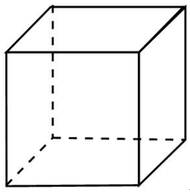
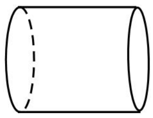
2023年广东省深圳市罗湖区中考数学二模试卷

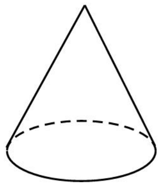
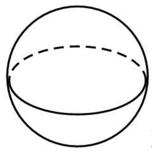
一、单选题（每小题3分，共30分）

1．（3分）（2021•武汉）实数3的相反数是（　　）

A．3　　B．﹣3　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

2．（3分）（2019•邵阳）下列立体图形中，俯视图与主视图不同的是（　　）

A．正方体　　B．圆柱

C．圆锥　　D．球

3．（3分）（2023•罗湖区二模）为了解某地一天内的气温变化情况，比较适合使用的统计图是（　　）

A．条形统计图　　B．折线统计图

C．扇形统计图　　D．频数分布直方图

4．（3分）（2023•罗湖区二模）港珠澳大桥是世界最长的跨海大桥，其中主体工程“海中桥隧”长达35.578公里，整个大桥造价超过720亿元人民币．数“720亿”用科学记数法可表示为（　　）

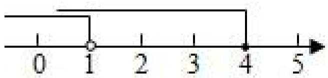
A．7.2×10^{2}　　B．7.2×10^{3}　　C．7.2×10^{10}　　D．7.2×10^{11}

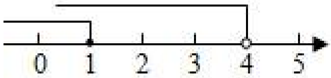
5．（3分）（2023•罗湖区二模）下列运算正确的是（　　）

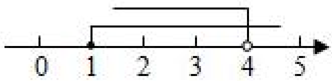
A．$(a-1)^{2}=a^{2}-1$　　B．$(a^{2})^{2}=a^{5}$

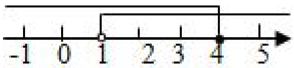
C．$a^{3}\times a^{4}=a^{7}$　　D．$a^{6}\div a^{3}=a^{2}$

6．（3分）（2020•河池）不等式组$\begin{cases}x+1>2\\2x-4\leq x\end{cases}$的解集在数轴上表示正确的是（　　）

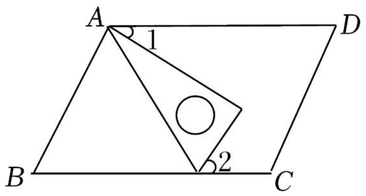
A．

B．

C. 

D. 

7.（3 分）（2023•罗湖区二模）小明在学习平行线的性质后，把含有 60° 角的直角三角板摆放在四边形 $ABCD$ 上，如图，$AD\parallel BC$，若∠2＝70°，则∠1＝（　　）



A．22°　　B．20°　　C．25°　　D．30°

8.（3 分）（2023•罗湖区二模）下列事件中是不可能事件的是（　　）

A．对角线相等且互相平分的四边形是矩形

B．平分弦的直径垂直于弦

C．将抛物线 $y=-2x^2$ 平移可以得到抛物线 $y=2x^2+1$

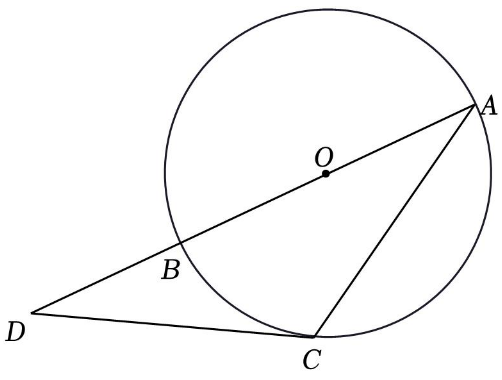
D．圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等

9.（3 分）（2023•罗湖区二模）我国古代《算法统宗》里有这样一首诗："我问开店李三公，众客都来到店中，一房七客多七客，一房九客一房空．"诗中后两句的意思是：如果每一间客房住 7 人，那么有 7 人无房住；如果每一间客房住 9 人，那么就空出一间客房．设该店有客房 x 间、房客 y 人，下列方程组中正确的是（　　）

A．$\begin{cases}7x+7=y\\9(x-1)=y\end{cases}$　　B．$\begin{cases}7x+7=y\\9(x+1)=y\end{cases}$

C．$\begin{cases}7x-7=y\\9(x-1)=y\end{cases}$　　D．$\begin{cases}7x-7=y\\9(x+1)=y\end{cases}$

