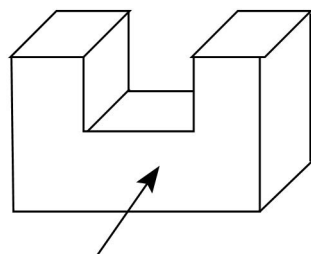


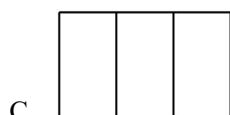
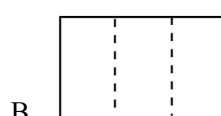
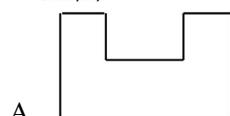
## 知新学校九上数学期末复习 2

### 一、选择题（共 10 小题）

1. (3 分) 如图是一个零件的示意图，它的俯视图是( )



正面



2. (3 分) 已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m-1)x^2 + x + 1 = 0$  没有实数根，则  $m$  的取值范围是( )

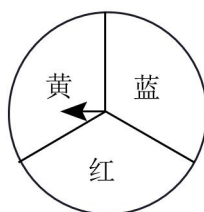
A.  $m < \frac{5}{4}$

B.  $m > \frac{5}{4}$

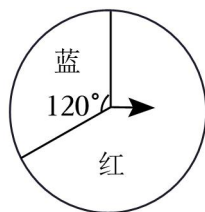
C.  $m < \frac{5}{4}$

D.  $m < \frac{5}{4}$

3. (3 分) 22 届年级组董老师为学校联欢会设计了一个“配紫色”游戏：如图是两个可以自由转动的转盘， $A$  盘被分成面积相等的几个扇形， $B$  盘中蓝色扇形区域所占的圆心角是  $120^\circ$ 。同学们同时转动两个转盘，如果其中一个转盘转出了红色，另一个转盘转出了蓝色，那么可以配成紫色，赢得游戏。若小赵同学同时转动  $A$  盘和  $B$  盘，她赢得游戏的概率是( )



A 盘



B 盘

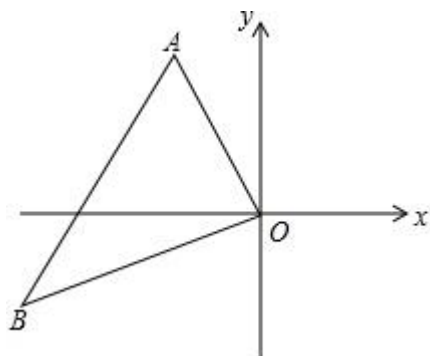
A.  $\frac{2}{5}$

B.  $\frac{1}{6}$

C.  $\frac{1}{9}$

D.  $\frac{1}{3}$

4. (3 分) 如图，在平面直角坐标系中，已知点  $A(-3,6)$ 、 $B(-9,-3)$ ，以原点  $O$  为位似中心，相似比为  $\frac{1}{3}$ ，把  $\triangle ABO$  缩小，则点  $B$  的对应点  $B'$  的坐标是( )

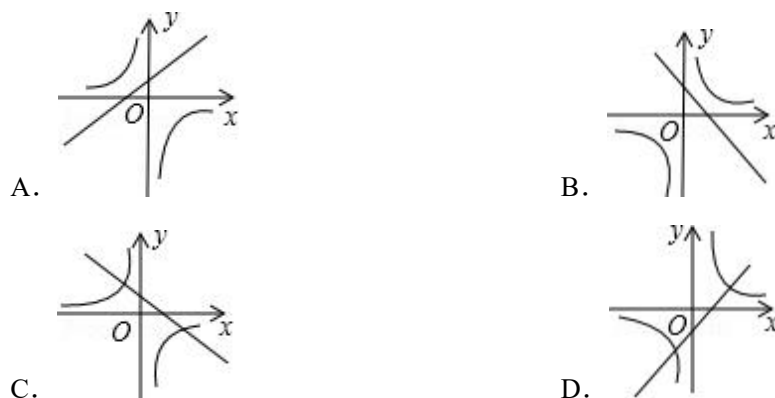


- A.  $(-3, -1)$                       B.  $(-1, 2)$   
C.  $(-9, 1)$  或  $(9, -1)$                       D.  $(-3, -1)$  或  $(3, 1)$

5. (3 分) 秋冬季节为流感的高发期，有一人患了流感，经过两轮传染后共有 121 人患了流感，每轮传染中平均一个人传染的人数为(     )

- A. 9 人                      B. 10 人                      C. 11 人                      D. 12 人

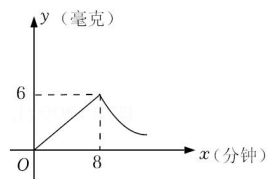
6. (3 分) 函数  $y = \frac{k}{x}$  与  $y = kx + 1 (k \neq 0)$  在同一坐标系内的图象大致为图中的(     )



7. (3 分) 下列命题正确的是(     )

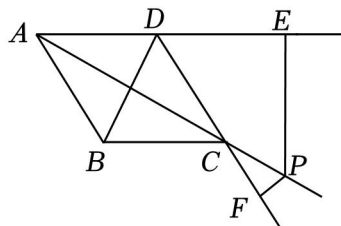
- A. 顺次连接矩形四边的中点得到菱形  
B. 对角线相等的四边形是矩形  
C. 两边成比例及一角相等的两个三角形相似  
D. 若点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点，则  $PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$

8. (3 分) 某学校对教室采用药熏消毒，已知药物燃烧时，室内每立方米空气中的含药量  $y$  (毫克) 与时间  $x$  (分钟) 成正比例，药物燃烧完后， $y$  与  $x$  成反比例 (如图)，现测得药物  $8\text{min}$  燃毕，此时室内空气中每立方米含药量为  $6\text{mg}$  . 研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于  $3\text{mg}$  才有效，那么此次消毒的有效时间是(     )



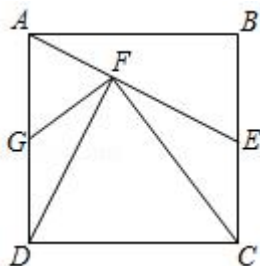
- A. 10 分钟      B. 12 分钟      C. 14 分钟      D. 16 分钟

9. (3 分) 如图, 已知点  $P$  是菱形  $ABCD$  的对角线  $AC$  延长线上一点, 过点  $P$  分别作  $AD$ 、 $DC$  延长线的垂线, 垂足分别为点  $E$ 、 $F$ . 若  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = 2$ , 则  $PE - PF$  的值为( )



- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\frac{5}{2}$       C. 2      D.  $\sqrt{3}$

10. (3 分) 如图, 正方形  $ABCD$  中,  $E$  为  $BC$  中点, 连接  $AE$ ,  $DF \perp AE$  于点  $F$ , 连接  $CF$ ,  $FG \perp CF$  交  $AD$  于点  $G$ , 下列结论: ①  $CF = CD$ ; ②  $G$  为  $AD$  中点; ③  $\triangle DCF \sim \triangle AGF$ ; ④  $\frac{AF}{EF} = \frac{2}{3}$ , 其中结论正确的个数有( )

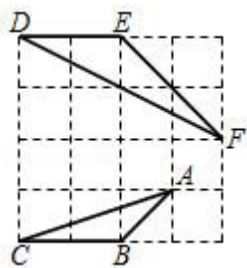


- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

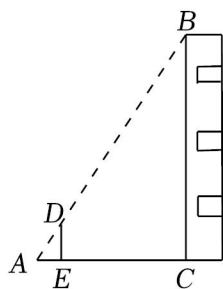
## 二、填空题 (共 5 小题)

11. (3 分) 如果  $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$ , 那么  $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

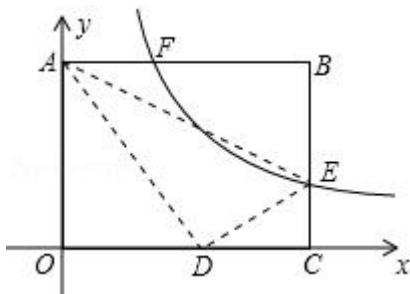
12. (3 分) 如图, 在正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1,  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的顶点都在网格线的交点上. 设  $\triangle ABC$  的周长为  $C_1$ ,  $\triangle DEF$  的周长为  $C_2$ , 则  $\frac{C_1}{C_2}$  的值等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



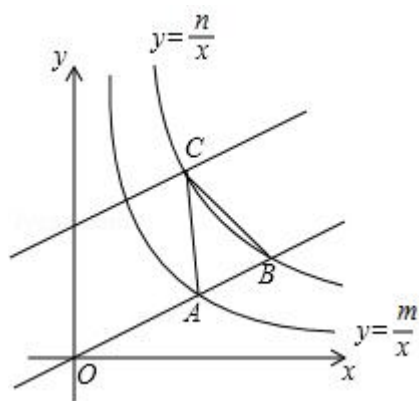
13. (3分) 如图, 利用标杆  $DE$  测量楼高, 点  $A, D, B$  在同一直线上,  $DE \perp AC$ ,  $BC \perp AC$ , 垂足分别为  $E, C$ . 若测得  $AE = 1m$ ,  $DE = 1.5m$ ,  $AC = 5m$ , 楼高  $BC$  是 \_\_\_\_.



