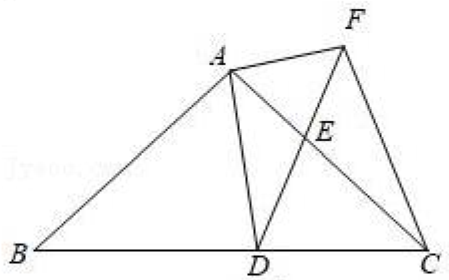


图1

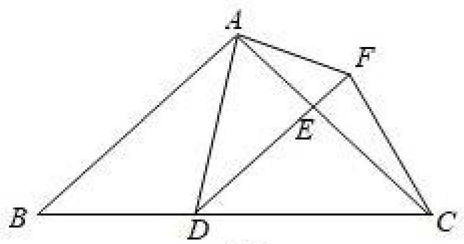


图2

（1）求证：$\Delta ABD\backsim\Delta DCE$；

（2）当 $DE//AB$ 时（如图2)，求 AE 的长；

（3）点 D 在 BC 边上运动的过程中，是否存在某个位置，使得 $DF=CF$？若存在，求出此时 BD 的长；若不存在，请说明理由．

【专题】几何综合题；图形的相似；推理能力

【解答】（1）证明：$\because AB=AC$，

$\therefore\angle B=\angle ACB$，

$\because\angle ADE+\angle CDE=\angle B+\angle BAD$，$\angle ADE=\angle B$，

$\therefore\angle BAD=\angle CDE$，又 $\angle B=\angle ACB$，

$\therefore\Delta BAD\backsim\Delta DCE$．

（2）解：$\because DE//AB$，

$\therefore\Delta CDE\backsim\Delta CBA$，

$\because\Delta CDE\backsim\Delta ABD$，

$\therefore\Delta ABD\backsim\Delta CBA$，

$\therefore\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$，即 $\dfrac{10}{16}=\dfrac{BD}{10}$，

解得，$BD=\dfrac{25}{4}$，

$\because DE//AB$，

$\therefore\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$，即 $\dfrac{AE}{10}=\dfrac{\frac{25}{4}}{16}$，

解得，$AE=\dfrac{125}{32}$；

（3）点 D 在 BC 边上运动的过程中，存在某个位置，使得 $DF=CF$．

理由如下：如图 3，作 $FH \perp BC$ 于 H， $AM \perp BC$ 于 M， $AN \perp FH$ 于 N．

则四边形 $AMHN$ 为矩形，

$\therefore \angle MAN = 90°$， $MH = AN$，

$\because AB = AC$， $AM \perp BC$，

$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = 8$，

在 RtΔABM 中，由勾股定理，得 $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$，

$\therefore \tan B = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{4}$，

$\because \angle ADE = \angle B$，

$\therefore \tan \angle ADE = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$，

$\because AN \perp FH$， $AM \perp BC$，

$\therefore \angle ANF = 90° = \angle AMD$，

$\because \angle DAF = 90° = \angle MAN$，

$\therefore \angle NAF = \angle MAD$，

$\therefore \Delta AFN \backsim \Delta ADM$，

$\therefore \frac{AN}{AM} = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$，即 $\frac{AN}{6} = \frac{3}{4}$，

