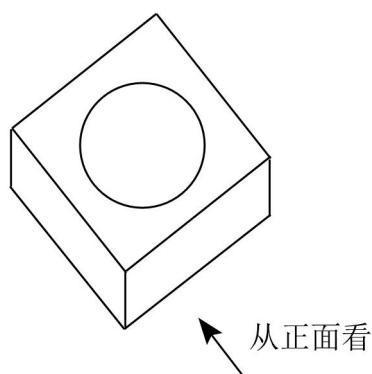


2023 年广东省深圳市龙华区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题有四个选项，其中只有一个是正确的）

1. (3 分) (2023·龙华区二模) 砚台与笔、墨、纸是中国传统的文房四宝，是中国书法的必备用具．如图是一方寓意“规矩方圆”的砚台，它的俯视图是（ ）



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

2. (3 分) (2023·龙华区二模) 在《九章算术》一书中，对开方开不尽的数起了一个名字，叫做“面”，这是中国传统数学对无理数的最早记载，下面符合“面”的描述的数是（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{9}$ D. $\sqrt{16}$

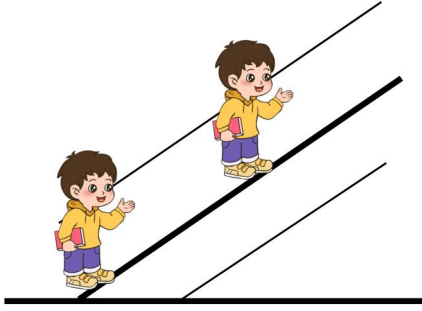
3. (3 分) (2023·龙华区二模) 下列运算正确的是（ ）

- A. $x^2+x^2=x^4$ B. $y^3 \cdot y^2=y^6$
- C. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ D. $(x+y)^2=x^2+y^2$

4. (3 分) (2023·龙华区二模) 农户利用“立体大棚种植技术”把毛豆和芹菜进行混种，已知毛豆齐苗后棚湿在 $18\sim 25^\circ\text{C}$ 最适宜，播种芹菜的最适宜温度是 $15\sim 20^\circ\text{C}$ ．农户在毛豆齐苗后在同一大棚播种了芹菜，这时应该把大棚温度设置在下列哪个范围最适宜（ ）

- A. $15\sim 18^\circ\text{C}$ B. $18\sim 20^\circ\text{C}$ C. $20\sim 25^\circ\text{C}$ D. 20°C 以上

5. (3 分) (2023·龙华区二模) 如图，某商场有一自动扶梯，其倾斜角为 α ，高为 h 米，扶梯的长度是（ ）



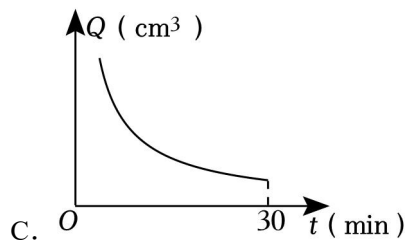
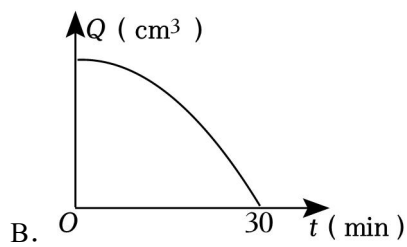
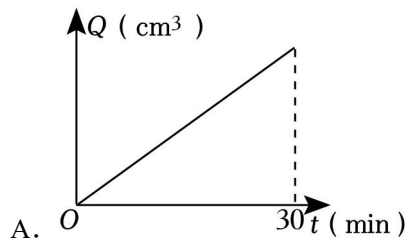
A. $\frac{h}{\tan\alpha}$

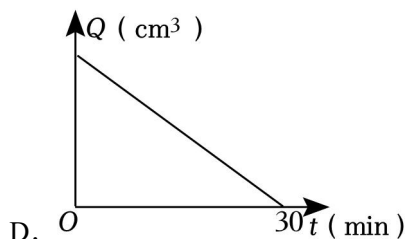
B. $h\cos\alpha$

C. $h\sin\alpha$

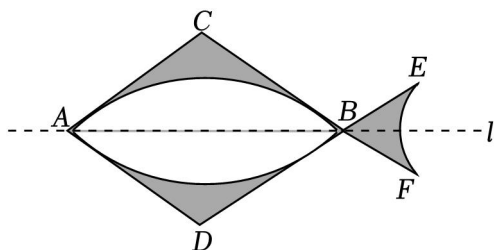
D. $\frac{h}{\sin\alpha}$

6. (3分) (2023·龙华区二模) 如图是小杰同学家中的一个 30min 沙漏计时器，相关实验结果表明，沙漏中的沙下落的速度可以近似看成匀速，从计时器开始计时到计时 30min 止，上面玻璃球内的含沙量 Q (cm^3) 与时间 t (min) 之间的函数关系图象大致为 ()

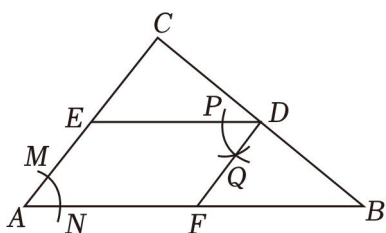




- D. O $30t$ (min)
7. (3分) (2023·龙华区二模) 如图, 这条活灵活现的“小鱼”是由若干条线段组成的, 它是一个轴对称图形, 对称轴为直线 l , 则下列结论不一定正确的是 ()



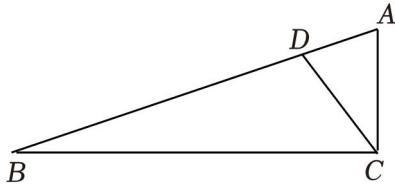
- A. 点 C 和点 D 到直线 l 的距离相等
- B. $BC=BD$
- C. $\angle CAB=\angle DAB$
- D. 四边形 $ADBC$ 是菱形
8. (3分) (2023·龙华区二模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, D , E 分别是 BC , AC 的中点, 连接 DE . 以点 A 为圆心, 适当长度为半径作弧, 分别交 AC , AB 于点 M , N ; 以点 D 为圆心, AM 长为半径作弧交 DE 于点 P ; 以点 P 为圆心, MN 长为半径作弧, 交前面的弧于点 Q ; 作射线 DQ 交 AB 于点 F . 则 AF 的长为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
9. (3分) (2023·舟山模拟) 某公司去年 10 月份的营业额为 2500 万元, 后来公司改变营销策略, 12 月份的营业额达到 3780 万元, 已知 12 月份的增长率是 11 月份的 1.3 倍, 求 11 月份的增长率, 设 11 月份的增长率为 x , 根据题意, 可列方程为 ()

- A. $2500(1+x)(1+1.3x)=3780$
- B. $2500(1+x)^2=3780$
- C. $2500(1+1.3x)^2=3780$
- D. $2500(1+2.3x)=3780$

10. (3分) (2023•龙华区二模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, D 是 AB 上一点, 连接 CD , 若 $\angle ACD=2\angle B$, $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{CD}{BC}$ 的值是 ()

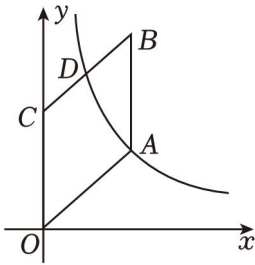


- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

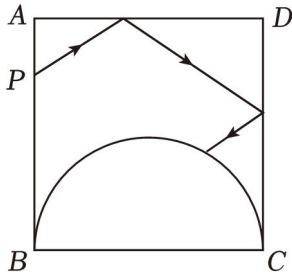
二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3分) (2023•龙华区二模) 计算: $|-5| + \tan 45^\circ =$ _____.
12. (3分) (2023•桐柏县二模) 新学期开始, 小颖从学校开设的感兴趣的 5 门劳动教育课程: 烹饪、茶艺、花卉种植、整理收纳、家电维修中, 随机选择一门课程学习, 她选择“茶艺”课程的概率是 _____.
13. (3分) (2023•龙华区二模) 已知 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ 的解. 则 $m+n =$ _____.

14. (3分) (2023•龙华区二模) 如图, 在平面直角坐标系中, $OA=3$, 将 OA 沿 y 轴向上平移 3 个单位至 CB , 连接 AB , 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象恰好过点 A 与 BC 的中点 D , 则 $k =$ _____.



15. (3分) (2023•龙华区二模) 如图, 在边长为 4 米的正方形场地 $ABCD$ 内, 有一块以 BC 为直径的半圆形红外线接收“感应区”, 边 AB 上的 P 处有一个红外线发射器, 红外线从点 P 发射后, 经 AD 、 CD 上某处的平面镜反射后到达“感应区”, 若 $AP=1$ 米, 当红外线途经的路线最短时, AD 上平面镜的反射点距离点 A _____ 米.