14. (3分) 如图, 矩形  $ABCO$  的顶点  $B(10,8)$ , 点  $A, C$  在坐标轴上,  $E$  是  $BC$  边上一点, 将  $\triangle ABE$  沿  $AE$  折叠, 点  $B$  刚好与  $OC$  边上点  $D$  重合, 过点  $E$  的反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象与边  $AB$  交于点  $F$ , 则线段  $BF$  的长为 \_\_\_\_.



15. (3分) 已知如图, 直线  $y = \frac{2}{3}x$  分别与双曲线  $y = \frac{m}{x} (m > 0, x > 0)$ 、双曲线  $y = \frac{n}{x} (n > 0, x > 0)$  交于点  $A$ , 点  $B$ , 且  $\frac{BA}{OA} = \frac{2}{3}$ , 将直线  $y = \frac{2}{3}x$  向左平移 6 个单位长度后, 与双曲线  $y = \frac{n}{x}$  交于点  $C$ , 若  $S_{\triangle ABC} = 4$ , 则  $mn$  的值为 \_\_\_\_.



### 三、解答题

16. (8分) 解方程:

(1)  $x(x+4) = 2x+8$ ;

(2)  $3x^2 - 4x - 1 = 0$ .

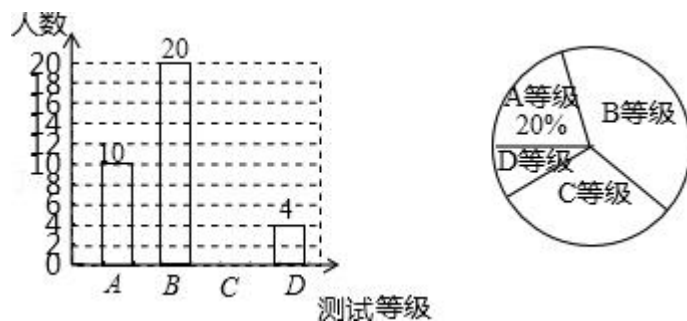
17. (8分) 深圳某中学为了解九年级学生的体能状况, 从九年级学生中随机抽取部分学生进行体能测试, 测试结果分为  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  四个等级. 请根据两幅统计图中的信息回答下列问题:

(1) 本次抽样调查共抽取了\_\_\_\_名学生.

(2) 求测试结果为  $C$  等级的学生数, 并补全条形图;

(3) 若该中学九年级共有 700 名学生, 请你估计该中学九年级学生中体能测试结果为  $D$  等级的学生有多少名?

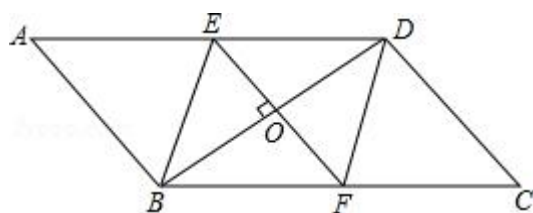
(4) 若从体能为  $A$  等级的 2 名男生 2 名女生中随机的抽取 2 名学生, 作为该校培养运动员的重点对象, 请用列表法或画树状图的方法求所抽取的两人恰好都是男生的概率.



18. (7分) 如图,  $EF$  是平行四边形  $ABCD$  的对角线  $BD$  的垂直平分线,  $EF$  与边  $AD$ 、 $BC$  分别交于点  $E$ 、 $F$ .

(1) 求证: 四边形  $BFDE$  是菱形;

(2) 若  $ED = 5$ ,  $BD = 8$ , 求菱形  $BFDE$  的面积.



19. (7分) 2020年突如其来的新型冠状病毒疫情,给生鲜电商带来了意想不到的流量和机遇,据统计某生鲜电商平台1月份的销售额是225万元,3月份的销售额是324万元.

(1) 若该平台1月份到3月份的月平均增长率都相同,求月平均增长率是多少?

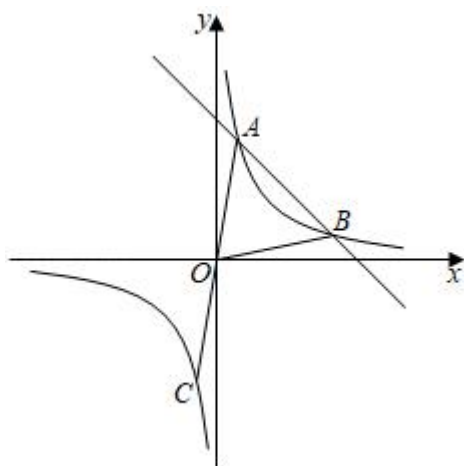
(2) 经市场调查发现,某水果在“盒马鲜生”平台上的售价为24元/千克时,每天能销售300千克,售价每降低2元,每天可多售出100千克,为了推广宣传,商家决定降价促销,同时尽量减少库存,已知该水果的成本价为12元/千克,若使销售该水果每天获利4000元,则售价应降低多少元?

20. (8分) 如图,一次函数  $y_1 = ax + b$  与反比例函数  $y_2 = \frac{k}{x}$  的图象相交于  $A(2, 8)$ ,  $B(8, n)$  两点,连接  $AO$ ,  $BO$ , 延长  $AO$  交反比例函数图象于点  $C$ .

(1) 求一次函数  $y_1$  与反比例函数  $y_2$  的表达式;

(2) 当  $y_1 < y_2$  时, 自变量  $x$  的取值范围为\_\_\_\_\_;

(3) 点  $P$  是  $x$  轴上一点, 当  $S_{\triangle PAC} = \frac{4}{5} S_{\triangle AOB}$  时, 请求出点  $P$  的坐标.



21. (8分) 【模型发现】如图1,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , 求证:  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ .

【深入探究】如图2, 等边  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $D$  是  $AC$  上的动点, 连接  $BD$ , 将  $BD$  绕着点  $D$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $DE$ , 连接  $CE$ , 当点  $D$  从  $A$  运动到  $C$  时, 求点  $E$  的运动路径长.

【应用拓展】如图3, 等腰  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$  于  $D$ ,  $E$  是  $AD$  上的一点, 连接  $BE$ , 将  $BE$  绕着点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $EF$ ,  $EF$  交  $BC$  于点  $G$ , 连接  $CF$ , 若

$EG = \frac{1}{2}FG$ ，则  $\frac{AB}{CF}$  的值为 \_\_\_\_.

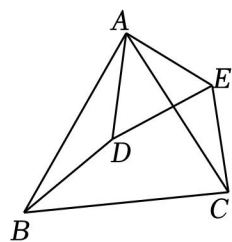


图1

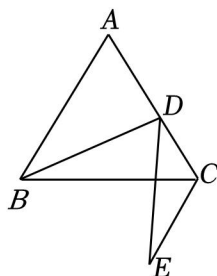


图2

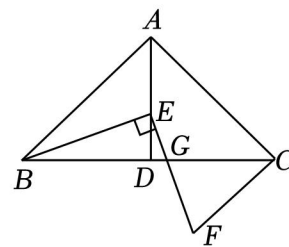


图3

22. (9分) 如图1，在平面直角坐标系内，直线  $y = -\frac{4}{3}x + 8$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交  $y$  轴于点  $B$ ，交直线  $y = kx$  于第一象限的点  $C$ ，点  $D$  在  $y$  轴上， $AD$  平分  $\angle BAO$ 。

(1) 点  $D$  的坐标为 \_\_\_\_；

(2) 若  $\triangle BOC$  与  $\triangle BAD$  相似，求  $k$  的值；

(3) 在 (2) 的条件下，如图2，已知点  $M(m, -3)$ ，平移直线  $y = kx$  交  $x$  轴于点  $E$ ，交  $y$  轴于点  $F$ ，平面内是否存在点  $N$ ，使得四边形  $EFMN$  是正方形？若存在，请直接写出  $m$  的值；若不存在，请说明理由。

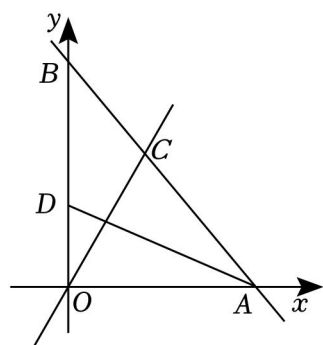


图1

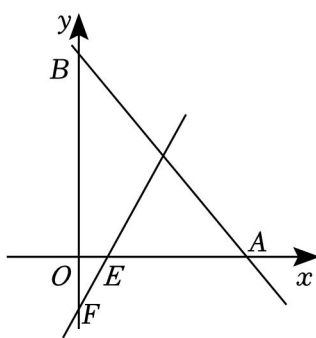
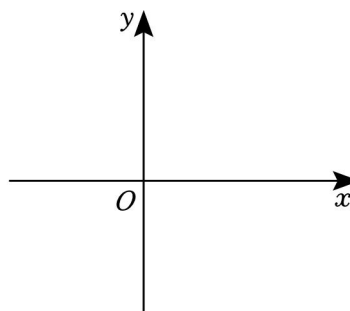


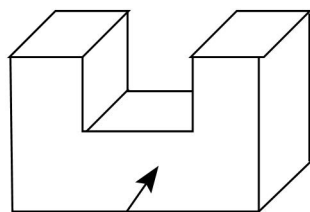
图2



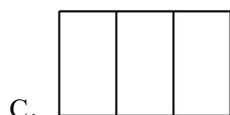
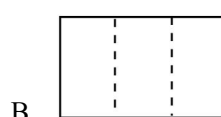
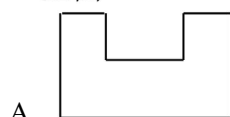
备用图

一、选择题（共 10 小题）

1. （3 分）如图是一个零件的示意图，它的俯视图是（ ）



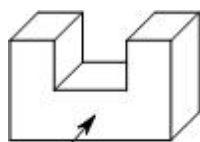
正面



【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图，可得答案.