解得， $AN = \frac{9}{2}$，

$\therefore MH = AN = \frac{9}{2}$，

$\therefore CH = CM - MH = \frac{7}{2}$，

$\because FD = FC$， $FH \perp CD$，

$\therefore CD = 2CH = 7$，

$\therefore BD = BC - CD = 9$．

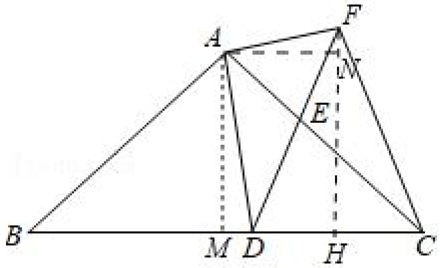


图 3

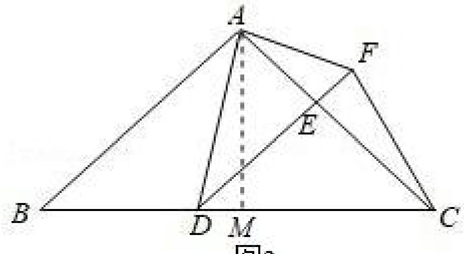
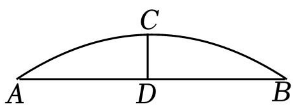
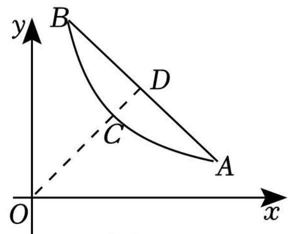
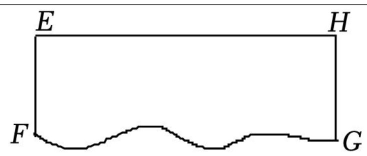


图2

（9）19 周周末卷

21．

设计货船通过双曲线桥的方案		
素材 1	一座曲线桥如图 1 所示，当水面宽 $AB=16$ 米时，桥洞顶部离水面距离 $CD=4$ 米．已知桥洞形如双曲线，图 2 是其示意图，且该桥关于 CD 对称．	 图1  图2  图3
素材 2	如图 4，一艘货船露出水面部分的横截面为矩形 $EFGH$，测得 $EF=3$ 米，$EH=9$ 米．因水深足够，货船可以根据需要运载货物．据调查，船身下降的高度 h（米）与货船增加的载重量 t（吨）满足函数表达式 $h=\frac{1}{5}t$．	 图4

<table>
<tr><td colspan="3">问题解决</td></tr>
<tr><td>任务 1</td><td>确定桥洞的形状</td><td>①建立平面直角坐标系如图 3 所示，显然，CD 落在第一象限的角平分线上．
甲说：点 C 可以在第一象限角平分线的任意位置．
乙说：不对吧？当点 C 落在 $(4\sqrt{2}$ ，$4\sqrt{2})$ 时，点 A 的坐标为 $(10\sqrt{2}\ ,2\sqrt{2})$ __，此时过点 A 的双曲线的函数表达式为 ____，而点 C 所在双曲线的函数表达式为 $y=\dfrac{32}{x}$ 显然不符合题意．</td></tr>
<tr><td>任务 2</td><td>拟定方案</td><td>此时货船能通过该桥洞吗？若能，请说明理由；若不能，至少要增加多少吨货物？</td></tr>
</table>

【分析】任务 1：设曲线 AB 的解析式为 $y=\dfrac{k}{x}$，把点 $C(4\sqrt{2}$ ，$4\sqrt{2})$ 代入，可得曲线 AB 的解析式为 $y=\dfrac{32}{x}$，再由反比例函数图象的对称性可得：点 D 是 AB 的中点，$OD\perp AB$，过点 C 、D 分别作 x 轴、y 轴的平行线交于 E，过点 A 作 $AF\perp DE$ 于 F，可得 ΔCDE 、ΔADF 是等腰直角三角形，进而可得 $D(6\sqrt{2}$ ，$6\sqrt{2})$ ，$A(10\sqrt{2}$ ，$2\sqrt{2})$，点 $A(10\sqrt{2}$ ，$2\sqrt{2})$ 在双曲线 $y=\dfrac{40}{x}$ 上与点 C 在双曲线 $y=\dfrac{32}{x}$ 上矛盾；

任务 2：设 $A(a,\dfrac{k}{a})$ ，$B(b,\dfrac{k}{b})$，其中 $a>b$，则 $D(\dfrac{a+b}{2}$ ，$\dfrac{ka+kb}{2ab})$，可得 $k=ab$，由 $CD=4$，$AB=16$，可得 $(a-b)^2=128$，$C(\dfrac{a+b}{2}-2\sqrt{2}$ ，$\dfrac{a+b}{2}-2\sqrt{2})$，可得 $k=18$，再根据矩形的性质可得 $E(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ，$\dfrac{23\sqrt{2}}{4})$，即可判断此时货船不能通过；运用待定系数法可得直线 EF 的解析式为 $y=x+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$，进而可得直线 EF 与双曲线的交点 $E'(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ，$6\sqrt{2})$，即可求得答案．