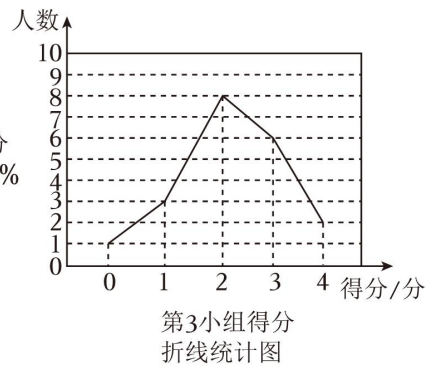
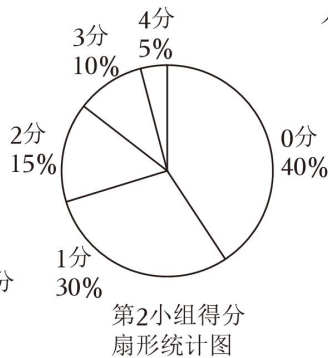
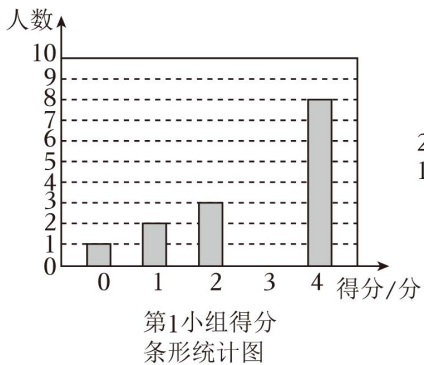
三、解答题（本大题共 7 小题，共 55 分）

16. (6分) (2023·龙华区二模) 解不等式组 $\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ 3(x - 1) < 2x \end{cases}$

17. (6分) (2023·龙华区二模) 先化简、再求值: $\frac{3x}{x^2-1} \div \frac{x+1}{x^2+2x+1} - \frac{2x}{x-1}$, 其中 $x=2$.

18. (8分) (2023·南安市模拟) 为了解九年级学生对某个知识点的掌握程度, 某校对九年级学生以 20 人一组进行了随机分组, 开展了一次素养调研, 并用 SOLO 评分模型进行评分: “完全不理解”记为 0 分, “了解了一个方面”记为 1 分, “了解了几个独立的方面”记为 2 分, “理解了几个方面的相关性”记为 3 分, “能够综合运用”记为 4 分, 现从调查结果中随机抽取了 3 个小组学生的得分, 进行统计分析, 过程如下:

【整理与描述】



(1) 请补全第 1 小组得分条形统计图; 第 2 小组得分扇形统计图中, “得分为 3 分”这一项所对应的圆心角的度数为 _____°;

【分析与估计】

	平均数	众数	中位数
第 1 组	2.9	a	3
第 2 组	b	0	1
第 3 组	2.25	2	c

(2) 由如表填空: $a=$ _____, $b=$ _____, $c=$ _____;

(3) 若该校九年级有 600 名学生, 请你估计该校九年级学生在调研中表现为“能够综合

运用”的人数有 _____人；

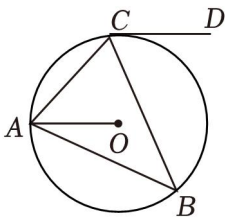
【评价与建议】

(4) 结合你的分析，请给第 2 组的同学提供一条有关该知识点的学习建议。

19. (8分) (2023·龙华区二模) 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，连接 OA ，过点 C 作一条射线 CD 。

(1) 请从以下条件中：① $CD \parallel AO$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ；② $\angle BCD = \angle BAC$ ；③ CB 平分 $\angle ACD$ 。选择一组能证明 CD 是 $\odot O$ 的切线的条件，并写出证明过程；

(2) 若 $OA = 2$ ， $\angle OAB = 22.5^\circ$ ， $AB = CB$ ，求 \widehat{BC} 的长度。(结果保留 π)



20. (8分) (2023·龙华区二模) 随着天气转暖，越来越多的市民喜欢到户外活动，小明与同学约定周末带帐篷到附近露营地开展活动。

【买帐篷】 经了解，某种帐篷有 A 、 B 两种型号，已知 A 型帐篷的单价比 B 型帐篷的单价多 30 元，用 1200 元购买 A 型帐篷的数量和用 900 元购买 B 型帐篷的数量相同。小明买了 A 、 B 两种型号帐篷各 2 个，共需多少钱？

【摆帐篷】 周末，小明与同学一起来到露营地，发现有一块由篱笆围绕的长 20 米，宽 14 米的矩形草地（抽象成如图 2 的 20×14 的方格纸）可用来摆帐篷，经测量，每个帐篷占据的地面部分是半径为 3 米的圆形（抽象成如图 1 的圆），为保障通行，帐篷四周需要留有通道，通道最狭窄处的宽度不小于 1 米。小明将第一个帐篷按要求摆放在如图所示的位置，此块草地内最多还能摆下几个同样大小的帐篷呢？请在图 2 中画出符合要求的设计示意图。（要求：圆心要画在格点上，画圆时要用圆规）

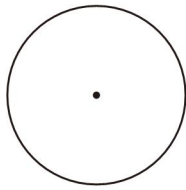


图1

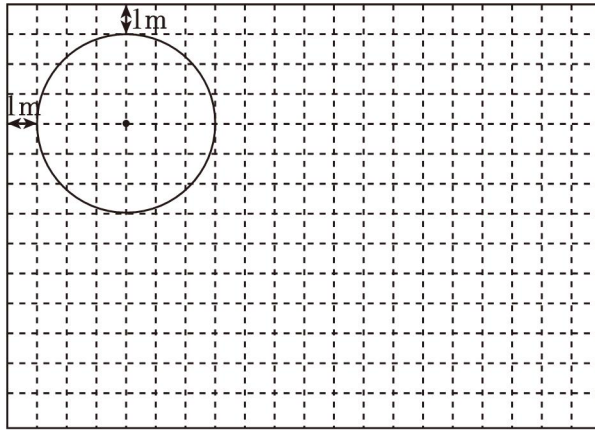


图2

21. (9分) (2023·方城县模拟) 【课本再现】把两个全等的矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 拼成如图1的图案, 则 $\angle ACF =$ _____ $^\circ$;

【迁移应用】如图2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 CD 边上一点 (不与点 C, D 重合), 连接 BE , 将 BE 绕点 E 顺时针旋转 90° 至 FE , 作射线 FD 交 BC 的延长线于点 G , 求证: $CG = BC$;

【拓展延伸】在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 120^\circ$, E 是 CD 边上一点 (不与点 C, D 重合), 连接 BE , 将 BE 绕点 E 顺时针旋转 120° 至 FE , 作射线 FD 交 BC 的延长线于点 G .

① 线段 CG 与 BC 的数量关系是 _____;

② 若 $AB = 6$, E 是 CD 的三等分点, 则 $\triangle CEG$ 的面积为 _____.

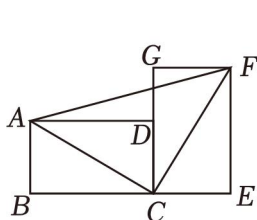


图1

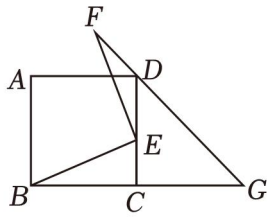
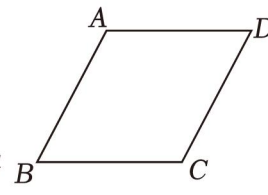


图2



备用图

22. (10分) (2023·龙华区二模) 【定义】若抛物线与一水平直线交于两点, 我们把这两点间线段的长称为抛物线关于这条直线的跨径, 抛物线的顶点到该直线的距离称为抛物线关于这条直线的矢高, 矢高与跨径的比值称为抛物线关于这条直线的矢跨比.

如图1, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 P , $PC \perp x$ 轴于点 C , 它与 x 轴交于点 A, B , 则 AB 的长为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的跨径, PC 的长为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的矢高, $\frac{PC}{AB}$ 的值为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的矢跨比.