【解答】解：从上面看该零件的示意图是一个大矩形，且中间有 2 条实线段，

故选：C.



正面

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从上面看得到的图形是俯视图.

2. （3 分）已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m-1)x^2 + x + 1 = 0$  没有实数根，则  $m$  的取值范围是（ ）

A.  $m > \frac{5}{4}$

B.  $m < \frac{5}{4}$

C.  $m < \frac{5}{4}$

D.  $m < \frac{5}{4}$

【分析】利用一元二次方程的定义和判别式的意义得到  $m-1 \neq 0$  且  $\Delta = 1^2 - 4(m-1) \times 1 < 0$ ，

然后求出两个不等式的公共部分即可.

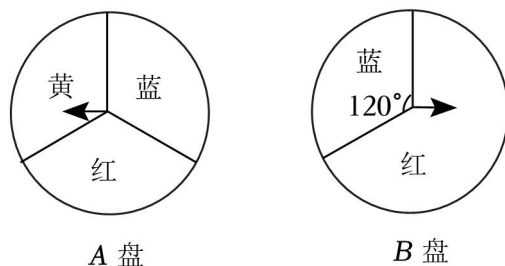
【解答】解：根据题意得  $m-1 \neq 0$  且  $\Delta = 1^2 - 4(m-1) \times 1 < 0$ ，

所以  $m > \frac{5}{4}$ .

故选：B.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根与  $\Delta = b^2 - 4ac$  有如下关系：当  $\Delta > 0$  时，方程有两个不相等的实数根；当  $\Delta = 0$  时，方程有两个相等的实数根；当  $\Delta < 0$  时，方程无实数根。

3. (3 分) 22 届年级组董老师为学校联欢会设计了一个“配紫色”游戏：如图是两个可以自由转动的转盘，A 盘被分成面积相等的几个扇形，B 盘中蓝色扇形区域所占的圆心角是  $120^\circ$ 。同学们同时转动两个转盘，如果其中一个转盘转出了红色，另一个转盘转出了蓝色，那么可以配成紫色，赢得游戏。若小赵同学同时转动 A 盘和 B 盘，她赢得游戏的概率是 ( )



- A.  $\frac{2}{5}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{1}{9}$       D.  $\frac{1}{3}$

【分析】先求出在 B 盘中， $S_{\text{红色扇形}} = 2S_{\text{蓝色扇形}}$ ，再画树状图，共有 9 种等可能的结果，其中一个转盘转出了红色、另一个转盘转出了蓝色的有 3 种情况，然后由概率公式求解即可。

【解答】解： $\because$  B 盘中蓝色扇形区域所占的圆心角是  $120^\circ$ ，  
 $\therefore$  B 盘红色扇形区域所占的圆心角是  $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ ，  
 $\therefore$  在 B 盘中， $S_{\text{红色扇形}} = 2S_{\text{蓝色扇形}}$ ，

画树状图如下：

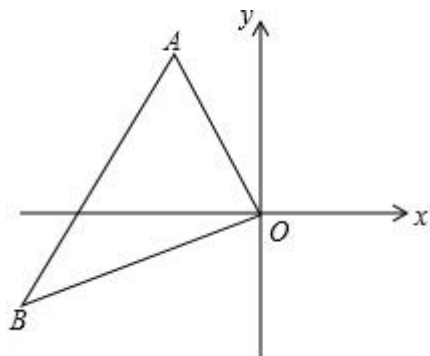


共有 9 种等可能的结果，其中一个转盘转出了红色、另一个转盘转出了蓝色的有 3 种情况，  
 $\therefore$  小赵同学同时转动 A 盘和 B 盘，她赢得游戏的概率是  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故选：D。

【点评】本题考查了列表法与树状图法求概率，正确画出树状图是解题的关键；用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

4. 如图，在平面直角坐标系中，已知点  $A(-3,6)$ 、 $B(-9,-3)$ ，以原点  $O$  为位似中心，相似比为  $\frac{1}{3}$ ，把  $\triangle ABO$  缩小，则点  $B$  的对应点  $B'$  的坐标是( )



- A.  $(-3,-1)$                       B.  $(-1,2)$   
C.  $(-9,1)$  或  $(9,-1)$                       D.  $(-3,-1)$  或  $(3,1)$

【分析】利用以原点为位似中心，相似比为  $k$ ，位似图形对应点的坐标的比等于  $k$  或  $-k$ ，把  $B$  点的横纵坐标分别乘以  $\frac{1}{3}$  或  $-\frac{1}{3}$  即可得到点  $B'$  的坐标.

【解答】解： $\because$  以原点  $O$  为位似中心，相似比为  $\frac{1}{3}$ ，把  $\triangle ABO$  缩小，  
 $\therefore$  点  $B(-9,-3)$  的对应点  $B'$  的坐标是  $(-3,-1)$  或  $(3,1)$ .

故选：D.

【点评】本题考查了位似变换：在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为  $k$ ，那么位似图形对应点的坐标的比等于  $k$  或  $-k$ .

5. (3 分) 秋冬季节为流感的高发期，有一人患了流感，经过两轮传染后共有 121 人患了流感，每轮传染中平均一个人传染的人数为( )

- A. 9 人                      B. 10 人                      C. 11 人                      D. 12 人

【分析】设每轮传染中平均一个人传染的人数为  $x$ ，则第一轮传染了  $x$  人，第二轮传染了  $(x+1)x$  人，根据第二轮传染后患流感的人数即可得出关于  $x$  的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论.

【解答】解：设每轮传染中平均一个人传染的人数为  $x$ ，则第一轮传染了  $x$  人，第二轮传染了  $(x+1)x$  人，

根据题意得：  $1+x+(x+1)x=121$ ，

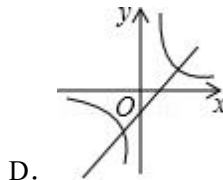
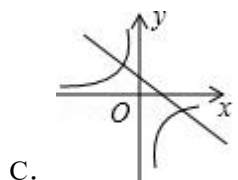
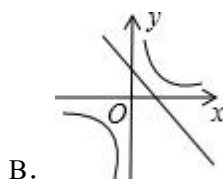
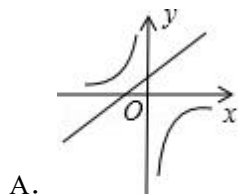
解得：  $x=10$  或  $x=-12$  (舍去).

故选：B.

【点评】本题考查了一元二次方程的应用以及列代数式，根据经过两轮传染后共有 121 人患

了流感列出关于  $x$  的一元二次方程是解题的关键.

6. (3 分) 函数  $y = \frac{k}{x}$  与  $y = kx + 1 (k \neq 0)$  在同一坐标系内的图象大致为图中的 ( )



【分析】根据反比例函数及一次函数的性质对四个选项进行逐一分析即可.

【解答】解: A、由此反比例函数的图象在二、四象限可知,  $k < 0$ ; 而一次函数的图象经过一、三象限  $k > 0$ , 相矛盾, 故本选项错误;

B、由此反比例函数的图象在一、三象限可知,  $k > 0$ ; 而一次函数的图象经过二、四象限,  $k < 0$ , 相矛盾, 故本选项错误;

C、由此反比例函数的图象在二、四象限可知,  $k < 0$ ; 而一次函数的图象经过一、三象限,  $k < 0$ , 两结论一致, 故本选项正确;

D、由此反比例函数的图象在一、三象限可知,  $k > 0$ ; 而一次函数的图象经过一、三象限,  $k < 0$ , 因为  $1 > 0$ , 所以此一次函数的图象应经过一、二、三象限, 故本选项错误.

故选: C.