【解答】解：任务 1：设曲线 AB 的解析式为 $y=\dfrac{k}{x}$，把点 $C(4\sqrt{2}$ ，$4\sqrt{2})$ 代入，得：$4\sqrt{2}=\dfrac{k}{4\sqrt{2}}$，

解得：$k=32$，

$\therefore$ 曲线 AB 的解析式为 $y=\dfrac{32}{x}$，

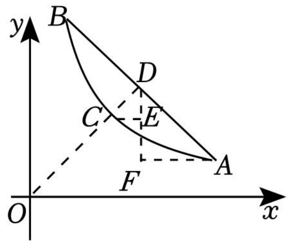
$\because CD$ 落在第一象限的角平分线上，

$\therefore A$ 、B 关于 CD 对称，即 A 、B 关于第一象限角平分线 $y=x$ 对称，

$\therefore$ 点 D 是 AB 的中点，$OD\perp AB$，

过点 C 、D 分别作 x 轴、y 轴的平行线交于 E，过点 A 作 $AF\perp DE$ 于 F，如图，

则 ΔCDE 、ΔADF 是等腰直角三角形，



$\because CD = 4$，

$\therefore CE = DE = 2\sqrt{2}$，

$\therefore D(6\sqrt{2}$， $6\sqrt{2})$，

$\because AB = 16$，

$\therefore AD = 8$， $AF = DF = 4\sqrt{2}$，

$\therefore A(10\sqrt{2}$， $2\sqrt{2})$，

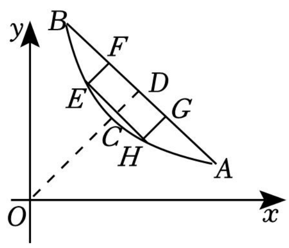
$\because 10\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 40$，

$\therefore$点 $A(10\sqrt{2}$， $2\sqrt{2})$ 在双曲线 $y = \dfrac{40}{x}$ 上，

$\therefore$点 C 所在双曲线的函数表达式为 $y = \dfrac{32}{x}$ 显然不符合题意．

故答案为：$(10\sqrt{2}$， $2\sqrt{2})$， $y = \dfrac{40}{x}$，乙正确；

任务 2：设 $A(a,\dfrac{k}{a})$， $B(b,\dfrac{k}{b})$，其中 $a > b$，则 $D(\dfrac{a+b}{2}$， $\dfrac{ka+kb}{2ab})$，如图，



$\because$点 D 在直线 $y = x$ 上，

$\therefore \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{ka+kb}{2ab}$，即 $k = ab$，

$\because CD = 4$， $AB = 16$，

$\therefore (a-b)^2 = 128$， $C(\dfrac{a+b}{2} - 2\sqrt{2}$， $\dfrac{a+b}{2} - 2\sqrt{2})$，

$\because (\dfrac{a+b}{2} - 2\sqrt{2})^2 = ab$，

$\therefore a + b = 10\sqrt{2}$，

$\therefore k = ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = 18$，

$\therefore A(9\sqrt{2}$，$\sqrt{2})$，$B(\sqrt{2}$，$9\sqrt{2})$，$C(3\sqrt{2}$，$3\sqrt{2})$，$D(5\sqrt{2}$，$5\sqrt{2})$，

$\because$四边形 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore FG=EH$，$GH=EF$，

$\because EF=3$，$EH=9$，

$\therefore F(\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$，$\dfrac{29\sqrt{2}}{4})$，$E(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$，$\dfrac{23\sqrt{2}}{4})$，

$\because \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{23\sqrt{2}}{4}=\dfrac{115}{8}<18$，

$\therefore$此时货船不能通过该桥洞；

设直线 EF 的解析式为 $y=x+n$，把 $F(\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$，$\dfrac{29\sqrt{2}}{4})$ 代入，得 $\dfrac{11\sqrt{2}}{4}+n=\dfrac{29\sqrt{2}}{4}$，

解得：$n=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$直线 EF 的解析式为 $y=x+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$，

联立得 $x+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}=\dfrac{18}{x}$，

解得：$x_1=-6\sqrt{2}$（舍去），$x_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore E'(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$6\sqrt{2})$，

$\therefore EE'=\dfrac{1}{2}$，即 $h=\dfrac{1}{2}$，

$\because h=\dfrac{1}{5}t$，

$\therefore t=5h=\dfrac{5}{2}$，

故要至少增加 $\dfrac{5}{2}$ 吨货物此货船能通过该桥洞.