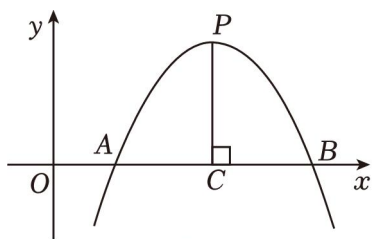


图1

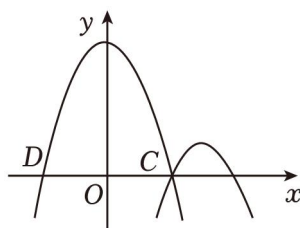


图2

【特例】如图2，已知抛物线 $y = -x^2 + 4$ 与 x 轴交于点 C, D (点 C 在点 D 右侧)；

① 抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高是 _____，跨径是 _____，矢跨比是 _____；

② 有一抛物线经过点 C ，与抛物线 $y = -x^2 + 4$ 开口方向与大小一样，且矢高是抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高的 $\frac{1}{4}$ ，求它关于 x 轴的矢跨比；

【推广】结合抛物线的平移规律可以发现，两条开口方向与大小一样的抛物线，若第一条抛物线的矢高是第二条抛物线关于同一直线的矢高的 k ($k > 0$) 倍，则第一条抛物线的跨径是第二条抛物线关于同一直线的跨径的 _____ 倍 (用含 k 的代数式表示)；

【应用】如图3是某地一座三拱桥梁建筑示意图，其中主跨与边跨的拱轴线为开口方向与大小一样的抛物线，它们关于水平钢梁所在直线的跨径分别为420米与280米，已知主跨的矢跨比为 $\frac{1}{6}$ ，则边跨的矢跨比是 _____。

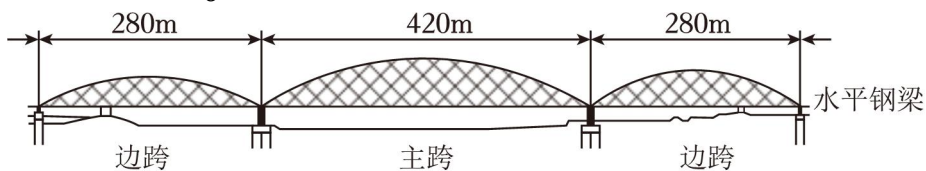


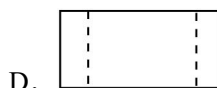
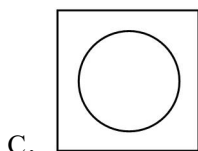
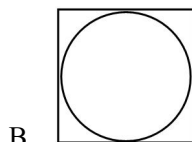
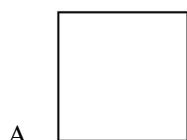
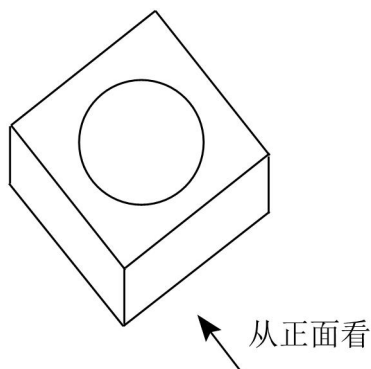
图3

2023 年广东省深圳市龙华区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

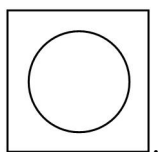
一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题有四个选项，其中只有一个是正确的）

1. (3 分) (2023•龙华区二模) 砚台与笔、墨、纸是中国传统的文房四宝，是中国书法的必备用具．如图是一方寓意“规矩方圆”的砚台，它的俯视图是（ ）



【分析】根据从上面看得到的图象是俯视图，可得答案．

【解答】解：从上边看，可得如图：



故选：C．

【点评】本题考查了简单几何体的三视图，从上面看到的视图是俯视图．

2. (3 分) (2023•龙华区二模) 在《九章算术》一书中，对开方开不尽的数起了一个名字，叫做“面”，这是中国传统数学对无理数的最早记载，下面符合“面”的描述的数是（ ）

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{4}$

C. $\sqrt{9}$

D. $\sqrt{16}$

【分析】根据实数的分类及算术平方根的定义解答即可．

【解答】解：A、 $\sqrt{3}$ 是开方开不尽的数，符合题意；

B、 $\sqrt{4}=2$ ，不符合题意；

C、 $\sqrt{9}=3$ ，不符合题意；

D、 $\sqrt{16}=4$ ，不符合题意.

故选：A.

【点评】 本题考查的是实数，熟知实数的分类及算术平方根的定义是解题的关键.

3. (3分) (2023·龙华区二模) 下列运算正确的是 ()

A. $x^2+x^2=x^4$

B. $y^3 \cdot y^2=y^6$

C. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

D. $(x+y)^2=x^2+y^2$

【分析】 利用合并同类项的法则，同底数幂的乘法的法则，平方差公式，完全平方公式对各项进行运算即可.

【解答】 解：A、 $x^2+x^2=2x^2$ ，故A不符合题意；

B、 $y^3 \cdot y^2=y^5$ ，故B不符合题意；

C、 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ，故C符合题意；

D、 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ，故D不符合题意；

故选：C.

【点评】 本题主要考查整式的混合运算，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

4. (3分) (2023·龙华区二模) 农户利用“立体大棚种植技术”把毛豆和芹菜进行混种，已知毛豆齐苗后棚湿在 $18\sim 25^\circ\text{C}$ 最适宜，播种芹菜的最适宜温度是 $15\sim 20^\circ\text{C}$. 农户在毛豆齐苗后在同一大棚播种了芹菜，这时应该把大棚温度设置在下列哪个范围最适宜 ()

A. $15\sim 18^\circ\text{C}$

B. $18\sim 20^\circ\text{C}$

C. $20\sim 25^\circ\text{C}$

D. 20°C 以上

【分析】 根据题意，设大棚温度为 $t^\circ\text{C}$ ，则 $\begin{cases} 18 \leq t \leq 25 \\ 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$ ，再根据一元一次不等式组的方法，求出这时应该把大棚温度设置在下列哪个范围最适宜即可.

【解答】 解：设大棚温度为 $t^\circ\text{C}$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 18 \leq t \leq 25 \\ 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

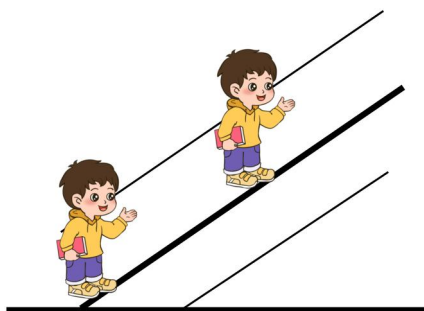
解得 $18 \leq t \leq 20$,

\therefore 这时应该把大棚温度设置在 $18\sim 20^\circ\text{C}$ 最适宜.

故选：B.

【点评】 此题主要考查了解一元一次不等式组的方法，解答此题的关键是要明确：大大取大，小小取小，大小小大中间找，大大小小无处找.

5. (3分) (2023•龙华区二模) 如图, 某商场有一自动扶梯, 其倾斜角为 α , 高为 h 米, 扶梯的长度是 ()



- A. $\frac{h}{\tan\alpha}$ B. $h\cos\alpha$ C. $h\sin\alpha$ D. $\frac{h}{\sin\alpha}$

【分析】 设扶梯的长度为 x 米, 利用正弦的定义得到 $\sin\alpha = \frac{h}{x}$, 然后求出 x 即可.

【解答】 解: 设扶梯的长度为 x 米,

根据题意, $\sin\alpha = \frac{h}{x}$,

解得 $x = \frac{h}{\sin\alpha}$,

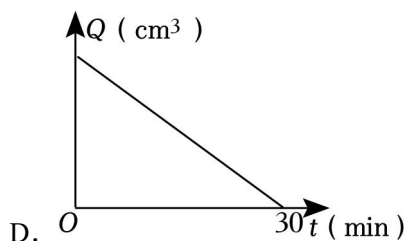
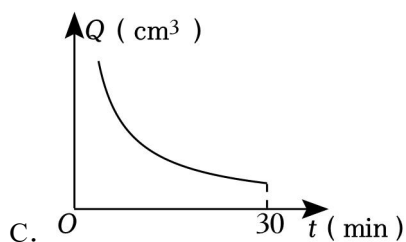
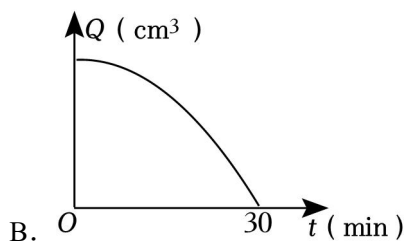
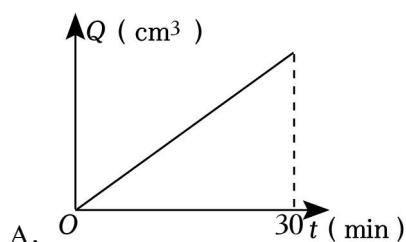
所以扶梯的长度为 $\frac{h}{\sin\alpha}$ 米.