【点评】本题考查的是反比例函数的图象与一次函数的图象, 熟知反比例函数的图象与一次函数的图象的特点是解答此题的关键,

7. (3 分) 下列命题正确的是 ( )

A. 顺次连接矩形四边的中点得到菱形

B. 对角线相等的四边形是矩形

C. 两边成比例及一角相等的两个三角形相似

D. 若点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点, 则  $PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$

【分析】根据矩形性质与判定, 相似三角形判定, 黄金分割点定义逐项判断.

【解答】解: 顺次连接矩形四边的中点得到菱形, 故 A 正确, 符合题意;

对角线相等的平行四边形是矩形, 故 B 错误, 不符合题意;

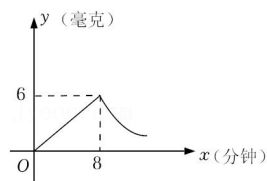
两边成比例及夹角相等的两个三角形相似，故  $C$  错误，不符合题意；

若点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点， $PA > PB$ ，则  $PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，故  $D$  错误，不符合题意；

故选：  $A$  ．

【点评】 本题考查命题与定理，解的关键是掌握教材上相关的概念与定理．

8. (3 分) 某学校对教室采用药熏消毒，已知药物燃烧时，室内每立方米空气中的含药量  $y$  (毫克) 与时间  $x$  (分钟) 成正比例，药物燃烧完后， $y$  与  $x$  成反比例 (如图)，现测得药物  $8\text{min}$  燃毕，此时室内空气中每立方米含药量为  $6\text{mg}$  . 研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于  $3\text{mg}$  才有效，那么此次消毒的有效时间是 ( )



- A. 10 分钟                      B. 12 分钟                      C. 14 分钟                      D. 16 分钟

【分析】 首先根据题意确定一次函数与反比例函数的解析式，然后代入  $y=3$  确定两个自变量的值，差即为有效时间．

【解答】 解：(1) 设药物燃烧时  $y$  关于  $x$  的函数关系式为  $y=k_1x(k_1 > 0)$  代入  $(8,6)$  为  $6=8k_1$ ，

$$\therefore k_1 = \frac{3}{4};$$

设药物燃烧后  $y$  关于  $x$  的函数关系式为  $y=\frac{k}{x}(k_2 > 0)$  代入  $(8,6)$  为  $6=\frac{k}{8}$ ，

$$\therefore k_2 = 48$$

$\therefore$  药物燃烧时  $y$  关于  $x$  的函数关系式为  $y=\frac{3}{4}x(0 \leq x \leq 8)$ ；药物燃烧后  $y$  关于  $x$  的函数关系式

为  $y=\frac{48}{x}(x > 8)$ ，

把  $y=3$  代入  $y=\frac{3}{4}x$ ，得：  $x=4$ ，

把  $y=3$  代入  $y=\frac{48}{x}$ ，得：  $x=16$ ，

$$\therefore 16-4=12，$$

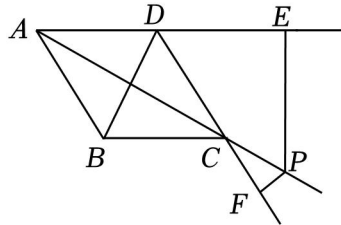
$\therefore$  那么此次消毒的有效时间是 12 分钟，

故选：  $B$  ．

【点评】 本题考查了函数的应用，现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量，解答该类

问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用待定系数法求出它们的关系式。

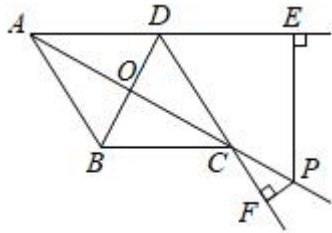
9. (3分) 如图，已知点  $P$  是菱形  $ABCD$  的对角线  $AC$  延长线上一点，过点  $P$  分别作  $AD$ 、 $DC$  延长线的垂线，垂足分别为点  $E$ 、 $F$ 。若  $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ，则  $PE - PF$  的值为( )



- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\frac{5}{2}$       C. 2      D.  $\sqrt{3}$

【分析】设  $AC$  交  $BD$  于  $O$ ，根据已知可得  $AC = 2\sqrt{3}$ ，而  $PE - PF = \frac{1}{2}AP - \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}(AP - CP) = \frac{1}{2}AC$ ，即可得到答案。

【解答】解：设  $AC$  交  $BD$  于  $O$ ，如图：



$\because$  在菱形  $ABCD$  中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ， $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ ， $AD = AB = 2$ ， $BD \perp AC$ ，

Rt $\triangle AOD$  中， $OD = \frac{1}{2}AD = 1$ ， $OA = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{3}$ ，

Rt $\triangle APE$  中， $\angle DAC = 30^\circ$ ， $PE = \frac{1}{2}AP$ ，

Rt $\triangle CPF$  中， $\angle PCF = \angle DCA = 30^\circ$ ， $PF = \frac{1}{2}CP$ ，

$\therefore PE - PF = \frac{1}{2}AP - \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}(AP - CP) = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore PE - PF = \sqrt{3}$ ，

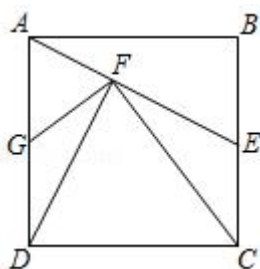
故选：D。

【点评】本题考查菱形的性质及应用，解题的关键是求出  $AC$ ，把  $PE - PF$  转化为  $\frac{1}{2}AC$ 。

10. (3分) 如图，正方形  $ABCD$  中， $E$  为  $BC$  中点，连接  $AE$ ， $DF \perp AE$  于点  $F$ ，连接  $CF$ ，

$FG \perp CF$  交  $AD$  于点  $G$ ，下列结论：①  $CF = CD$ ；②  $G$  为  $AD$  中点；③  $\triangle DCF \sim \triangle AGF$ ；④

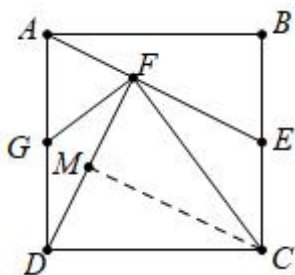
$\frac{AF}{EF} = \frac{2}{3}$ ，其中结论正确的个数有( )



- A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

【分析】如图，作  $CM \perp DF$  于  $M$ ．首先证明  $\triangle DAF \cong \triangle CDM$ ，推出  $DM = AF$ ，再证明  $DF = 2AF$ ，推出  $DM = MF$ ，推出  $CD = CF$ ，再证明  $\angle GDF = \angle GFD$ ，推出  $GD = GF$ ，再证明  $GF = GA$  即可证明  $GA = GD$ ，由此即可一一判断；

【解答】解：如图，作  $CM \perp DF$  于  $M$ ．



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\therefore \angle DAB = \angle B = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\because \angle ADF + \angle CDF = 90^\circ$ ， $\angle CDF + \angle DCM = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADF = \angle DCM$ ，

$\because DF \perp AE$ ， $CM \perp DF$ ，

$\therefore \angle AFD = \angle CMD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle DAF \cong \triangle CDM$ ，

$\therefore CM = DF$ ， $DM = AF$ ，

$\because \angle ADF + \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle DAE + \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle ADF$ ，

$\because BE = CE$ ，

$\therefore AB = 2BE$ ，

$$\therefore \tan \angle BAE = \tan \angle ADF = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DM = MF, \because CM \perp DF,$$

$$\therefore CD = CF, \text{ 故①正确,}$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CFD,$$

$$\because \angle CDG = \angle CFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GFD = \angle GDF,$$

$$\therefore GF = GD,$$

$$\because \angle GDF + \angle DAF = 90^\circ, \angle GFD + \angle AFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle GFA,$$

$$\therefore GF = GA,$$

$$\therefore GD = GA,$$

$$\therefore G \text{ 是 } AD \text{ 中点, 故②正确,}$$

$$\because \angle AFD = \angle GFC,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle CFD, \angle GAF = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle AGF, \text{ 故③正确,}$$

$$\text{设 } AF = a, \text{ 则 } DF = 2a, AB = \sqrt{5}a, BE = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore AE = \frac{5}{2}a, EF = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{2}{3}, \text{ 故④正确,}$$

故选: D.

**【点评】** 本题考查正方形的性质、全等三角形的判定和性质、锐角三角函数、相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考常考题型.

## 二、填空题 (共 5 小题)

11. (3 分) 如果  $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$ , 那么  $\frac{x}{y} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$ .

**【分析】** 由  $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$  可得  $\frac{x-y}{x} = \frac{3}{5}$ , 进一步得到  $1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$ , 可求  $\frac{y}{x}$ , 进一步得到  $\frac{x}{y}$  的值.

**【解答】** 解:  $\frac{x}{x-y} = \frac{5}{3}$ ,

$$\frac{x-y}{x} = \frac{3}{5},$$

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5},$$

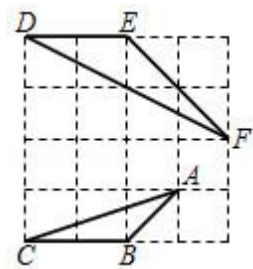
$$\frac{y}{x} = \frac{2}{5},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}.$$

故答案为:  $\frac{5}{2}$ .