答：此时货船不能通过该桥洞；要至少增加 $\dfrac{5}{2}$ 吨货物此货船能通过该桥洞.

【点评】本题是反比例函数应用题，考查了待定系数法，一次函数、反比例函数的图象和性质，矩形的性质等，解题关键是关键是根据坐标系列出相应的函数解析式.

22.【初步探究】

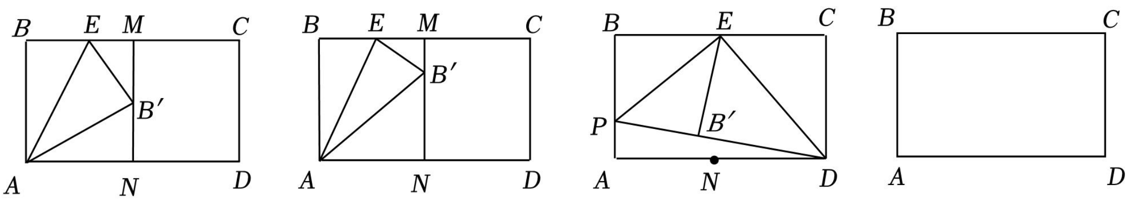
（1）把矩形纸片 $ABCD$ 如图①折叠，当点 B 的对应点 B' 在 MN 的中点时，填空：$\triangle EB'M$ $\backsim$ __$\triangle B'AN$(“$\cong$”或“$\backsim$”).

【类比探究】

（2）如图②，当点 B 的对应点 B' 为 MN 上的任意一点时，请判断（1）中结论是否成立？如果成立，请写出证明过程；如果不成立，请说明理由.

【问题解决】

（3）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=6$，点 E 为 BC 中点，点 P 为线段 AB 上一个动点，连接 EP，将 ΔBPE 沿 PE 折叠得到$\triangle B'PE$，连接 DE，DB'，当$\triangle EB'D$ 为直角三角形时，BP 的长为 ____.



图①　　图②　　备用图

【分析】（1）由矩形纸片 $ABCD$ 如图①折叠，可证$\triangle EB'M\backsim\triangle B'AN$；

（2）同（1）由四边形 $ABCD$ 是矩形，如图②折叠，可得 $\angle EB'M=90^\circ-\angle AB'N=\angle B'AN$，即可得$\triangle EB'M\backsim\triangle B'AN$，

（3）分两种情况：当 $\angle DB'E=90^\circ$ 时，证明 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{CDE}\cong\mathrm{Rt}\triangle B'DE(HL)$，得 $B'D=CD=AB=4$，设 $BP=x=B'P$，在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{APD}$ 中，有 $(4-x)^2+6^2=(x+4)^2$，可解得 $BP=\dfrac{9}{4}$；当 $\angle B'ED=90^\circ$ 时，过 B' 作 $B'H\perp AB$ 于 H，作 $B'Q\perp BC$ 于 Q，则 $\angle B'QE=\angle C=90^\circ$，证明$\triangle B'EQ\backsim\Delta EDC$，可得 $\dfrac{B'Q}{3}=\dfrac{EQ}{4}=\dfrac{3}{5}$，设 $BP=y=B'P$，在 $Rt\triangle B'PH$ 中，$(\dfrac{9}{5}-y)^2+(\dfrac{3}{5})^2=y^2$，可解得 $BP=1$．

【解答】解：（1）$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore\angle B=90^\circ$，