故选: D.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角: 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 它是一个比值, 把坡面与水平面的夹角 α 叫做坡角.

6. (3分) (2023•龙华区二模) 如图是小杰同学家中的一个30min沙漏计时器, 相关实验结果表明, 沙漏中的沙下落的速度可以近似看成匀速, 从计时器开始计时到计时30min止, 上面玻璃球内的含沙量 Q (cm^3) 与时间 t (min) 之间的函数关系图象大致为 ()





【分析】 根据一个 30min 沙漏计时器，沙漏中的沙下落的速度可以近似看成匀速，即上面玻璃球中含沙量会匀速地减少，在 $t=30$ 时，含沙量减少到 0 ，以此即可选择.

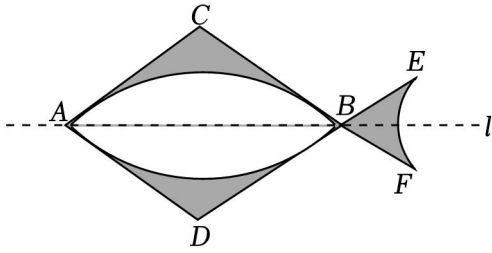
【解答】 解：沙漏中的沙下落的速度可以近似看成匀速，则相同时间内，玻璃球内的含沙量 Q 的减少量相同，

从计时器开始计时到计时 30min 止，上面玻璃球内的含沙量 $Q (\text{cm}^3)$ 与时间 $t (\text{min})$ 之间的函数关系图象大致为一条直线.

故选：D.

【点评】 本题主要考查函数的图象，主要考查了根据实际问题作出函数图象的能力，解题关键是根据题意得出两个变量之间的关系.

7. (3分) (2023•龙华区二模) 如图，这条活灵活现的“小鱼”是由若干条线段组成的，它是一个轴对称图形，对称轴为直线 l ，则下列结论不一定正确的是 ()



- A. 点 C 和点 D 到直线 l 的距离相等
- B. $BC=BD$
- C. $\angle CAB=\angle DAB$
- D. 四边形 $ADBC$ 是菱形

【分析】根据轴对称的性质可得 AB 垂直平分 CD ，可判断 A 选项，根据线段垂直平分线的性质可判断 B 选项，根据等腰三角形的性质可判断 C 选项，根据对角线互相垂直平分的四边形是菱形可判断 D 选项。

【解答】解：连接 CD ，交 AB 于点 O ，
根据轴对称的性质，可得 AB 垂直平分 CD ，

\therefore 点 C 和点 D 到直线 l 的距离相等，

故 A 不符合题意；

$\because AB$ 垂直平分 CD ，

$\therefore BC=BD, AC=AD$ ，

故 B 不符合题意；

$\because AC=AD, AO \perp CD$ ，

$\therefore \angle CAB=\angle DAB$ ，

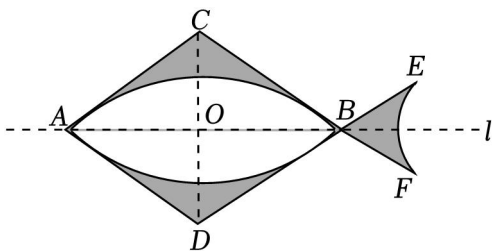
故 C 不符合题意；

\because 点 O 不一定是 AB 的中点，

\therefore 四边形 $ABCD$ 不一定是菱形，

故 D 符合题意，

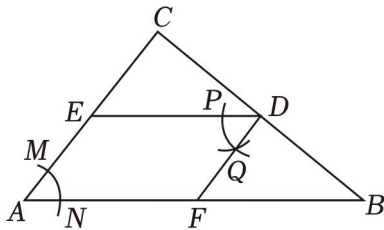
故选： D 。



【点评】本题考查了菱形的判定，轴对称的性质，等腰三角形的判定和性质，线段垂直

平分线，熟练掌握这些知识是解题的关键.

8. (3分) (2023·龙华区二模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, D , E 分别是 BC , AC 的中点, 连接 DE . 以点 A 为圆心, 适当长度为半径作弧, 分别交 AC , AB 于点 M , N ; 以点 D 为圆心, AM 长为半径作弧交 DE 于点 P ; 以点 P 为圆心, MN 长为半径作弧, 交前面的弧于点 Q ; 作射线 DQ 交 AB 于点 F . 则 AF 的长为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】 由勾股定理求出 AB , 根据三角形中位线定理得到 $DE=\frac{1}{2}AB=5$, $DE\parallel AB$, 结合基本作图可证得四边形 $AFDE$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质即可求出 AF .

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\because D, E$ 分别是 BC, AC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB = 5, \quad DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CED = \angle A,$$

由作图可知, $\angle EDF = \angle A$,

$$\therefore \angle CED = \angle EDF,$$

$$\therefore AE \parallel DF,$$

\therefore 四边形 $AFDE$ 是平行四边形,

$$\therefore AF = DE = 5,$$

故选: C.

【点评】 本题主要考查了勾股定理, 三角形的中位线定理, 平行四边形的判定和性质, 平行线的判定和性质, 基本作图, 根据三角形中位线定理, 结合基本作图可证得四边形 $AFDE$ 是平行四边形是解决问题的关键.

9. (3分) (2023·舟山模拟) 某公司去年 10 月份的营业额为 2500 万元, 后来公司改变营销策略, 12 月份的营业额达到 3780 万元, 已知 12 月份的增长率是 11 月份的 1.3 倍, 求 11 月份的增长率, 设 11 月份的增长率为 x , 根据题意, 可列方程为 ()

A. $2500(1+x)(1+1.3x) = 3780$

B. $2500(1+x)^2 = 3780$

C. $2500(1+1.3x)^2 = 3780$

D. $2500(1+2.3x) = 3780$

【分析】设11月份的增长率为 x ，则12月份的增长率是 $1.3x$ ，故11月份的营业额为 $2500(1+x)$ ，12月份的营业额为 $2500(1+x)(1+1.3x)$ ，根据12月份的营业额达到3780万元，即可列方程。

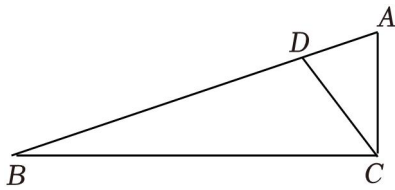
【解答】解：设11月份的增长率为 x ，则12月份的增长率是 $1.3x$ ，故11月份的营业额为 $2500(1+x)$ ，12月份的营业额为 $2500(1+x)(1+1.3x)$ ，依题意可列方程为： $2500(1+x)(1+1.3x) = 3780$ 。

故选：A。

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

10. (3分) (2023·龙华区二模) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是 AB 上一点，

连接 CD ，若 $\angle ACD = 2\angle B$ ， $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{4}$ ，则 $\frac{CD}{BC}$ 的值是 ()



A. $\frac{3}{10}$

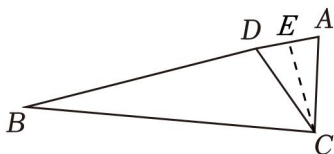
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】作 $\angle ACD$ 的平分线 CE 交 AB 于点 E ，可证明 $\triangle ACE \sim \triangle ABC$ ， $\triangle ACE \cong \triangle DCE$ ，再利用相似三角形的性质和全等三角形的性质，用 AE 的长表示出 CD 和 BC ，从而可求出问题的答案。

【解答】解：作 $\angle ACD$ 的平分线 CE 交 AB 于点 E ，



$\because \angle ACD = 2\angle B$,

$\therefore \angle ACE = \angle DCE = \angle B$,

$\because \angle CAE = \angle BAC$,

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AE \cdot AB,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle DCE, \\ CE = CE, \\ \angle AEC = \angle DEC, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AC = CD, AE = DE = \frac{1}{2}AD,$$

设 $AE = DE = x$,

则 $AD = 2x$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BD = 8x, AB = BD + AD = 10x,$$

$$\therefore AC^2 = x \cdot 10x = 10x^2,$$

$$\therefore CD = AC = \sqrt{10}x,$$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(10x)^2 - 10x^2} = 3\sqrt{10}x,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{10}x}{3\sqrt{10}x} = \frac{1}{3},$$

故选: B.

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 作 $\angle ACD$ 的平分线 CE 构造相似三角形和全等三角形是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3 分) (2023·龙华区二模) 计算: $|-5| + \tan 45^\circ = \underline{6}$.

【分析】 直接利用绝对值的性质以及特殊角的三角函数值分别化简, 进而得出答案.

【解答】 解: 原式 $= 5 + 1$

$= 6$.