10.（3 分）（2023•罗湖区二模）如图，AB 为圆 O 的直径，C 为圆 O 上一点，过点 C 作圆 O 的切线交 AB 的延长线于点 D，$DB=\frac{1}{3}AD$，连接 AC，若 AB＝8，则 AC 的长度为（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　　　B．$2\sqrt{5}$　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．$4\sqrt{5}$

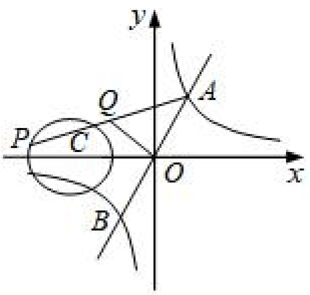
二、填空题（每小题3分，共15分）

11．（3分）（2021•济南）因式分解：a^2-9＝_________________．

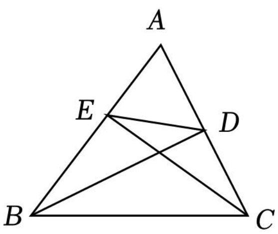
12．（3分）（2023•罗湖区二模）习近平总书记在党的二十大报告中强调："青年强，则国家强"．小明同学将"青""年""强""则""国""家""强"这7个字，分别书写在大小、形状完全相同的7张卡片上，从中随机抽取一张，则这张卡片上恰好写着"强"字的概率是 ___________________．

13．（3分）（2017•淄博）已知α，β是方程$x^2-3x-4=0$的两个实数根，则$\alpha^2+\alpha\beta-3\alpha$的值为_______．

14．（3分）（2023•罗湖区二模）如图，一次函数$y=2x$与反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象交于点A，B，点P在以C（﹣2，0）为圆心，1为半径的$\odot C$上，Q是AP的中点，若OQ长的最大值为$\frac{3}{2}$，则k的值为_____________________．



15．（3分）（2023•罗湖区二模）如图，在锐角三角形ABC中，$\tan A=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{5}$，线段BD、CE分别是AC、AB边上的高线，连接DE，则三角形ADE面积的最大值是 _____________________．

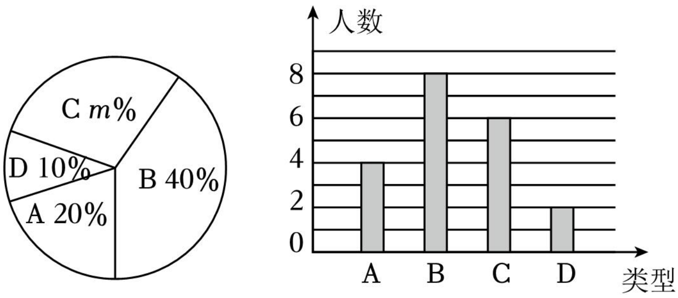


三、解答题（第16题5分，第17题7分，第18题8分，第19题8分，第20题8分，第21题9分，第22题10分）

16．（5分）（2023•罗湖区二模）$-1^2+|1-tan60°|-(3+\sqrt{3})^0+(-\frac{1}{2})^{-2}$．

17．（7分）（2023•罗湖区二模）先化简，再求值：（$\frac{a+b}{a-b}-1$）÷$\frac{b^2}{a^2-ab}$，其中$a=\sqrt{2}$，$b=2$．

18．（8 分）（2023•罗湖区二模）某校 500 名学生参加植树活动，要求每人植 4～7 棵，活动结束后随机调查了部分学生每人的植树量，并分为四种类型，A：4 棵，B：5 棵，C：6 棵，D：7 棵．将各类的人数绘制成如下的扇形统计图和条形统计图．