【点评】考查了比例的性质，关键是得到  $1 - \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$ .

12. (3分) 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长均为1， $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的顶点都在网格线的交点上. 设  $\triangle ABC$  的周长为  $C_1$ ， $\triangle DEF$  的周长为  $C_2$ ，则  $\frac{C_1}{C_2}$  的值等于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



【分析】先证明两个三角形相似，再根据相似三角形的周长比等于相似比，得出周长比的值便可.

【解答】解:  $\because \frac{DE}{AB} = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2},$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{\sqrt{4^2+2^2}}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \sqrt{2},$$

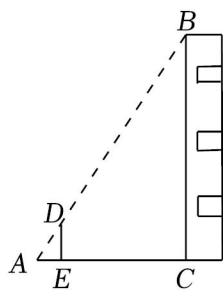
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{C_1}{C_2} = \frac{AB}{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

【点评】本题主要考查相似三角形的性质与判定，勾股定理，本题关键是证明三角形相似.

13. (3分) 如图, 利用标杆  $DE$  测量楼高, 点  $A, D, B$  在同一直线上,  $DE \perp AC, BC \perp AC$ , 垂足分别为  $E, C$ . 若测得  $AE = 1m, DE = 1.5m, AC = 5m$ , 楼高  $BC$  是 7.5m.



【分析】根据平行线的判定得到  $DE \parallel BC$ , 然后, 根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【解答】解:  $\because DE \perp AC, BC \perp AC,$

$\therefore DE \parallel BC,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{1}{5} = \frac{1.5}{BC},$$

$$\therefore BC = 7.5(m),$$

答: 楼高  $BC$  是  $7.5m$ .

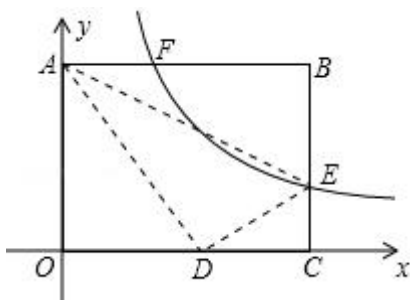
故答案为:  $7.5m$ .

【点评】本题考查了相似三角形的应用, 证得  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  是解题的关键.

14. (3分) 如图, 矩形  $ABCO$  的顶点  $B(10,8)$ , 点  $A, C$  在坐标轴上,  $E$  是  $BC$  边上一点,

将  $\triangle ABE$  沿  $AE$  折叠, 点  $B$  刚好与  $OC$  边上点  $D$  重合, 过点  $E$  的反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象

与边  $AB$  交于点  $F$ , 则线段  $BF$  的长为  $\frac{25}{4}$ .



【分析】首先根据翻折变换的性质, 可得  $AD = AB = 10, DE = BE$ ; 然后设点  $E$  的坐标是  $(10, b)$ , 在  $Rt\triangle CDE$  中, 根据勾股定理, 求出  $CE$  的长度, 进而求出  $k$  的值, 再把  $F$  点的

纵坐标代入解析式可求得  $F$  点的坐标，即可求得  $BF$  的长.

**【解答】**解：

$\because \triangle ABE$  沿  $AE$  折叠，点  $B$  刚好与  $OC$  边上点  $D$  重合，

$$\therefore AD = AB = 10, \quad DE = BE,$$

$$\because AO = 8, \quad AD = 10,$$

$$\therefore OD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore CD = 10 - 6 = 4,$$

设点  $E$  的坐标是  $(10, b)$ ,

$$\text{则 } CE = b, \quad DE = 10 - b,$$

$$\because CD^2 + CE^2 = DE^2,$$

$$\therefore 4^2 + b^2 = (10 - b)^2,$$

解得  $b = 3$ ,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标是 } (10, 3),$$

设反比例函数  $y = \frac{k}{x}$ ,

$$\therefore k = 10 \times 3 = 30,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{30}{x},$$

$$\because F \text{ 点纵坐标为 } 8,$$

$$\therefore 8 = \frac{30}{x}, \text{ 解得 } x = \frac{15}{4}, \text{ 即 } AF = \frac{15}{4},$$

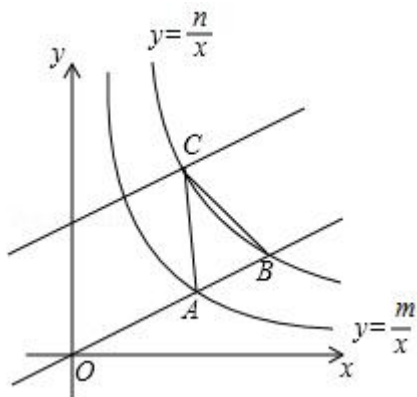
$$\therefore BF = AB - AF = 10 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4},$$

故答案为： $\frac{25}{4}$ .

**【点评】**(1) 此题主要考查了翻折变换（折叠问题），要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等.

(2) 此题还考查了反比例函数图象上点的坐标特征，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①图象上的点  $(x, y)$  的横纵坐标的积是定值  $k$ ，即  $xy = k$ ；②双曲线是关于原点对称的，两个分支上的点也是关于原点对称；③在  $xk$  图象中任取一点，过这一个点向  $x$  轴和  $y$  轴分别作垂线，与坐标轴围成的矩形的面积是定值  $|k|$ .

15. (3分) 已知如图, 直线  $y = \frac{2}{3}x$  分别与双曲线  $y = \frac{m}{x} (m > 0, x > 0)$ 、双曲线  $y = \frac{n}{x} (n > 0, x > 0)$  交于点  $A$ , 点  $B$ , 且  $\frac{BA}{OA} = \frac{2}{3}$ , 将直线  $y = \frac{2}{3}x$  向左平移 6 个单位长度后, 与双曲线  $y = \frac{n}{x}$  交于点  $C$ , 若  $S_{\triangle ABC} = 4$ , 则  $mn$  的值为 100.



【分析】先求出直线  $y = \frac{2}{3}x$  向左平移 6 个单位长度后的解析式为  $y = \frac{2}{3}x + 4$ ,

那么直线  $y = \frac{2}{3}x + 4$  交  $y$  轴于  $E(0, 4)$ , 作  $EF \perp OB$  于  $F$ . 根据互相垂直的两

直线斜率之积为  $-1$  得出直线  $EF$  的解析式为  $y = -\frac{3}{2}x + 4$ , 再求出  $F(\frac{24}{13}, \frac{16}{13})$ ,

$EF = \sqrt{(\frac{24}{13})^2 + (\frac{16}{13} - 4)^2} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ , 根据  $S_{\triangle ABC} = 4$ , 求出  $AB = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ , 那么

$OA = \frac{3}{2}AB = \sqrt{13}$ , 进而求出  $A$ 、 $B$  两点坐标, 求出  $m$ 、 $n$  即可解决问题.

【解答】解: 直线  $y = \frac{2}{3}x$  向左平移 6 个单位长度后的解析式为  $y = \frac{2}{3}(x + 6)$ ,

即  $y = \frac{2}{3}x + 4$ ,

$\therefore$  直线  $y = \frac{2}{3}x + 4$  交  $y$  轴于  $E(0, 4)$ , 作  $EF \perp OB$  于  $F$ .

可得直线  $EF$  的解析式为  $y = -\frac{3}{2}x + 4$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{24}{13} \\ y = \frac{16}{13} \end{cases}, \text{ 即 } F(\frac{24}{13}, \frac{16}{13}).$$

$$\therefore EF = \sqrt{(\frac{24}{13})^2 + (\frac{16}{13} - 4)^2} = \frac{12\sqrt{13}}{13},$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EF = 4 ,$$

$$\therefore AB = \frac{2\sqrt{13}}{3} ,$$

$$\therefore \frac{BA}{OA} = \frac{2}{3} ,$$

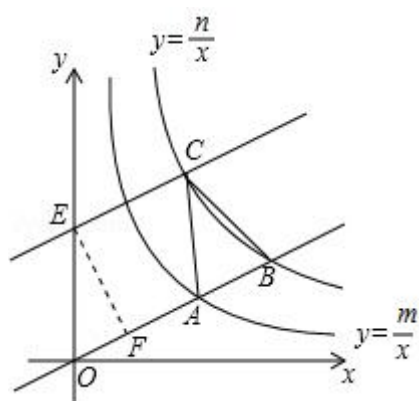
$$\therefore OA = \frac{3}{2} AB = \sqrt{13} ,$$

$$\therefore A(3, 2), B(5, \frac{10}{3}) ,$$

$$\therefore m = 6, n = \frac{50}{3} ,$$

$$\therefore mn = 100 .$$

故答案为 100 .



**【点评】** 本题考查反比例函数与一次函数的交点问题， 待定系数法求直线的解析式， 两点间的距离公式， 三角形的面积， 函数图象上点的坐标特征等知识， 综合性较强 . 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题， 属于中考填空题中的压轴题 .