故答案为: 6.

【点评】 此题主要考查了实数的运算, 正确化简各数是解题关键.

12. (3 分) (2023·桐柏县二模) 新学期开始, 小颖从学校开设的感兴趣的 5 门劳动教育课

程：烹饪、茶艺、花卉种植、整理收纳、家电维修中，随机选择一门课程学习，她选择

“茶艺”课程的概率是 $\frac{1}{5}$ 。

【分析】直接利用概率公式可得答案。

【解答】解：∵共有烹饪、茶艺、花卉种植、整理收纳、家电维修5门兴趣课程，

∴小颖选择“茶艺”课程的概率是 $\frac{1}{5}$ 。

故答案为： $\frac{1}{5}$ 。

【点评】本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ 。

13. (3分) (2023·龙华区二模) 已知 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ 的解，则 $m+n = \underline{2}$ 。

【分析】把 x 与 y 代入方程组计算即可求出所求。

【解答】解：把 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ 代入方程组得：

$$\begin{cases} m - n = 0 \text{ ①} \\ m + 3n = 4 \text{ ②} \end{cases}$$

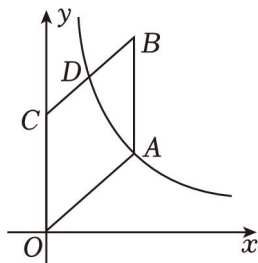
$$\text{①} + \text{②} \text{ 得：} 2m + 2n = 4,$$

$$\text{即：} m + n = 2,$$

故答案为：2。

【点评】此题考查了二元一次方程组的解，方程组的解即为能使方程组中两方程都成立的未知数的值。

14. (3分) (2023·龙华区二模) 如图，在平面直角坐标系中， $OA=3$ ，将 OA 沿 y 轴向上平移3个单位至 CB ，连接 AB ，若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象恰好过点 A 与 BC 的中点 D ，则 $k = \underline{2\sqrt{5}}$ 。



【分析】设 $A(m, n)$ ，则由题意 $B(m, n+3)$ ，进而求得 $D(\frac{m}{2}, \frac{n+6}{2})$ ，根据反比例函数系数 $k=xy$ ，得到 $k=mn = \frac{m}{2} \cdot \frac{n+6}{2}$ ，解得 $n=2$ ，利用勾股定理求得 m 的值，得到 $A(\sqrt{5}, 2)$ 。

2), 代入解析式即可求得 k 的值.

【解答】解: 设 $A(m, n)$, 则 $B(m, n+3)$,

\because 点 D 是 BC 的中点, $C(0, 3)$,

$$\therefore D\left(\frac{m}{2}, \frac{n+6}{2}\right),$$

\because 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象恰好过点 A 与 BC 的中点 D ,

$$\therefore k = mn = \frac{m}{2} \cdot \frac{n+6}{2},$$

解得 $n = 2$,

$$\therefore A(m, 2),$$

$$\because OA = 3,$$

$$\therefore m^2 + 2^2 = 3^2,$$

$$\therefore m = \sqrt{5} \text{ (负数舍去)},$$

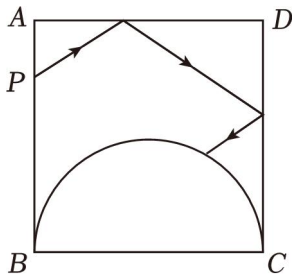
$$\therefore A(\sqrt{5}, 2),$$

$$\therefore k = \sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5},$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 坐标与图形变化 - 平移, 能够根据题意表示出 A 、 D 的坐标是解题的关键.

15. (3分) (2023·龙华区二模) 如图, 在边长为 4 米的正方形场地 $ABCD$ 内, 有一块以 BC 为直径的半圆形红外线接收“感应区”, 边 AB 上的 P 处有一个红外线发射器, 红外线从点 P 发射后, 经 AD 、 CD 上某处的平面镜反射后到达“感应区”, 若 $AP = 1$ 米, 当红外线途经的路线最短时, AD 上平面镜的反射点距离点 A $\frac{6}{5}$ 米.



【分析】 根据题意画出相应的辅助线, 然后根据两点之间线段最短, 找出最短路径, 再根据正方形的性质和相似三角形的判定和性质, 可以求得当红外线途经的路线最短时, AD 上平面镜的反射点距离点 A 的距离.

【解答】解: 作点 P 关于 AD 的对称点 P' , 作半圆 O 关于 CD 的对称半圆 O' , 连接 P'

O' ，与 AD 交于点 M ，与 CD 交于点 N ，与半圆 O' 交于点 Q ，则 PQ 的长就是红外线途经的最短路线，

\because 正方形 $ABCD$ 的边长为 4 米， $AP=1$ 米，

$\therefore \angle P'BO' = 90^\circ$ ， $AP' = 1$ 米， $AB=4$ 米， $BC=4$ 米， $CO' = OQ' = 2$ 米，

$\therefore P'B=5$ 米， $BO' = 6$ 米，

$\because AM \parallel BC$ ，

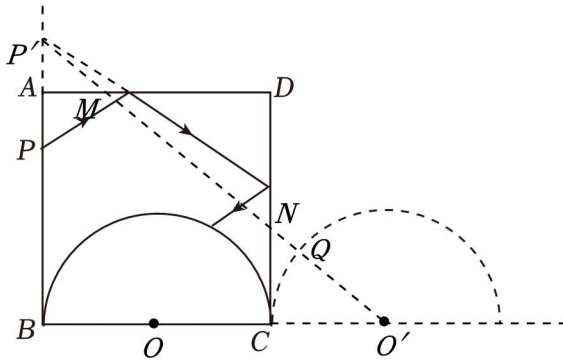
$\therefore \triangle P'AM \sim \triangle P'BO'$ ，

$$\therefore \frac{P'A}{P'B} = \frac{AM}{BO'}$$

$$\text{即 } \frac{1}{5} = \frac{AM}{6}$$

$$\text{解得 } AM = \frac{6}{5}$$

故答案为： $\frac{6}{5}$ 。



【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质、最短路径、轴对称、正方形的性质，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

三、解答题（本大题共 7 小题，共 55 分）

16. (6 分) (2023·龙华区二模) 解不等式组 $\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ 3(x - 1) < 2x \end{cases}$

【分析】 按照解一元一次不等式组的步骤，进行计算即可解答。

【解答】 解： $\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \text{ ①} \\ 3(x - 1) < 2x \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得： $x \geq -2$ ，

解不等式②得： $x < 3$ ，

\therefore 不等式组的解集为： $-2 \leq x < 3$ 。

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握解一元一次不等式组的步骤是解题的关键。

17. (6分) (2023·龙华区二模) 先化简、再求值: $\frac{3x}{x^2-1} \div \frac{x+1}{x^2+2x+1} - \frac{2x}{x-1}$, 其中 $x=2$.

【分析】 先把分式的分子、分母因式分解, 根据分式的除法法则把除法变成乘法, 再算乘法, 最后代入求出答案即可.

【解答】 解: 原式 = $\frac{3x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x+1} - \frac{2x}{x-1}$

$$= \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x-1}$$

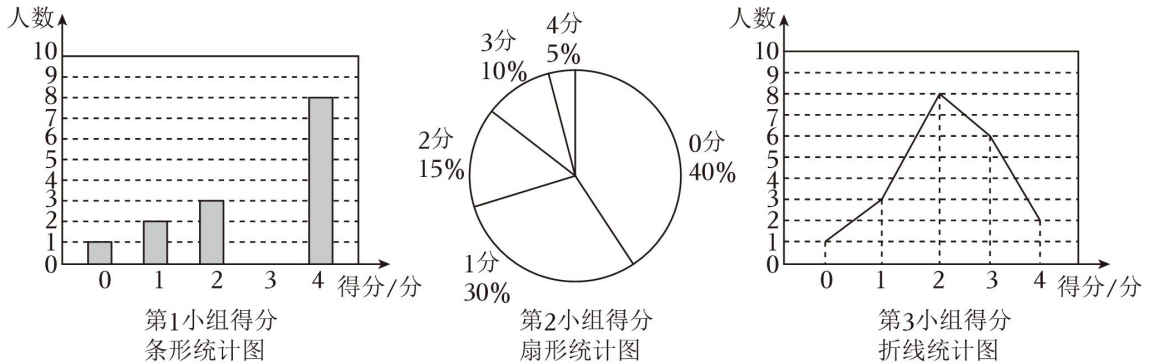
$$= \frac{x}{x-1},$$

当 $x=2$ 时, 原式 = $\frac{2}{2-1} = 2$.

【点评】 本题考查了分式的化简求值, 能正确根据分式的运算法则进行化简是解此题的关键, 注意运算顺序.