（1)本次接受随机调查的学生人数为 ______名，扇形统计图中 m 的值为 ______；

（2）本次调查获取的样本数据的平均数为 ______，众数为 ______，中位数为 ______；

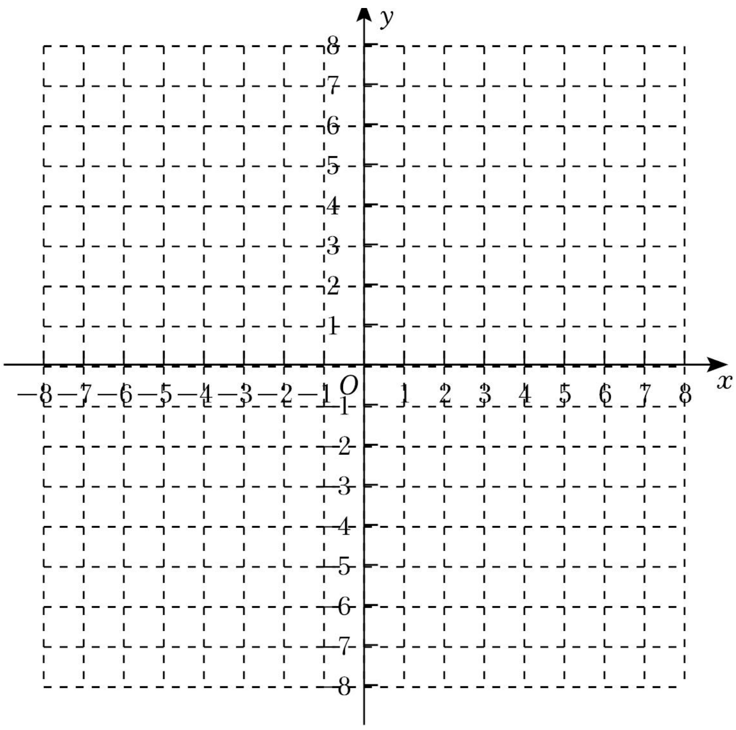
（3）根据样本数据，估计这 500 名学生共植树多少棵．

19．（8 分）（2023•罗湖区二模）“双减”政策受到各地教育部门的积极响应，某校为增加学生的课外活动实践，现决定增购两种体育器材：跳绳和毽子．已知跳绳的单价比毽子的单价多 3 元，用 800 元购买的跳绳数量和用 500 元购买的毽子数量相同．

（1）求跳绳和毽子的单价分别是多少元？

（2）学校计划购买跳绳和毽子两种器材共 600 个，且要求跳绳的数量不少于毽子数量的 3 倍，跳绳的数量不多于 452 根，请问有几种购买方案并指出哪种方案学校花钱最少．

20．（8 分）（2023•罗湖区二模）在初中函数学习中，我们经历了列表、描点、连线画函数图象，结合图象研究函数性质并对其性质进行应用的过程．小丽同学学习二次函数后，对函数 $y=x^2-2|x|$（自变量 x 可以是任意实数）图象与性质进行了探究．请同学们阅读探究过程并解答：



（1）作图探究：

①如表是 y 与 x 的几组对应值：

X	…	－4	－3	－2	－1	0	1	2	3	4	…
y	…	8	3	0	m	0	－1	0	n	8	…

m＝_________，n＝_______；

②在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组对应值为坐标的点，并根据描出的点，画出该函数的图象：

（2）深入思考：

根据所作图象，回答下列问题：

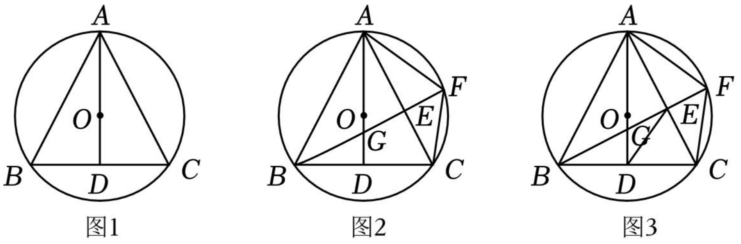
①方程 $x^2-2|x|=0$ 的解是 ___________________；

②如果 $y=x^2-2|x|$的图象与直线 $y=k$ 有 4 个交点，则 k 的取值范围是 _____________；

（3）延伸思考：

将函数 $y=x^2-2|x|$的图象经过怎样的平移可得到 $y_1=(x+1)^2-2|x+1|-2$ 的图象？请写出平移过程．

21．（9 分）（2023•罗湖区二模）如图 1，已知：△ABC 内接于圆 O，$AB=AC$，连接 AO 并延长，交 BC 于点 D．



（1）求证：$AD\perp BC$；

（2）如图 2，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，交圆 O 于点 F，交 AD 于点 G，连接 AF、CF，求证：$AG=AF$；

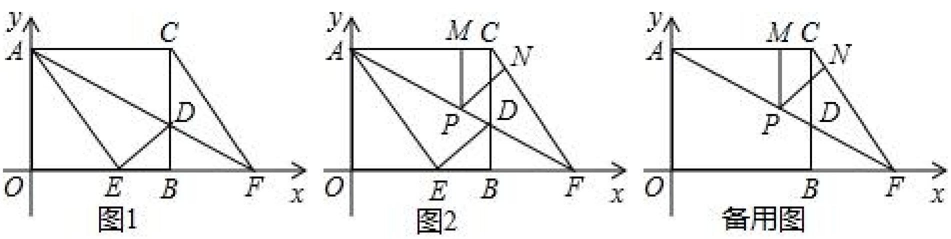
（3）如图 3，在（2）的条件下，连接 DE，$CF=5$，$AF=3\sqrt{5}$，求 DE 的长．