### 三、解答题

16. (8 分) 解方程：

(1)  $x(x+4) = 2x+8$  ;

(2)  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  .

**【分析】** (1) 提公因式法因式分解解方程即可；

(2) 利用公式法解方程即可；

**【解答】** 解：(1)  $x(x+4) = 2x+8$  ,

$$x(x+4) - 2(x+4) = 0 ,$$

$$(x+4)(x-2)=0,$$

$$x+4=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -4, \quad x_2 = 2;$$

$$(2) \quad 3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$\therefore a=3, \quad b=-4, \quad c=-1,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 28 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

【点评】本题考查一元二次方程—因式分解法以及一元二次方程—公式法，解题的关键是掌握提公因式法分解因式以及熟记求根公式。

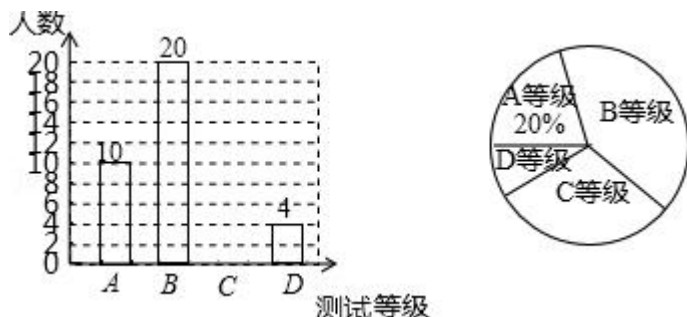
17. (8分) 深圳某中学为了解九年级学生的体能状况，从九年级学生中随机抽取部分学生进行体能测试，测试结果分为A，B，C，D四个等级。请根据两幅统计图中的信息回答下列问题：

(1) 本次抽样调查共抽取了 50 名学生。

(2) 求测试结果为C等级的学生数，并补全条形图；

(3) 若该中学九年级共有700名学生，请你估计该中学九年级学生中体能测试结果为D等级的学生有多少名？

(4) 若从体能为A等级的2名男生2名女生中随机的抽取2名学生，作为该校培养运动员的重点对象，请用列表法或画树状图的方法求所抽取的两人恰好都是男生的概率。



【分析】(1) 根据A等级的人数和所占的百分比即可求出抽样调查的总人数；

(2) 用总数减去A、B、D中的人数，即可求出C等级的人数，画出条形图即可；

(3) 用九年级共有的学生数乘以D等级所占的比例，即可得出答案；

(4) 画树状图，再由概率公式求解即可.

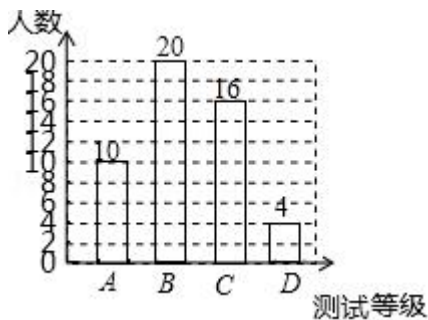
【解答】解：(1)  $10 \div 20\% = 50$  (名)，

即本次抽样调查共抽取了 50 名学生，

故答案为：50；

(2) 测试结果为 C 等级的学生数为：  $50 - 10 - 20 - 4 = 16$  (名)，

故答案为：16，补全条形图如下：



(3)  $700 \times \frac{4}{50} = 56$  (名)，

即估计该中学九年级学生中体能测试结果为 D 等级的学生有 56 名；

(4) 画树状图如图：



共有 12 个等可能的结果，所抽取的两人恰好都是男生的结果有 2 个，

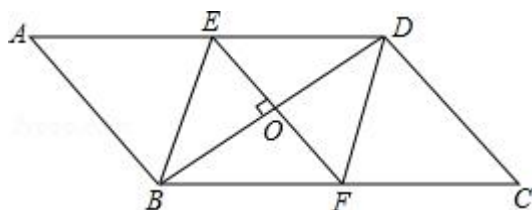
$\therefore$  抽取的两人恰好都是男生的概率  $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

【点评】此题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图和扇形统计图. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

18. (7 分) 如图，EF 是平行四边形 ABCD 的对角线 BD 的垂直平分线，EF 与边 AD、BC 分别交于点 E、F.

(1) 求证：四边形 BFDE 是菱形；

(2) 若  $ED = 5$ ， $BD = 8$ ，求菱形 BFDE 的面积.



**【分析】**(1) 先证明  $\triangle OED \cong \triangle OFB$ ，再利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明四边形  $BEDF$  是平行四边形，然后利用对角线互相垂直的平行四边形是菱形证得答案；

(2) 先利用菱形的性质和勾股定理求得  $EF = 6$ ，再利用菱形的面积等于对角线乘以对角线的一半，即可得出答案．

**【解答】**解：(1) 证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, OB = OD$$

$$\therefore \angle EDO = \angle FBO, \angle OED = \angle OFB$$

$$\therefore \triangle OED \cong \triangle OFB$$

$$\therefore DE = BF$$

$$\text{又} \because ED \parallel BF$$

$$\therefore \text{四边形 } BEDF \text{ 是平行四边形}$$

$$\therefore EF \perp BD$$

$$\therefore \text{四边形 } BFDE \text{ 是菱形；}$$

$$(2) \because \text{四边形 } BFDE \text{ 是菱形, } BD = 8$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}BD = 4$$

$$\therefore ED = 5$$

$$\therefore OE = 3$$

$$\therefore EF = 6$$

$$\therefore \text{菱形 } BFDE \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

答：菱形  $BFDE$  的面积为 24．

**【点评】**本题考查了菱形的判定与性质及菱形的面积计算，熟练掌握相关定理及性质是解题的关键．

19. (7 分) 2020 年突如其来的新型冠状病毒疫情，给生鲜电商带来了意想不到的流量和机遇，据统计某生鲜电商平台 1 月份的销售额是 225 万元，3 月份的销售额是 324 万元．

(1) 若该平台 1 月份到 3 月份的月平均增长率都相同，求月平均增长率是多少？

(2) 经市场调查发现，某水果在“盒马鲜生”平台上的售价为 24 元/千克时，每天能销售 300 千克，售价每降低 2 元，每天可多售出 100 千克，为了推广宣传，商家决定降价促销，同时尽量减少库存，已知该水果的成本价为 12 元/千克，若使销售该水果每天获利 4000 元，则售价应降低多少元？

【分析】(1) 设月平均增长率为  $x$ ，根据该平台 1 月份和 3 月份的销售额，即可得出关于  $x$  的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

(2) 设售价应降低  $y$  元，则每天可售出  $(300 + 50y)$  千克，根据总利润 = 每千克的利润  $\times$  销售数量，即可得出关于  $y$  的一元二次方程，解之取其较大值即可得出结论．

【解答】解：(1) 设月平均增长率为  $x$ ，

依题意，得：  $225(1+x)^2 = 324$ ，

解得：  $x_1 = 0.2 = 20\%$ ，  $x_2 = -2.2$ （不合题意，舍去）．

答：月平均增长率是  $20\%$ ．

(2) 设售价应降低  $y$  元，则每天可售出  $300 + \frac{100y}{2} = (300 + 50y)$  千克，

依题意，得：  $(24 - 12 - y)(300 + 50y) = 4000$ ，

整理，得：  $y^2 - 6y + 8 = 0$ ，

解得：  $y_1 = 2$ ，  $y_2 = 4$ ，

$\therefore$  要尽量减少库存，

$\therefore y = 4$ ．

答：售价应降低 4 元．

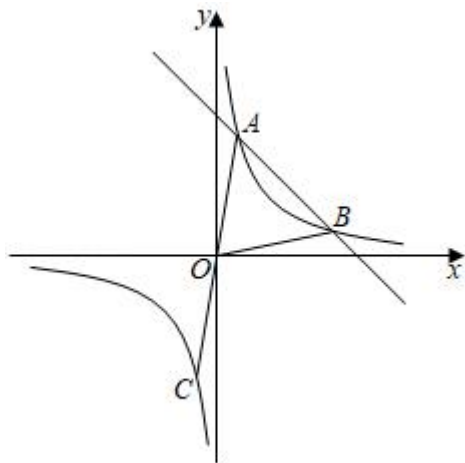
【点评】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

20. (8 分) 如图，一次函数  $y_1 = ax + b$  与反比例函数  $y_2 = \frac{k}{x}$  的图象相交于  $A(2, 8)$ ，  $B(8, n)$  两点，连接  $AO$ ，  $BO$ ， 延长  $AO$  交反比例函数图象于点  $C$ ．

(1) 求一次函数  $y_1$  与反比例函数  $y_2$  的表达式；

(2) 当  $y_1 < y_2$ ， 时， 自变量  $x$  的取值范围为  $x > 8$  或  $0 < x < 2$ ；

(3) 点  $P$  是  $x$  轴上一点， 当  $S_{\triangle PAC} = \frac{4}{5} S_{\triangle AOB}$  时， 请求出点  $P$  的坐标．