18. (8分) (2023·南安市模拟) 为了解九年级学生对某个知识点的掌握程度, 某校对九年级学生以 20 人一组进行了随机分组, 开展了一次素养调研, 并用 SOLO 评分模型进行评分: “完全不理解” 记为 0 分, “了解了一个方面” 记为 1 分, “了解了几个独立的方面” 记为 2 分, “理解了几个方面的相关性” 记为 3 分, “能够综合运用” 记为 4 分, 现从调查结果中随机抽取了 3 个小组学生的得分, 进行统计分析, 过程如下:

【整理与描述】



(1) 请补全第 1 小组得分条形统计图; 第 2 小组得分扇形统计图中, “得分为 3 分” 这一项所对应的圆心角的度数为 36°;

【分析与估计】

	平均数	众数	中位数
第 1 组	2.9	a	3
第 2 组	b	0	1

第3组	2.25	2	c
-----	------	---	-----

(2) 由如表填空： $a = \underline{4}$ ， $b = \underline{1.1}$ ， $c = \underline{2}$ ；

(3) 若该校九年级有 600 名学生，请你估计该校九年级学生在调研中表现为“能够综合运用”的人数有 110 人；

【评价与建议】

(4) 结合你的分析，请给第 2 组的同学提供一条有关该知识点的学习建议。

【分析】(1) 根据各组频数之和等于样本容量求出“得分为 3 分”的频数即可补全条形统计图，根据“得分为 3 分”所占的百分比即可求出相应的圆心角的度数；

(2) 根据中位数、平均数、众数的定义进行计算即可；

(3) 求出九年级学生在调研中表现为“能够综合运用”的人数所占的百分比即可；

(4) 根据第 2 组各个分数的人数及所占的百分比，提出相应的建议即可。

【解答】解：(1) 第 1 小组得分条形统计图中，“得分为 3 分”这一项的人数为 $20 - 1 - 2 - 3 - 8 = 6$ (人)，所以补全的条形统计图如下：

第 2 小组得分扇形统计图中，“得分为 3 分”这一项所对应的圆心角的度数为 $360^\circ \times 10\% = 36^\circ$ ，

故答案为：36；

(2) 第 1 小组得分出现次数最多的是 4 分，共出现 8 次，因此众数是 4 分，即 $a = 4$ ；

第 2 小组得分的平均数 $b = 1 \times 30\% + 2 \times 15\% + 3 \times 10\% + 4 \times 5\% = 1.1$ ；

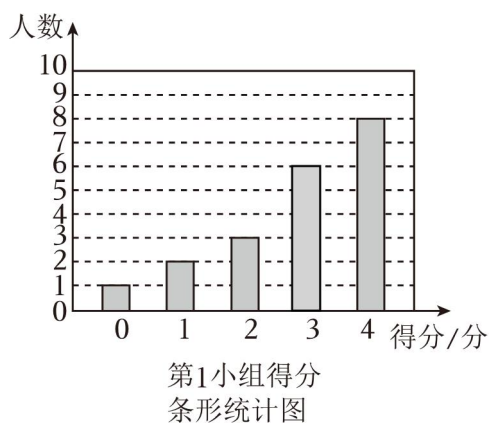
第 3 小组得分出现次数最多的是 2 分，共出现 8 次，因此众数是 2，即 $c = 2$ ；

故答案为：4，1.1，2；

(3) $600 \times \frac{8 + 20 \times 5\% + 2}{20 + 20 + 20} = 110$ (人)，

故答案为：110；

(4) 第 2 小组的学生得 0 分的占 40%，接近一半的同学完全不理解”，因此要加强对知识的学习和巩固。



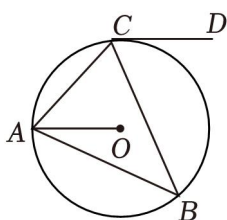
【点评】本题考查条形统计图、扇形统计图，中位数、众数、平均数，掌握频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$ ，

中位数、众数、平均数的计算方法是解决问题的前提。

19. (8分) (2023·龙华区二模) 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，连接 OA ，过点 C 作一条射线 CD 。

(1) 请从以下条件中：① $CD \parallel AO$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ；② $\angle BCD = \angle BAC$ ；③ CB 平分 $\angle ACD$ 。选择一组能证明 CD 是 $\odot O$ 的切线的条件，并写出证明过程；

(2) 若 $OA = 2$ ， $\angle OAB = 22.5^\circ$ ， $AB = CB$ ，求 \widehat{BC} 的长度。(结果保留 π)



【分析】(1) 选择①，利用圆周角定理，平行线的性质得出 $OC \perp CD$ 即可；

(2) 求出弧 BC 所对圆心角的度数，利用弧长公式进行计算即可。

【解答】(1) 证明：选择① $CD \parallel AO$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

连接 OC ，则 $\angle AOC = 2\angle ABC = 90^\circ$ ，即 $OC \perp OA$ ，

$\because CD \parallel AO$ ，

$\therefore OC \perp CD$ ，

$\because OC$ 是半径，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线；

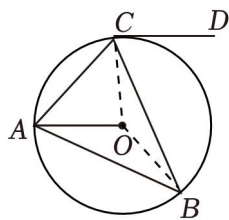
(2) 解：连接 OB ，

$\because AB = CB$ ， $OB = OB$ ， $OA = OC$ ，

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB$ (SSS)，

$\therefore \angle ABO = \angle CBO = \angle OAB = 22.5^\circ$ ， $\angle BOC = \angle AOB = 180^\circ - 22.5^\circ - 22.5^\circ = 135^\circ$ ，

$$\therefore \widehat{BC} \text{ 的长为 } \frac{135\pi \times 2}{180} = \frac{3\pi}{2}.$$



【点评】 本题考查切线的判断和性质，弧长的计算以及圆周角定理，掌握切线的判断方法、圆周角定理以及弧长的计算方法是正确解答的前提.

20. (8分) (2023·龙华区二模) 随着天气转暖，越来越多的市民喜欢到户外活动，小明与同学约定周末带帐篷到附近露营地开展活动.

【买帐篷】 经了解，某种帐篷有 A、B 两种型号，已知 A 型帐篷的单价比 B 型帐篷的单价多 30 元，用 1200 元购买 A 型帐篷的数量和用 900 元购买 B 型帐篷的数量相同. 小明买了 A、B 两种型号帐篷各 2 个，共需多少钱？

【摆帐篷】 周末，小明与同学一起来到露营地，发现有一块由篱笆围绕的长 20 米，宽 14 米的矩形草地（抽象成如图 2 的 20×14 的方格纸）可用来摆帐篷，经测量，每个帐篷占据的地面部分是半径为 3 米的圆形（抽象成如图 1 的圆），为保障通行，帐篷四周需要留有通道，通道最狭窄处的宽度不小于 1 米. 小明将第一个帐篷按要求摆放在如图所示的位置，此块草地内最多还能摆下几个同样大小的帐篷呢？请在图 2 中画出符合要求的设计示意图.（要求：圆心要画在格点上，画圆时要用圆规）

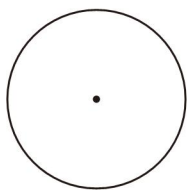


图1

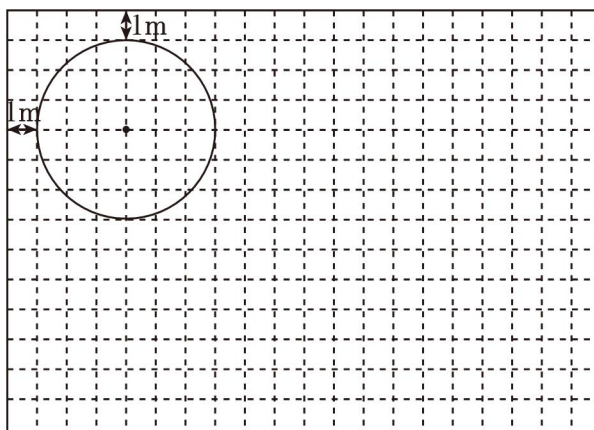


图2

【分析】 (1) 根据题意列方程求解；

(2) 根据圆与圆之间的关系作图.