22．（10 分）（2023•罗湖区二模）如图，矩形 $AOBC$ 的顶点 B，A 分别在 x 轴，y 轴上，点 C 坐标是（5，4），D 为 BC 边上一点，将矩形沿 AD 折叠，点 C 落在 x 轴上的点 E 处，AD 的延长线与 x 轴相交于点 F．

（1）如图 1，求点 D 的坐标；

（2）如图 2，若 P 是 AF 上一动点，$PM\perp AC$ 交 AC 于 M，$PN\perp CF$ 交 CF 于 N，设 $AP=t$，$FN=s$，求 s 与 t 之间的函数关系式；

（3）在（2）的条件下，是否存在点 P，使△PMN 为等腰三角形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



2023年广东省深圳市罗湖区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（每小题3分，共30分）

1．（3分）（2021•武汉）实数3的相反数是（　　）

A．3　　　　B．﹣3　　　　C．$\frac{1}{3}$　　　　D．$-\frac{1}{3}$

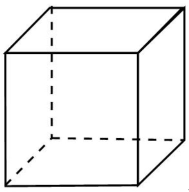
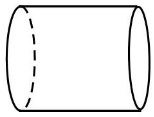
【分析】直接利用相反数的定义分析得出答案．

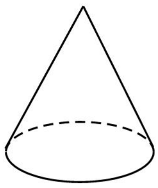
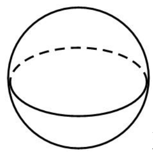
【解答】解：实数3的相反数是：﹣3．

故选：B．

【点评】此题主要考查了实数的性质，正确掌握相反数的定义是解题关键．

2．（3分）（2019•邵阳）下列立体图形中，俯视图与主视图不同的是（　　）

A．正方体　　　　B．圆柱

C．圆锥　　　　D．球

【分析】从正面看所得到的图形是主视图，从左面看到的图形是左视图，从上面看到的图象是俯视图．

【解答】解：A．俯视图与主视图都是正方形，故选项A不合题意；

B．俯视图与主视图都是长方形，故选项B不合题意；

C．俯视图是圆，主视图是三角形，故选项C符合题意；

D．俯视图与主视图都是圆，故选项D不合题意；

故选：C．

【点评】此题主要考查了三视图，关键是把握好三视图所看的方向．属于基础题，中考常考题型．

3．（3分）（2023•罗湖区二模）为了解某地一天内的气温变化情况，比较适合使用的统计图是（　　）

A．条形统计图　　　　B．折线统计图

C．扇形统计图　　　　　　　　　　　D．频数分布直方图

【分析】根据题意中的“变化情况”直接选择折线统计图．

【解答】解：∵为了解某地一天内的气温变化情况，

∴应选择的统计图是折线统计图，

故选：B．

【点评】本题考查了条形统计图，扇形统计图，折线统计图，频数分布直方图的概念，根据实际选择合适的统计图，根据题意中的“变化情况”选择统计图是解题的关键．折线统计图用折线的起伏表示数据的增减变化情况不仅可以表示数量的多少，而且可以反映数据的增减变化情况．

4．（3 分）（2023•罗湖区二模）港珠澳大桥是世界最长的跨海大桥，其中主体工程“海中桥隧”长达 35.578 公里，整个大桥造价超过 720 亿元人民币．数“720 亿”用科学记数法可表示为（　　）

A．7.2×10^{2}　　　B．7.2×10^{3}　　　C．7.2×10^{10}　　　D．7.2×10^{11}

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant10$ 时，n 是正整数；当原数的绝对值<1 时，n 是负整数．

【解答】解：720 亿$=72000000000=7.2\times10^{10}$．

故选：C．

【点评】本题考查了科学记数法的表示方法，掌握形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$ 是关键．

5．（3 分）（2023•罗湖区二模）下列运算正确的是（　　）

A．$(a-1)^{2}=a^{2}-1$　　　　　　　B．$(a^{2})^{2}=a^{5}$

C．$a^{3}\times a^{4}=a^{7}$　　　　　　　　　D．$a^{6}\div a^{3}=a^{2}$

【分析】根据完全平方公式、幂的乘方、同底数幂的乘除法则逐项判断即可．

【解答】解：A，$(a-1)^{2}=a^{2}-2a+1$，故 A 项错误，不符合题意；

B，$(a^{2})^{2}=a^{2\times2}=a^{4}$，故 B 项错误，不符合题意；

C，$a^{3}\times a^{4}=a^{3+4}=a^{7}$，故 C 项正确，符合题意；

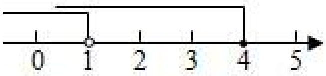
D，$a^{6}\div a^{3}=a^{6-3}=a^{3}$，故 D 项错误，不符合题意；