【分析】（1）由待定系数法即可得到结论；

（2）根据图象中的信息即可得到结论；

（3）先求得  $D$  的坐标，然后根据  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD}$  求得  $\triangle AOB$  的面积，即可求得

$S_{\triangle PAC} = \frac{4}{5} S_{\triangle AOB} = 24$ ，根据中心对称的性质得出  $OA = OC$ ，即可得到  $S_{\triangle APC} = 2S_{\triangle AOP}$ ，从而得

到  $2 \times \frac{1}{2} OP \times 8 = 24$ ，求得  $OP$ ，即可求得  $P$  的坐标．

【解答】解：（1）将  $A(2, 8)$  代入  $y_2 = \frac{k}{x}$  得  $8 = \frac{k}{2}$ ，解得  $k = 16$ ，

$\therefore$  反比例函数的解析式为  $y = \frac{16}{x}$ ，

把  $B(8, n)$  代入得， $n = \frac{16}{8} = 2$ ，

$\therefore B(8, 2)$ ，

将  $A(2, 8)$ ， $B(8, 2)$  代入  $y = ax + b$  得  $\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 8a + b = 2 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} a = -1 \\ b = 10 \end{cases}$ ，

$\therefore$  一次函数为  $y = -x + 10$ ；

（2）由图象可知，当  $y_1 < y_2$  时，自变量  $x$  的取值范围为： $x > 8$  或  $0 < x < 2$ ，

故答案为  $x > 8$  或  $0 < x < 2$ ；

（3）由题意可知  $OA = OC$ ，

$\therefore S_{\triangle APC} = 2S_{\triangle AOP}$ ，

把  $y = 0$  代入  $y_1 = -x + 10$  得， $0 = -x + 10$ ，解得  $x = 10$ ，

$$\therefore D(10,0),$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 30,$$

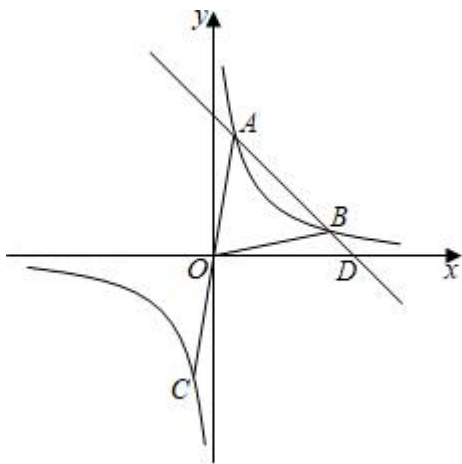
$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{4}{5} S_{\triangle AOB} = \frac{4}{5} \times 30 = 24,$$

$$\therefore 2S_{\triangle AOP} = 24,$$

$$\therefore 2 \times \frac{1}{2} OP \times y_A = 24, \text{ 即 } 2 \times \frac{1}{2} OP \times 8 = 24,$$

$$\therefore OP = 3,$$

$$\therefore P(3,0) \text{ 或 } P(-3,0).$$



【点评】本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，三角形的面积的计算，待定系数法求函数的解析式，数形结合是解题的关键.

21. (8分) 【模型发现】如图1,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , 求证:  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ .

【深入探究】如图2, 等边  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ ,  $D$  是  $AC$  上的动点, 连接  $BD$ , 将  $BD$  绕着点  $D$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $DE$ , 连接  $CE$ , 当点  $D$  从  $A$  运动到  $C$  时, 求点  $E$  的运动路径长.

【应用拓展】如图3, 等腰  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$  于  $D$ ,  $E$  是  $AD$  上的一点, 连接  $BE$ , 将  $BE$  绕着点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $EF$ ,  $EF$  交  $BC$  于点  $G$ , 连接  $CF$ , 若  $EG = \frac{1}{2} FG$ , 则  $\frac{AB}{CF}$  的值为  $-\frac{3}{2}$ .

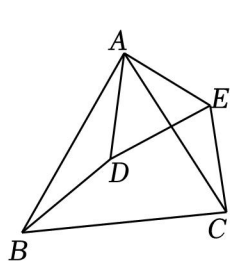


图1

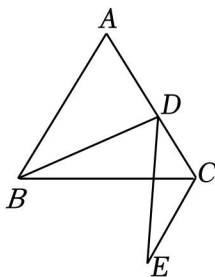


图2

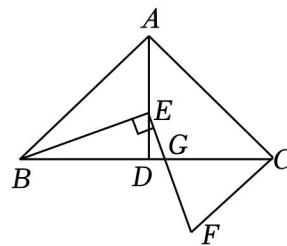


图3

【分析】【模型发现】由相似三角形的性质可得  $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ，利用相似三角形的判定可得结论；

【深入探究】由旋转的性质可得  $BD = DE$ ， $\angle BDE = 60^\circ$ ，由“SAS”可证  $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ ，可得  $AD = CE$ ，即可求解；

【应用拓展】通过证明  $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ ，可得  $CF = \sqrt{2}AE$ ，由等腰直角三角形的性质可求  $AB = \frac{3}{2}\sqrt{2}AE$ ，即可求解。

【解答】【模型发现】证明： $\because \triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE;$$

【深入探究】解：连接  $BE$ ，

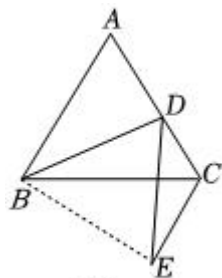


图2

$\because$  将  $BD$  绕着点  $D$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $DE$ ，

$$\therefore BD = DE, \quad \angle BDE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDE$  是等边三角形，

$$\therefore BD = BE, \quad \angle DBE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形，

$$\therefore AB = BC = 3 = AC, \quad \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBE(SAS),$$

$$\therefore AD = CE,$$

$\therefore$  点  $D$  从  $A$  运动到  $C$ ,

$\therefore$  点  $E$  的运动路径长为 3;

【应用拓展】解：如图，连接  $BF$ ，过点  $F$  作  $FH \perp BC$  于点  $H$ ，

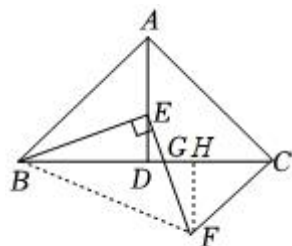


图3

$\therefore$  将  $BE$  绕着点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ ,

$$\therefore BE = EF, \quad \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore BF = \sqrt{2}BE, \quad \angle EBF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC, \quad AD \perp BC,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB, \quad \angle ABC = 45^\circ = \angle EBF = \angle BAD = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBF,$$

$$\text{又} \therefore \frac{BC}{AB} = \sqrt{2} = \frac{BF}{BE},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{CF}{AE} = \sqrt{2}, \quad \angle BCF = \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore FH \perp BC,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle HFC = 45^\circ,$$

$$\therefore HC = HF,$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}HF,$$

$$\therefore HF = AE,$$

$$\therefore AD \perp BC, \quad HF \perp BC,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AD \parallel HF, \\
&\therefore \frac{HF}{DE} = \frac{FG}{EG} = 2, \\
&\therefore HF = 2DE, \\
&\therefore DE = \frac{1}{2}AE, \\
&\therefore AB = \frac{3}{2}\sqrt{2}AE, \\
&\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}AE}{\sqrt{2}AE} = \frac{3}{2}, \\
&\text{故答案为: } \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

【点评】本题是相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，旋转的性质，等腰直角三角形的性质，等边三角形的性质等知识，添加恰当辅助线构造全等三角形或相似三角形是解题的关键。

22. (9分) 如图1，在平面直角坐标系内，直线  $y = -\frac{4}{3}x + 8$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交  $y$  轴于点  $B$ ，交直线  $y = kx$  于第一象限的点  $C$ ，点  $D$  在  $y$  轴上， $AD$  平分  $\angle BAO$ 。

- (1) 点  $D$  的坐标为  (0,3) ；
- (2) 若  $\triangle BOC$  与  $\triangle BAD$  相似，求  $k$  的值；
- (3) 在 (2) 的条件下，如图2，已知点  $M(m, -3)$ ，平移直线  $y = kx$  交  $x$  轴于点  $E$ ，交  $y$  轴于点  $F$ ，平面内是否存在点  $N$ ，使得四边形  $EFMN$  是正方形？若存在，请直接写出  $m$  的值；若不存在，请说明理由。

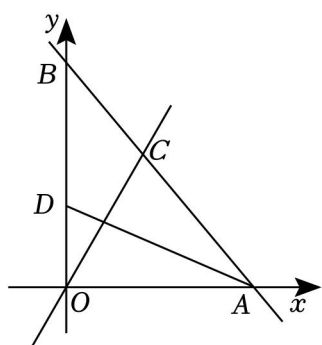


图1

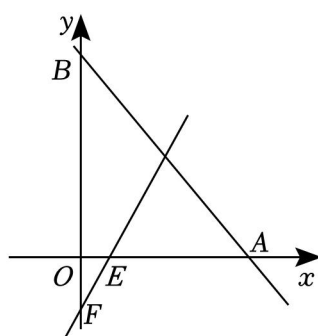
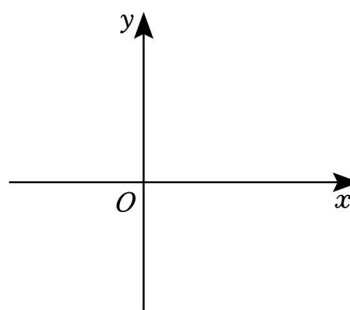