【解答】 解：(1) 设 A 种型号帐篷的单价分别是 x 元，则 B 型号的帐篷的单价为 $(x - 30)$

元,

由题意得: $\frac{1200}{x} = \frac{900}{x-30}$,

方程两边同乘以 $x(x-30)$ 得: $1200(x-30) = 900x$,

解这个整式方程得: $x=120$,

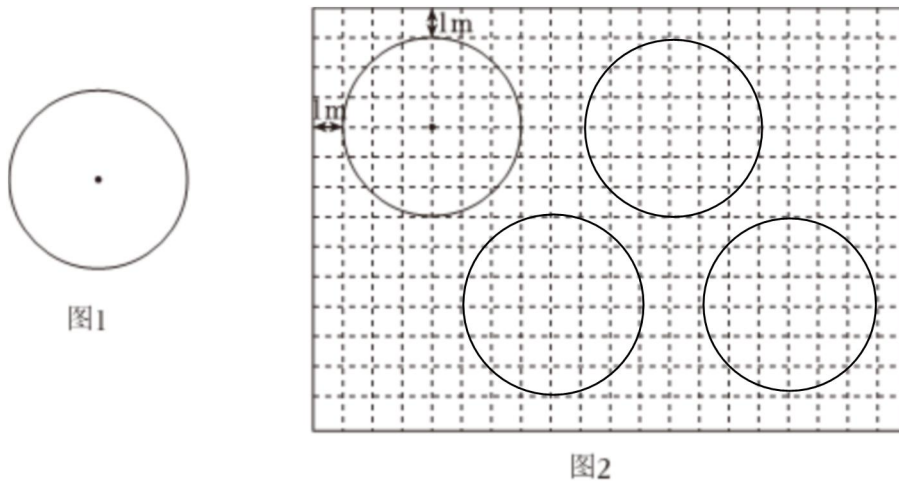
经检验: $x=120$ 是原分式方程的解,

$\therefore x-30=90$,

$\therefore 2 \times (90+120) = 420$ (元),

答: 小明买了 A 、 B 两种型号帐篷各 2 个, 共需 420 元;

(2) 如图:



【点评】 本题考查了作图的应用与设计, 掌握圆与圆之间的关系是解题的关键.

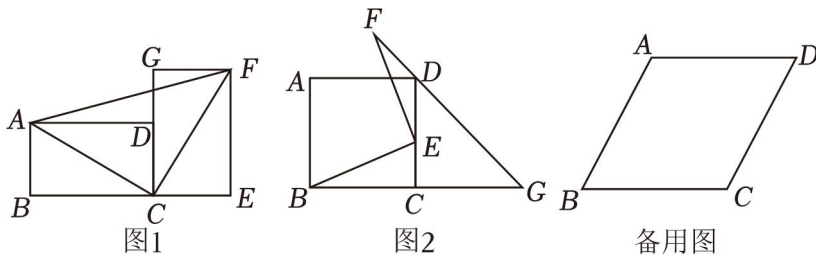
21. (9分) (2023·方城县模拟) **【课本再现】** 把两个全等的矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 拼成如图 1 的图案, 则 $\angle ACF = \underline{90}^\circ$;

【迁移应用】 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 CD 边上一点 (不与点 C, D 重合), 连接 BE , 将 BE 绕点 E 顺时针旋转 90° 至 FE , 作射线 FD 交 BC 的延长线于点 G , 求证: $CG=BC$;

【拓展延伸】 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A=120^\circ$, E 是 CD 边上一点 (不与点 C, D 重合), 连接 BE , 将 BE 绕点 E 顺时针旋转 120° 至 FE , 作射线 FD 交 BC 的延长线于点 G .

① 线段 CG 与 BC 的数量关系是 $\underline{CG = \frac{1}{2}BC}$;

② 若 $AB=6$, E 是 CD 的三等分点, 则 $\triangle CEG$ 的面积为 $\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } 3\sqrt{3}}$.



【分析】【课本再现】根据矩形的性质得出 $AB=CE$, $BC=EF$, $\angle B=\angle E=90^\circ$, 根据 SAS 推出 $\triangle ABC \cong \triangle CEF$, 根据全等得出 $\angle BAC=\angle FCE$, $AC=CF$, 求出 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形, 即可得出答案;

【迁移应用】由 AAS 证明 $\triangle BEC \cong \triangle EFH$, 得到 $FH=EC$, $EH=BC$, 即 $EH=CD$, 从而可得 $CE=DH=FH$, 可得 $\angle CDG=\angle FDH=45^\circ$, 可知 $\triangle DCG$ 是等腰直角三角形, 即可得出结论;

【拓展延伸】①由 AAS 证明 $\triangle BEC \cong \triangle EFH$, 得到 $\angle H=\angle BCD=120^\circ$, $EH=BC$, $FH=CE$, 由 $CD=EH$ 证明 $DH=CE$, 可得到 $\angle FDH=30^\circ$, 再由 $\angle DCG=60^\circ$ 可知 $\triangle DCG$ 是直角三角形, 由直角三角形的性质即可得出结论;

②当 $CE=\frac{1}{3}CD$ 时, 根据 $\triangle CEG$ 和 $\triangle DCG$ 底边 CE 、 CD 边上的高相等可知 $S_{\triangle CEG}=\frac{1}{2}S_{\triangle DCG}$, 即可求得 CG 、 DG 的长, 从而可得 $\triangle CEG$ 的面积; 当 $ED=\frac{1}{3}CD$ 时, 可得 $S_{\triangle CEG}=\frac{2}{3}S_{\triangle DCG}$, 同理可求解.

【解答】【课本再现】解: \because 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 是全等的矩形,

$$\therefore AB=CE, BC=EF, \angle B=\angle E=90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CEF (SAS),$$

$$\therefore \angle BAC=\angle FCE, AC=CF,$$

$$\because \angle B=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC+\angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB+\angle FCE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF=90^\circ,$$

故答案为: 90.

【迁移应用】证明: 过点 F 作 $FH \perp CD$, 交 CD 的延长线于 H ,

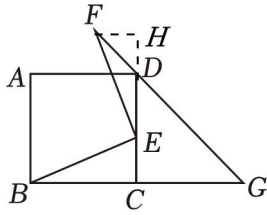


图2

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $CB=CD$, $\angle BCD=90^\circ$,

∴ $\angle H=\angle BCD=90^\circ$,

由旋转得 $\angle BEF=90^\circ$, $EF=BE$,

∴ $\angle BEC+\angle CBE=\angle BEC+\angle FEH=90^\circ$,

∴ $\angle CBE=\angle FEH$,

∴ $\triangle BEC\cong\triangle EFH$ (AAS),

∴ $FH=EC$, $EH=BC$,

∴ $EH=CD$, 即 $CE+DE=DH+DE$,

∴ $CE=DH=FH$,

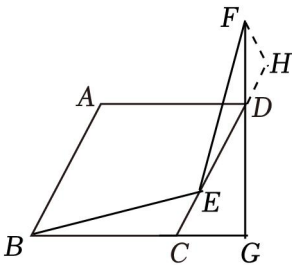
∴ $\angle CDG=\angle FDH=45^\circ$,

∵ $\angle DCG=\angle BCD=90^\circ$,

∴ $\triangle DCG$ 是等腰直角三角形,

∴ $CG=CD=BC$;

【拓展延伸】解: ① 过点 F 作 $\angle EFH=\angle BEC$, 与 ED 的延长线交于点 H ,



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $CB=CD$, $\angle A=\angle BCD=120^\circ$,

由旋转得 $\angle BEF=120^\circ$, $EF=BE$,

∴ $\angle BEC+\angle CBE=\angle BEC+\angle FEH=60^\circ$,

∴ $\angle CBE=\angle FEH$,

∴ $\triangle BEC\cong\triangle EFH$ (AAS),

$$\therefore \angle H = \angle BCD = 120^\circ, EH = BC, FH = CE,$$

$$\therefore CD = EH,$$

$$\therefore DH = CE,$$

$$\therefore DH = FH,$$

$$\therefore \angle FDH = \angle DFH = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CDG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCG = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle G = 90^\circ,$$

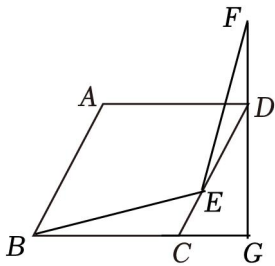
$\therefore \triangle DCG$ 是直角三角形,

$$\therefore \angle CDG = 30^\circ,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BC,$$

故答案为: $CG = \frac{1}{2}BC$;

$$\textcircled{2} \text{ 当 } CE = \frac{1}{3}CD \text{ 时, } CE = \frac{1}{3}AB = 2,$$



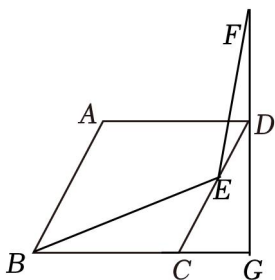
$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 知, } CG = \frac{1}{2}CD = 3,$$

$$\therefore DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$\therefore \triangle CEG$ 和 $\triangle DCG$ 底边 CE 、 CD 边上的高相等,

$$\therefore S_{\triangle CEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle DCG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}CG \cdot DG = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

当 $ED = \frac{1}{3}CD$ 时, $ED = \frac{1}{3}AB = 2$, 则 $CE = 6 - 2 = 4$,



$$\therefore DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$\because \triangle CEG$ 和 $\triangle DCG$ 底边 CE 、 CD 边上的高相等，

$$\therefore S_{\triangle CEG} = \frac{2}{3}S_{\triangle DCG} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}CG \cdot DG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3};$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $3\sqrt{3}$.