$\because$矩形纸片 $ABCD$ 如图①折叠，

$\therefore\angle EB'A=\angle B=90^\circ$，

$\therefore\angle EB'M=90^\circ-\angle AB'N=\angle B'AN$，

$\because\angle EMB'=90^\circ=\angle B'NA$，

$\therefore\triangle EB'M\backsim\triangle B'AN$，

故答案为：$\backsim$；

（2）（1）中结论成立，理由如下：

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore\angle B=90^\circ$，

$\because$矩形纸片 $ABCD$ 如图①折叠，

$\therefore\angle EB'A=\angle B=90^\circ$，

$\therefore\angle EB'M=90^\circ-\angle AB'N=\angle B'AN$，

$\because\angle EMB'=90^\circ=\angle B'NA$，

$\therefore\triangle EB'M\backsim\triangle B'AN$；

（3）如图所示，当 $\angle DB'E=90^\circ$ 时，$\triangle EB'D$ 是直角三角形，

由折叠可得，$\angle PB'E=\angle B=90^\circ$，$BE=B'E=CE$，

$\therefore\angle DB'P=180^\circ$，即点 P，B'，D 在一条直线上，

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{CDE}$ 和 $Rt\triangle B'DE$ 中，

$$\begin{cases}CE=B'E\\DE=DE\end{cases},$$

$\therefore\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{CDE}\cong\mathrm{Rt}\triangle B'DE(HL)$，

$\therefore B'D=CD=AB=4$，

设 $BP=x=B'P$，则 $AP=4-x$，$PD=x+4$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{APD}$ 中，$AP^2+AD^2=PD^2$，

$\therefore (4-x)^2+6^2=(x+4)^2$，

解得 $x=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore BP=\dfrac{9}{4}$；

如图所示，当 $\angle B'ED=90^\circ$ 时，$\triangle EB'D$ 是直角三角形，

过 B' 作 $B'H\perp AB$ 于 H，作 $B'Q\perp BC$ 于 Q，则 $\angle B'QE=\angle C=90^\circ$，

又 $\because \angle B'ED=90^\circ$，

$\therefore \angle B'EQ+\angle CED=90^\circ=\angle EDC+\angle CED$，

$\therefore \angle B'EQ=\angle EDC$，

$\therefore \triangle B'EQ\backsim\Delta EDC$，

$\therefore \dfrac{B'Q}{CE}=\dfrac{EQ}{CD}=\dfrac{B'E}{DE}$，

$\because CE=BE=\dfrac{1}{2}BC=3$，$CD=4$，

$\therefore DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=5$，

$\because \Delta BPE$ 沿 PE 折叠得到$\triangle B'PE$，

$\therefore B'E=BE=3$，

$\therefore \dfrac{B'Q}{3}=\dfrac{EQ}{4}=\dfrac{3}{5}$，

解得 $B'Q=\dfrac{9}{5}$，$EQ=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore BQ=BE-EQ=\dfrac{3}{5}=B'H$，$BH=B'Q=\dfrac{9}{5}$，

设 $BP=y=B'P$，则 $HP=BH-BP=\dfrac{9}{5}-y$，

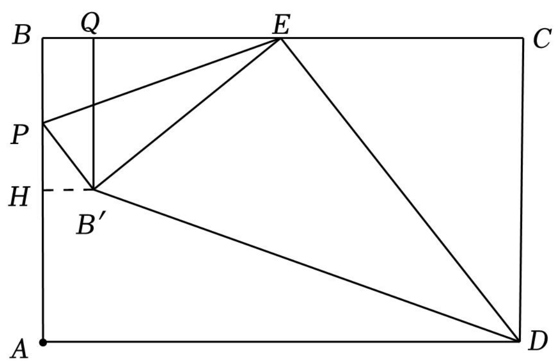
在 $Rt\triangle B'PH$ 中，$HP^2+B'H^2=B'P^2$，