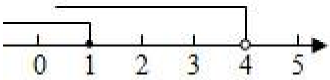
故选：C．

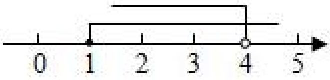
【点评】本题考查了完全平方公式、幂的乘方、同底数幂的乘除法则，掌握幂的乘方和

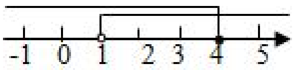
同底数幂的乘除法则运算法则是关键．

6．（3 分）（2020•河池）不等式组$\begin{cases}x+1>2\\2x-4\leq x\end{cases}$的解集在数轴上表示正确的是（　　）

A．

B．

C．

D．

【分析】首先解出两个不等式的解集，再根据大小小大中间找确定不等式组的解集．

【解答】解：$\begin{cases}x+1>2①\\2x-4\leq x②\end{cases}$，

由①得：$x>1$，

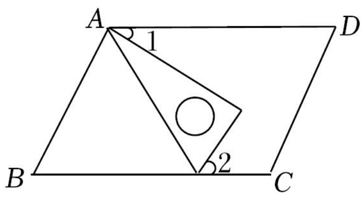
由②得：$x\leq 4$，

不等式组的解集为：$1<x\leq 4$，

故选：D．

【点评】此题主要考查了一元一次不等式组的解法，关键是正确确定两个不等式的解集．

7．（3 分）（2023•罗湖区二模）小明在学习平行线的性质后，把含有 60°角的直角三角板摆放在四边形 $ABCD$ 上，如图，$AD\parallel BC$，若$\angle 2=70°$，则$\angle 1=$（　　）



A．22°　　　　B．20°　　　　C．25°　　　　D．30°

【分析】根据“两直线平行，同旁内角互补”求解即可．

【解答】解：如图，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAM+\angle AMC=180°$，

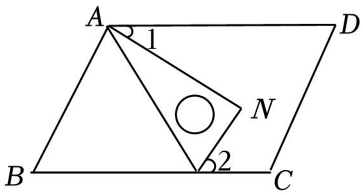
即$\angle 1+30°+60°+\angle 2=180°$，

∴$\angle 1+\angle 2=90°$，

∵∠2＝70°，

∴∠1＝20°，

故选：B．



【点评】此题考查了平行线的性质，熟记平行线的性质定理是解题的关键．

8．（3 分）（2023•罗湖区二模）下列事件中是不可能事件的是（　　）

A．对角线相等且互相平分的四边形是矩形

B．平分弦的直径垂直于弦

C．将抛物线 $y=-2x^2$ 平移可以得到抛物线 $y=2x^2+1$

D．圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等

【分析】根据矩形的判定、垂径定理、抛物线的平移、切线长定理判断即可．

【解答】解：A、对角线相等且互相平分的四边形是矩形，是必然事件，不符合题意；

B、平分弦的直径垂直于弦，是随机事件，不符合题意；

C、将抛物线 $y=-2x^2$ 平移可以得到抛物线 $y=2x^2+1$，是不可能事件，符合题意；

D、圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，是必然事件，不符合题意；

故选：C．

【点评】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念．必然事件指在一定条件下，一定发生的事件．不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．

9．（3 分）（2023•罗湖区二模）我国古代《算法统宗》里有这样一首诗："我问开店李三公，众客都来到店中，一房七客多七客，一房九客一房空．"诗中后两句的意思是：如果每一间客房住 7 人，那么有 7 人无房住；如果每一间客房住 9 人，那么就空出一间客房．设该店有客房 x 间、房客 y 人，下列方程组中正确的是（　　）

A．$\begin{cases}7x+7=y\\9(x-1)=y\end{cases}$　　B．$\begin{cases}7x+7=y\\9(x+1)=y\end{cases}$

C．$\begin{cases}7x-7=y\\9(x-1)=y\end{cases}$　　D．$\begin{cases}7x-7=y\\9(x+1)=y\end{cases}$