【点评】 本题是四边形综合题，考查了全等三角形的判定和性质，旋转的性质，矩形的性质，菱形的性质，勾股定理等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

22. (10分) (2023·龙华区二模) **【定义】** 若抛物线与一水平直线交于两点，我们把这两点间线段的长称为抛物线关于这条直线的跨径，抛物线的顶点到该直线的距离称为抛物线关于这条直线的矢高，矢高与跨径的比值称为抛物线关于这条直线的矢跨比.

如图 1，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 P ， $PC \perp x$ 轴于点 C ，它与 x 轴交于点 A ， B ，则 AB 的长为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的跨径， PC 的长为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的矢高， $\frac{PC}{AB}$ 的值为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴的矢跨比.

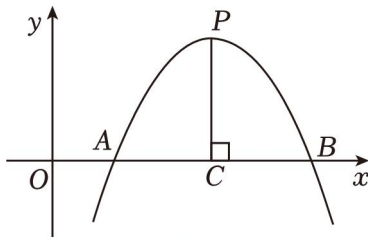


图1

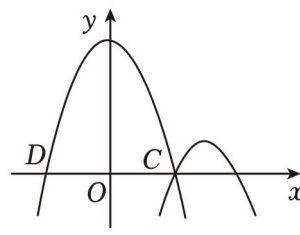


图2

【特例】 如图 2，已知抛物线 $y = -x^2 + 4$ 与 x 轴交于点 C ， D (点 C 在点 D 右侧)；

① 抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高是 4，跨径是 4，矢跨比是 1；

② 有一抛物线经过点 C ，与抛物线 $y = -x^2 + 4$ 开口方向与大小一样，且矢高是抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高的 $\frac{1}{4}$ ，求它关于 x 轴的矢跨比；

【推广】 结合抛物线的平移规律可以发现，两条开口方向与大小一样的抛物线，若第一条抛物线的矢高是第二条抛物线关于同一直线的矢高的 k ($k > 0$) 倍，则第一条抛物线的跨径是第二条抛物线关于同一直线的跨径的 \sqrt{k} 倍 (用含 k 的代数式表示)；

【应用】 如图 3 是某地一座三拱桥梁建筑示意图，其中主跨与边跨的拱轴线为开口方向与大小一样的抛物线，它们关于水平钢梁所在直线的跨径分别为 420 米与 280 米，已知主跨的矢跨比为 $\frac{1}{6}$ ，则边跨的矢跨比是 $\frac{1}{9}$.

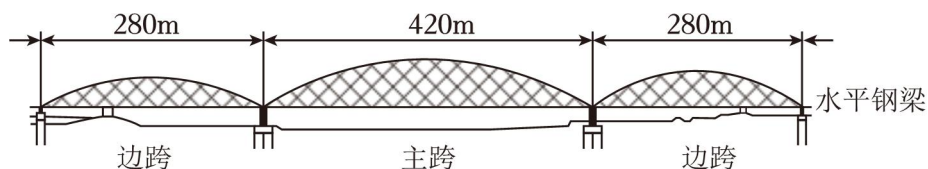


图3

【分析】【特例】①利用抛物线的解析式求得点 C, D 的坐标，利用矢高，跨径，矢跨比的定义解答即可；

②利用待定系数法求得该抛物线的解析式，利用解析式求得它与 x 轴的交点，再利用矢跨比的定义解答即可；

【推广】利用【特例】解答中的规律解答即可；

【应用】建立恰当的坐标系，利用待定系数法求得主跨对应的抛物线的解析式和边跨对应的抛物线的解析式，利用配方法求得边跨对应的抛物线的顶点坐标，再利用矢跨比的定义解答即可。

【解答】解：【特例】①∵抛物线的顶点为 $(0, 4)$ ，

∴抛物线的顶点到 x 轴的距离为 4，

∴抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高是 4；

令 $y = 0$ ，则 $-x^2 + 4 = 0$ ，

解得： $x = -2$ 或 $x = 2$ ，

∴ $C(2, 0)$ ， $D(-2, 0)$ ，

∴ $CD = 4$ ，

∴抛物线关于 x 轴的跨径为 4；

∴矢跨比是 $\frac{4}{4} = 1$ 。

故答案为：4；4；1；

②∵新抛物线关于 x 轴的矢高是抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高的 $\frac{1}{4}$ ，抛物线 $y = -x^2 + 4$ 关于 x 轴的矢高是 4，

∴新抛物线关于 x 轴的矢高为 1，

即新抛物线的顶点的纵坐标为 1，

∵抛物线经过点 C ，与抛物线 $y = -x^2 + 4$ 开口方向与大小一样，

∴设新抛物线的解析式为 $y = -(x+a)^2 + 1$ ，

将 $C(2, 0)$ 代入得： $-(2+a)^2 + 1 = 0$ ，

解得： $a = -1$ （不合题意，舍去）或 $a = -3$ 。

∴新抛物线的解析式为 $y = -(x-3)^2 + 1 = -x^2 + 6x - 8$,

令 $y=0$, 则 $-x^2 + 6x - 8 = 0$,

解得: $x=2$ 或 $x=4$,

∴新抛物线与 x 轴交于点 $(2, 0)$ 和 $(4, 0)$,

∵ $4 - 2 = 2$,

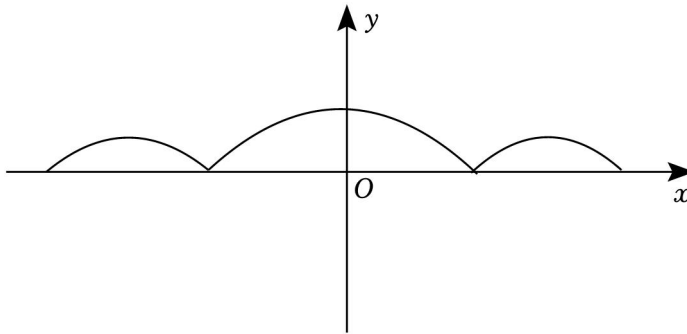
∴新抛物线关于 x 轴的跨径 2,

∴新抛物线关于 x 轴的矢跨比为 $\frac{1}{2}$;

【推广】两条开口方向与大小一样的抛物线, 若第一条抛物线的矢高是第二条抛物线关于同一直线的矢高的 k ($k > 0$) 倍, 则第一条抛物线的跨径是第二条抛物线关于同一直线的跨径的 \sqrt{k} 倍;

故答案为: \sqrt{k} ;

【应用】建立如图所示的坐标系,



∴主跨的矢跨比为 $\frac{1}{6}$,

∴主跨对应的抛物线的顶点的纵坐标为 $420 \times \frac{1}{6} = 70$,

设主跨对应的抛物线的解析式为 $y = mx^2 + 70$,

∴主跨对应的抛物线与 x 轴交于点 $(-210, 0)$ 和 $(210, 0)$,

∴ $210^2 m + 70 = 0$,

∴ $m = -\frac{1}{630}$,

∴主跨对应的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{630}x^2 + 70$,

∴主跨与边跨的拱轴线为开口方向与大小一样的抛物线,

∴设边跨对应的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{630}x^2 + bx + c$,

∴边跨对应的抛物线与 x 轴交于点 $(210, 0)$, $(490, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{630} \times 210^2 + 210b + c = 0 \\ -\frac{1}{630} \times 490^2 + 490b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{10}{9} \\ c = -\frac{490}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{边跨对应的抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{630}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{490}{3}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{630}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{490}{3} = -\frac{1}{630}(x - 350)^2 + \frac{280}{9},$$

$$\therefore \text{边跨对应的抛物线的顶点坐标为 } \left(350, \frac{280}{9}\right),$$

$$\therefore \text{边跨对应的抛物线关于 } x \text{ 轴的矢高是 } \frac{280}{9},$$

$$\therefore \text{边跨的矢跨比是 } \frac{\frac{280}{9}}{280} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{9}.$$

【点评】 本题主要考查了二次函数的图象与性质，抛物线上点的坐标的特征，配方法，待定系数法，本题是新定义型，理解并熟练运用新定义是解题的关键。