图2



备用图

【分析】(1) 过点  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ，根据角平分线的性质可得  $DE = OD$ ，证明  $\triangle AOD \cong \triangle AED (AAS)$ ，根据全等三角形的性质得  $AE = AO = 6$ ，由勾股定理得  $AB = 10$ ，则

$BD = 8 - OD$ ， $BE = AB - AE = 4$ ，在  $\text{Rt}\triangle BDE$  中，利用勾股定理求出  $BD$ ，可得  $OD$  的值，即可求解；

(2) 若  $\triangle BOC$  与  $\triangle BAD$  相似，点  $C$  在第一象限，可得只有一种情况： $\triangle BOC \sim \triangle BAD$  相似，根据相似三角形的性质求出  $BC = 4$ ，设  $C(a, -\frac{4}{3}a + 8)$ 。根据两点的距离求出  $a$  的值，将点  $C$  的坐标代入  $y = kx$ ，即可求解；

(3) 分三种情况：①点  $F$  在直线  $y = -3$  的上方，②点  $F$  在直线  $y = -3$  的下方，③  $EF$  为对角线时，根据正方形的性质以及全等三角形的判定和性质即可求解。

**【解答】**解：(1)  $\because y = -\frac{4}{3}x + 8$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交  $y$  轴于点  $B$ ，

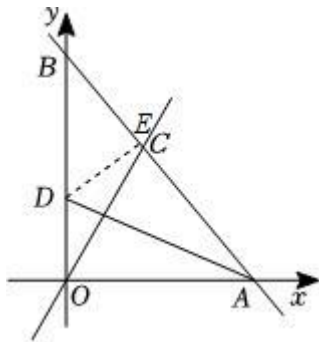
令  $x = 0$ ，则  $y = 8$ ，令  $y = 0$ ，则  $x = 6$ ，

$\therefore A(6, 0)$ ， $B(0, 8)$ ，

$\therefore OA = 6$ ， $OB = 8$ ，

$\therefore AB = 10$ ，

过点  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ，



$\therefore \angle AED = \angle AOD = 90^\circ$ ，

$\therefore AD$  平分  $\angle BAO$ ，

$\therefore DE = OD$ ， $\angle OAD = \angle EAD$ ，

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle AED(AAS)$ ，

$\therefore AE = AO = 6$ ，

$\therefore BE = AB - AE = 4$ ，

在  $\text{Rt}\triangle BDE$  中， $BD^2 = DE^2 + BE^2$ ，

$\therefore (8 - OD)^2 = OD^2 + 4^2$ ，

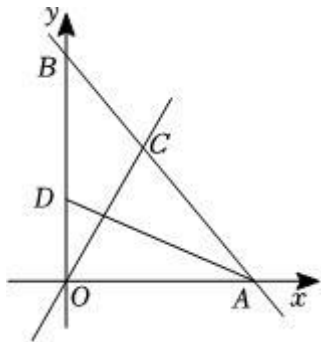
$\therefore OD = 3$ ，

$\therefore D(0,3)$ ;

(2) 若  $\triangle BOC$  与  $\triangle BAD$  相似, 点  $C$  在第一象限,

$\therefore$  只有一种情况:  $\triangle BOC \sim \triangle BAD$  相似,

如图,



$$\therefore \frac{BO}{BA} = \frac{BC}{BD}, \text{ 即 } \frac{8}{10} = \frac{BC}{8-3},$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\text{设 } C(a, -\frac{4}{3}a + 8).$$

$$\therefore BC = \sqrt{a^2 + (8 + \frac{4}{3}a - 8)^2} = 4, \text{ 解得 } a = \pm \frac{12}{5} \text{ (负值不合题意, 舍去),}$$

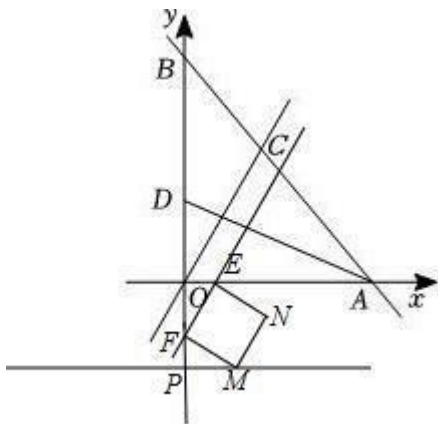
$$\therefore C(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}).$$

$$\text{将点 } C \text{ 的坐标代入 } y = kx \text{ 得, } \frac{12}{5}k = \frac{24}{5},$$

$$\therefore k = 2;$$

(3) 分三种情况:

① 点  $F$  在直线  $y = -3$  的上方, 设直线  $y = -3$  与  $y$  轴交于点  $P$ ,



$\therefore$  四边形  $EFMN$  是正方形,

$$\therefore EF = FM, \angle EFM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFE + \angle PFM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFE + \angle OEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF = \angle PFM,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle FPM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OEF \cong \triangle PFM (AAS),$$

$$\therefore OE = PF, \quad OF = PM,$$

$$\therefore \text{点 } M(m, -3),$$

$$\therefore OF + PF = 3, \quad OF = PM = m,$$

$$\therefore OE = PF = 3 - m,$$

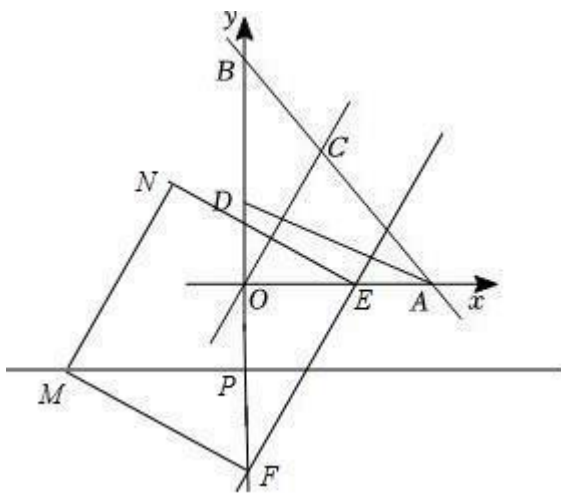
设平移直线  $y = 2x$  得  $y = 2x - n$ ,

$$\therefore E\left(\frac{n}{2}, 0\right), \quad F(0, -m), \quad n = m,$$

$$\therefore 3 - m = \frac{m}{2},$$

$$\therefore m = 2;$$

②点  $F$  在直线  $y = -3$  的下方，设直线  $y = -3$  与  $y$  轴交于点  $P$ ,



同理得  $\triangle OEF \cong \triangle PFM (AAS)$ ,

$$\therefore OE = PF, \quad OF = PM,$$

$$\therefore \text{点 } M(m, -3),$$

$$\therefore OP = 3, \quad OF = OP + PF = -m,$$

$$\therefore OE = PF = -m - 3,$$

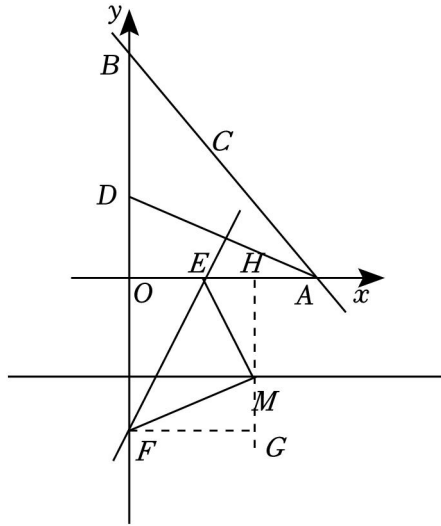
设平移直线  $y = 2x$  得  $y = 2x - n$ ,

$$\therefore E\left(\frac{n}{2}, 0\right), F(0, m), n = -m,$$

$$\therefore -m - 3 = -\frac{m}{2},$$

$$\therefore m = -6;$$

③  $EF$  为对角线时,



同理得  $\triangle MEH \cong \triangle FMG(AAS)$ ,

$$\therefore EH = MG, HM = GF,$$

$$\therefore \text{点 } M(m, -3),$$

$$\therefore HM = GF = 3,$$

$$\therefore m = 3;$$

综上,  $m$  的值为 2 或 -6 或 3.

**【点评】** 本题是一次函数综合题, 考查了一次函数图象上点的坐标特征, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 平移的性质, 正方形的性质, 解题的关键是正确画图, 学会利用数形结合和分类讨论的思想解决问题.