【分析】设该店有客房 x 间，房客 y 人；根据题意一房七客多七客，一房九客一房空得出方程组即可．

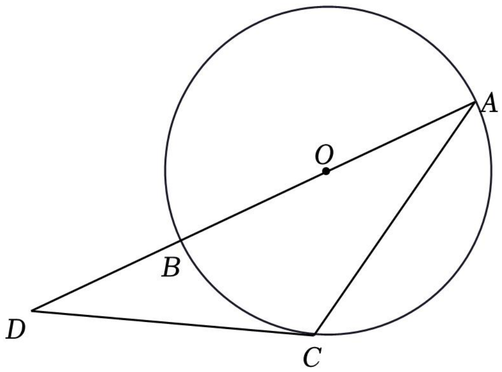
【解答】解：设该店有客房 x 间，房客 y 人；

根据题意得：$\begin{cases}7x+7=y\\9(x-1)=y\end{cases}$，

故选：A．

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用；根据题意得出方程组是解决问题的关键．

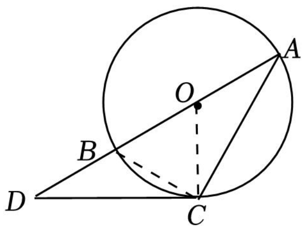
10．（3 分）（2023•罗湖区二模）如图，AB 为圆 O 的直径，C 为圆 O 上一点，过点 C 作圆 O 的切线交 AB 的延长线于点 D，$DB=\frac{1}{3}AD$，连接 AC，若 $AB=8$，则 AC 的长度为（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{5}$

【分析】根据$DB=\frac{1}{3}AD$，AB 为圆 O 的直径可得 $OA=OB=DB$，结合 DC 是圆 O 的切线即可得到$\angle OCD=90°$，即可得到 $CB=OB$，根据勾股定理即可得到答案．

【解答】解：连接 OC，BC，



$\because DB=\frac{1}{3}AD$，$AB$ 为圆 O 的直径，

$\therefore OA=OB=DB$，$\angle ACB=90°$，

$\because DC$ 是圆 O 的切线，

$\therefore \angle OCD=90°$，

$\because OB=DB$，

$\therefore CB=OB$，

$\because AB=8$，

$\therefore BC=4$，

在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

故选：C．

【点评】本题考查圆周角定理，勾股定理，直角三角形斜边上的中线等于斜边一半，解题的关键是求出 BC．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

11．（3 分）（2021•济南）因式分解：a^2-9＝<u>（a+3）（$a-3$）</u>．

【分析】a^2-9 可以写成 a^2-3^2，符合平方差公式的特点，利用平方差公式分解即可．

【解答】解：a^2-9＝（a+3）（$a-3$）．

【点评】本题考查了公式法分解因式，熟记平方差公式的结构特点是解题的关键．

12．（3 分）（2023•罗湖区二模）习近平总书记在党的二十大报告中强调："青年强，则国家强"．小明同学将"青""年""强""则""国""家""强"这 7 个字，分别书写在大小、形状完全相同的 7 张卡片上，从中随机抽取一张，则这张卡片上恰好写着"强"字的概率是 <u>$\frac{2}{7}$</u>．

【分析】根据概率公式计算即可．

【解答】解：根据 7 张卡片中，恰好写着"强"字的有两张，

∴从中随机抽取一张，则这张卡片上恰好写着"强"字的概率是$\frac{2}{7}$．

故答案为：$\frac{2}{7}$．

【点评】此题考查了简单概率计算，熟练掌握概率公式是解题的关键．

13．（3 分）（2017•淄博）已知α，β是方程 $x^2-3x-4=0$ 的两个实数根，则$\alpha^2+\alpha\beta-3\alpha$的值为<u>0</u>．

【分析】利用α是方程 $x^2-3x-4=0$ 的实数根得到$\alpha^2-3\alpha=4$，再根据根与系数的关系得到得$\alpha\beta=-4$，然后利用整体代入的方法计算即可．

【解答】解：∵α是方程 $x^2-3x-4=0$ 的实数根，

∴$\alpha^2-3\alpha-4=0$，

即$\alpha^2-3\alpha=4$，

∵$\alpha\beta=-4$，

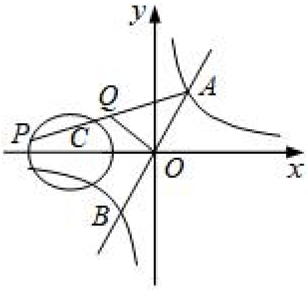
∴原式＝4－4

＝0．

故答案为 0．

【点评】本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

14．（3 分）（2023•罗湖区二模）如图，一次函数 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象交于点 A，B，点 P 在以 C（﹣2，0）为圆心，1 为半径的⊙C 上，Q 是 AP 的中点，若 OQ 长的最大值为$\frac{3}{2}$，则 k 的值为__$\frac{32}{25}$__.