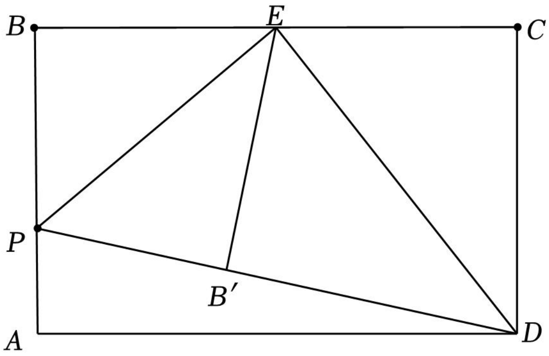
$\therefore (\dfrac{9}{5}-y)^2+(\dfrac{3}{5})^2=y^2$，

解得 $y=1$，

$\therefore BP=1$．

综上所述，BP 的长为$\dfrac{9}{4}$或 1．

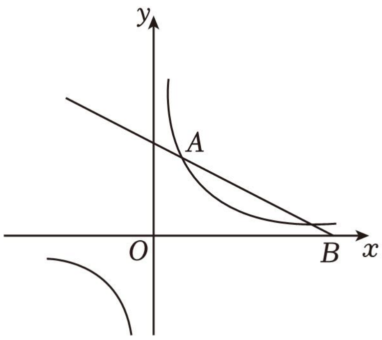


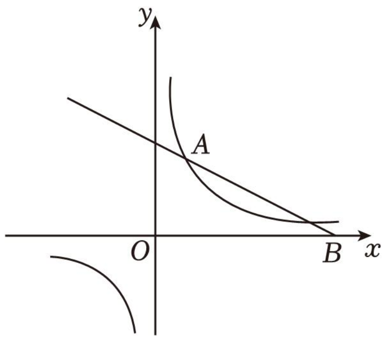


【点评】本题考查相似形的综合应用，涉及矩形中的折叠问题，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质以及勾股定理等知识，解题的关键是掌握折叠的性质：折叠前后两图形全等，即对应线段相等；对应角相等，第（3）有两种情况，需要分类讨论，避免漏解．

（10）

21．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+7(k\neq0)$ 与 x 轴交于点 $B(14,0)$，与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(m\neq0)$ 的图象交于 $A(a,6)$．





备用图

（1）求一次函数的解析式和反比例函数的解析式；

（2）若点 P 是第一象限内反比例函数图象上一点．过点 P 作 x 轴的平行线 PQ 交一次函数图象于点 Q，作直线 AP 交 x 轴于点 C，若 $S_{\Delta APQ}:S_{\Delta ACB}=1:4$，求点 P 的坐标；

（3）定义：若矩形的周长是面积的 n 倍 $(n>0)$，则称该矩形为“n 倍积矩形”．例如，若一个矩形周长为 18，面积为 6，$n=18\div6=3$，则称该矩形为“3 倍积矩形”．若点 D 是第一象限内反比例函数图象上一点．过 D 作 $DM\perp x$ 轴于点 M，作 $DN\perp y$ 轴于点 N．若矩形 $DNOM$ 是“n 倍积矩形”， n 最小可以取多少？当 n 取最小值时，求出 D 点的坐标．

【分析】（1）先求出一次函数解析式，再求出反比例函数解析式即可；

（2）利用 $PQ//x$ 轴，可得 $\Delta APQ\backsim\Delta ABC$，根据 $S_{\Delta APQ}:S_{\Delta ACB}=1:4$ 可得点 Q 是线段 AB 的中点，易得点 Q 坐标，继而求得点 P 坐标；

（3）根据矩形面积一定，设点 D 坐标为 $(m,\dfrac{12}{m})$，根据新定义列出 $n=\dfrac{m^2+12}{6m}$，$(m>0$，n 取自然数)，讨论即可．

【解答】解：（1）$\because$ 一次函数 $y=kx+7(k\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $B(14,0)$，

$\therefore 14k+7=0$．解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 一次函数解析式为：$y=-\dfrac{1}{2}x+7$；

$\because$ 一次函数 $y=kx+7$ 与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(m\neq 0)$ 的图象交于 $A(a,6)$，