【分析】作辅助线，先确定 OQ 长的最大时，点 P 的位置，当 BP 过圆心 C 时，BP 最长，设 B（t，$2t$），则 $CD=t-(-2)=t+2$，$BD=-2t$，根据勾股定理计算 t 的值，可得 k 的值．

【解答】解：连接 BP，

由对称性得：$OA=OB$，

∵Q 是 AP 的中点，

∴$OQ=\frac{1}{2}BP$，

∵OQ 长的最大值为$\frac{3}{2}$，

∴BP 长的最大值为$\frac{3}{2}\times2=3$，

如图，当 BP 过圆心 C 时，BP 最长，过 B 作 $BD\perp x$ 轴于 D，

∵$CP=1$，

∴$BC=2$，

∵B 在直线 $y=2x$ 上，

设 B（t，$2t$），则 $CD=t-(-2)=t+2$，$BD=-2t$，

在 Rt△BCD 中，由勾股定理得：$BC^2=CD^2+BD^2$，

∴$2^2=(t+2)^2+(-2t)^2$，

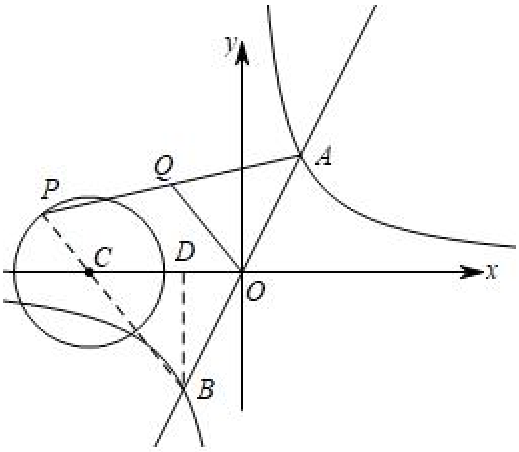
$t=0$（舍）或$-\frac{4}{5}$，

$\therefore B\left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$,

∵点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象上，

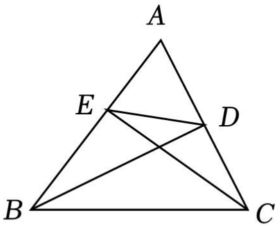
$\therefore k=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{32}{25}$;

故答案为：$\frac{32}{25}$.



【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、圆的性质，勾股定理的应用，有难度，解题的关键：利用勾股定理建立方程解决问题.

15.（3 分）（2023•罗湖区二模）如图，在锐角三角形 ABC 中，$\tan A=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{5}$，线段 BD、CE 分别是 AC、AB 边上的高线，连接 DE，则三角形 ADE 面积的最大值是 $\frac{5\sqrt{3}}{16}$__.



【分析】利用特殊角的三角函数值求得∠A 的度数，利用三角形的高的意义求得∠ACE＝∠ABD＝30°，利用含 30°角的直角三角形的性质和相似三角形的判定与性质定理得到 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，作出△$ABC$ 的外接圆，得出当点 A 为优$\overset{\frown}{BC}$的中点时，BC 边上的高最大，即△ABC 的面积最大，此时 $AB=AC$，△ABC 为等边三角形，利用等边三角形的性质求得△ABC 的面积最大值，则结论可求.

【解答】解：∵$\tan A=\sqrt{3}$，

∴∠A＝60°.

∵BD、CE 分别是 AC、AB 边上的高线，

∴$CE\perp AB$，$BD\perp AC$，

∴$\angle ACE=\angle ABD=30°$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB$，$AE=\frac{1}{2}AC$，

∴$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$,

∵$\angle A=\angle A$，

∴$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

∴$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{AD}{AB})^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,

∴$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

∴当$\triangle ABC$ 面积最大时，三角形 ADE 面积的有最大值．

作出$\triangle ABC$ 的外接圆，如图，

点 A 为优弧 BC 上的点，且$\angle A=60°$，

∵$BC=\sqrt{5}$，

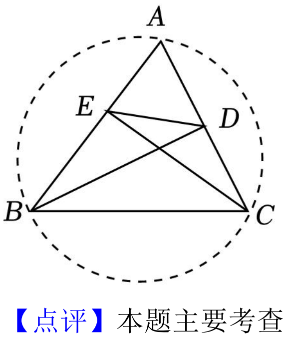
∴当点 A 为优$\widehat{BC}$的中点时，BC 边上的高最大，即$\triangle ABC$ 的面积最大，此时 $AB=AC$，

∴$\triangle ABC$ 为等边三角形，

∵$S_{\triangle ABC}$的最大值$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sin60°=\frac{5\sqrt{3}}{4}$,

∴三角形 ADE 面积的最大值是$\frac{5\sqrt{3}}{16}$.