$\therefore -\dfrac{1}{2}a+7=6$，解得 $a=2$，即 $A(2,6)$，

$\therefore m=2\times 6=12$，

$\therefore$ 反比例函数解析式为：$y=\dfrac{12}{x}$；

（2）$\because PQ//BC$，

$\therefore \triangle \Delta APQ\backsim\Delta ABC$，

$\because S_{\Delta APQ}:S_{\Delta ACB}=1:4$，

$\therefore \dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 点 Q 是线段 AB 的中点，

$\because A(2，6)B(14，0)$，

$\therefore Q(8,3)$，

当 $y=3$ 时，$3=\dfrac{12}{x}$，解得 $x=4$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4,3)$；

（3）$\because$ 点 D 在反比例函数 $y=\dfrac{12}{x}$ 的图象上，

$\therefore S_{矩形OMDN}=12$，

设点 D 的坐标为 $(m,\dfrac{12}{m})$，则周长为 $2(m+\dfrac{12}{m})$，

根据题意：$n=\dfrac{2(m+\dfrac{12}{m})}{12}=\dfrac{1}{6}(m+\dfrac{12}{m})=\dfrac{m^2+12}{6m}$，$(m>0$，$n$ 取自然数)，

当 $n=1$ 时，$m^2-6m+12=0$，$\triangle=36-48<0$，无解；

当 $n=2$ 时，$m^2-12m+12=0$，$\triangle=144-48=96>0$，

$\therefore m=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm 2\sqrt{6}$，

此时 n 为最小，

$\therefore$点 D 的坐标为 $(6+2\sqrt{6}$，$6-2\sqrt{6})$ 或 $(6-2\sqrt{6}$，$6+2\sqrt{6})$．

【点评】本题考查了反比例函数的性质，矩形的性质以及新定义，熟练掌握反比例函数的性质是解答本题的关键．

22．在数学综合与实践活动课上，小红以“矩形的旋转”为主题开展探究活动．

（1）操作判断

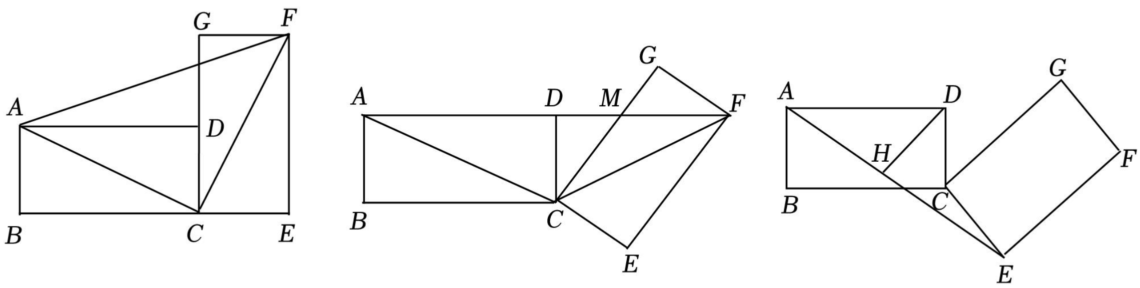
小红将两个完全相同的矩形纸片 $ABCD$ 和 $CEFG$ 拼成“L”形图案，如图①．试判断：△ACF 的形状为 <u>等腰直角三角形</u> ．

（2）深入探究

小红在保持矩形 $ABCD$ 不动的条件下，将矩形 $CEFG$ 绕点 C 旋转，若 AB＝2，AD＝4．

探究一：当点 F 恰好落在 AD 的延长线上时，设 CG 与 DF 相交于点 M，如图②．求△CMF 的面积．

探究二：连接 AE，取 AE 的中点 H，连接 DH，如图③．求线段 DH 长度的最大值和最小值．



图①　　图②　　图③

【分析】（1）在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}$，在 Rt△CFG 中，$CF=\sqrt{CG^2+GF^2}$，由 AC＝CF，可知△ACF 是等腰三角形，再由△ABC≌△FGC（SAS），推导出∠ACF＝90°，即可判断出△ACF 是等腰直角三角形，

（2）探究一：证明△CDM≌△FGM（AAS），可得 CM＝MF，再由等腰三角形的性质可得 AD＝DF，在 Rt△CDM 中，$CM^2=2^2+(4-CM)^2$，解得 $CM=\frac{5}{2}$，则 $MF=\frac{5}{2}$，即可求△CMF 的面积$=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$；

探究二：连接 DE，取 DE 的中点 P，连接 HP，取 AD、BC 的中点为 M、N，连接 MN，

MH，NH，分别得出四边形 $MHPD$ 是平行四边形，四边形 $HNCP$ 是平行四边形，则∠MHN＝90°，可知 H 点在以 MN 为直径的圆上，设 MN 的中点为 T，$DT=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以 DH 的最大值为$\sqrt{5}+1$，最小值为$\sqrt{5}-1$．

【解答】解：（1）在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}$，

在 Rt△CFG 中，$CF=\sqrt{CG^2+GF^2}$，

∵AB＝GF，BC＝CG，

∴AC＝CF，

∴△ACF 是等腰三角形，

∵AB＝GF，∠FGC＝∠ABC＝90°．BC＝CG，

∴△ABC≌△FGC（SAS），

∴∠ACG＝∠GFC，

∵∠GCF+∠GFC＝90°，

∴∠ACG+∠GCF＝90°，

∴∠ACF＝90°，

∴△ACF 是等腰直角三角形，

故答案为：等腰直角三角形；

（2）探究一：∵CD＝GF，∠FMG＝∠DMC，∠G＝∠CDF＝90°，

∴△CDM≌△FGM（AAS），

∴CM＝MF，

∵AC＝CF，CD⊥AF，

∴AD＝DF，

∵AB＝CD＝2，AD＝DF＝4，

∴DM＝4﹣CM，

在 Rt△CDM 中，CM^2＝CD^2+DM^2，

∴CM^2＝2^2+（4﹣CM）^{2}，

解得 $CM=\frac{5}{2}$，

∴$MF=\frac{5}{2}$，

∴△CMF 的面积$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$;

探究二：连接 DE，取 DE 的中点 P，连接 HP，取 AD、BC 的中点为 M、N，连接 MN，

MH，NH，

∵H 是 AE 的中点，

∴MH∥DE，且 $MH=\frac{1}{2}DE$，

∵$CD=CE$，

∴$CP\perp DE$，$DP=PE$，

∵MH∥DP，且 $MH=DP$，

∴四边形 $MHPD$ 是平行四边形，

∴$MD=HP$，MD∥HP，

∵AD∥BC，$MD=CN$，

∴HP∥CN，$HP=CN$，

∴四边形 $HNCP$ 是平行四边形，

∴NH∥CP，

∴$\angle MHN=90°$，

∴H 点在以 MN 为直径的圆上，

设 MN 的中点为 T，

∴$DT=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴DH 的最大值为$\sqrt{5}+1$，最小值为$\sqrt{5}-1$．

方法二：设 AC 的中点为 T，连接 HT，

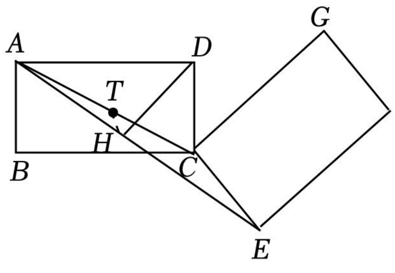
∵HT 是△ACE 的中位线，

∴$HT=\frac{1}{2}CE=1$，

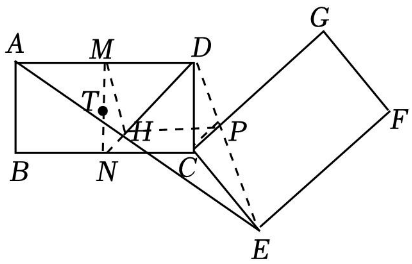
∴H 在以 T 为圆心，1 为半径的圆上，

∵$DT=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴DH 的最大值为$\sqrt{5}+1$，最小值为$\sqrt{5}-1$．



图③



图③

【点评】本题考查四边形的综合应用，熟练掌握矩形的性质，直角三角形的性质，三角形全等的判定及性质，平行四边形的性质，圆的性质，能够确定 H 点的运动轨迹是解题的关键.