故答案为：$\frac{5\sqrt{3}}{16}$.



【点评】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，解直角三角形的应用，直角三角形的边角关系定理，特殊角的三角函数值，利用三角形的性质求得$\triangle ABC$ 的面积的最大值是解题的关键．

三、解答题（第 16 题 5 分，第 17 题 7 分，第 18 题 8 分，第 19 题 8 分，第 20 题 8 分，第 21 题 9 分，第 22 题 10 分）

16．（5 分）（2023•罗湖区二模）$-1^2+|1-tan60°|-(3+\sqrt{3})^0+(-\frac{1}{2})^{-2}$．

【分析】根据有理数混合运算法则计算即可．

【解答】解：原式＝﹣1+$|1-\sqrt{3}|$﹣1+4

＝﹣1+$\sqrt{3}$ −1﹣1+4

＝1+$\sqrt{3}$．

【点评】此题考查了负整数指数幂、零次幂、特殊角的三角函数和去绝对值混合运算能力，关键是能准确理解以上知识并能进行正确的计算．

17．（7 分）（2023•罗湖区二模）先化简，再求值：（$\frac{a+b}{a-b}-1$）÷$\frac{b^2}{a^2-ab}$，其中 $a=\sqrt{2}$，$b=$ 2．

【分析】原式第一项先通分，再根据分式的减法法则计算得$\frac{2b}{a-b}$，第二项的分母提取公因式 a 得 a（a﹣b），再将除法转化为乘法，最后约分即可化简，再将 $a=\sqrt{2}$，b＝2 代入即可求解．

【解答】解：（$\frac{a+b}{a-b}-1$）÷$\frac{b^2}{a^2-ab}$

$=(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a-b})\div\frac{b^2}{a(a-b)}$

$=\frac{a+b-a+b}{a-b}\cdot\frac{a(a-b)}{b^2}$

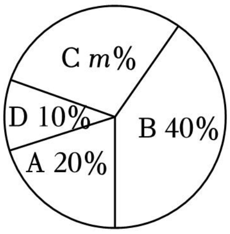
$=\frac{2b}{a-b}\cdot\frac{a(a-b)}{b^2}$

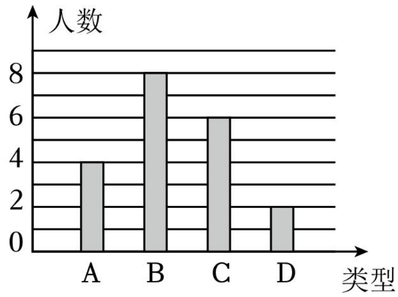
$=\frac{2a}{b}$，

当 $a=\sqrt{2}$，b＝2 时，原式$=\frac{2\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$．

【点评】本题主要考查分式的化简求值，在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简．化简的最后结果分子、分母要进行约分，注意运算的结果要化成最简分式或整式．

18．（8 分）（2023•罗湖区二模）某校 500 名学生参加植树活动，要求每人植 4～7 棵，活动结束后随机调查了部分学生每人的植树量，并分为四种类型，A：4 棵，B：5 棵，C：6 棵，D：7 棵．将各类的人数绘制成如下的扇形统计图和条形统计图．





（1）本次接受随机调查的学生人数为 ___20___ 名，扇形统计图中 m 的值为 ___30___；

（2）本次调查获取的样本数据的平均数为 ___5.3___，众数为 ___5___，中位数为 ___5___；

（3）根据样本数据，估计这 500 名学生共植树多少棵.

【分析】（1）根据 A 的人数于 百分比求出总人数即可解决问题.

（2）根据加权平均数、众数和中位数的定义求解即可.

（3）利用样本估计总体的思想解决问题即可.

【解答】解：（1）抽取的总人数＝4÷20%＝20（名），

$m\%=\frac{6}{20}=30\%$，

∴m＝30.

故答案为：20，30；

（2）平均数$=\frac{4\times4+8\times5+6\times6+7\times2}{20}=5.3$，

植树量为 5 棵出现的次数最多，故众数为 5，

把 20 人的植树量从小到大排列，排在中间的两个数都是 5，故中位数为 5；

故答案为：5.3；5；5；

（3）500×5.3＝2650（棵）.

答：估计这 500 名学生共植树大约为 2650 棵.

【点评】本题考查条形统计图，扇形统计图，平均数，众数，中位数等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

19.（8 分）（2023•罗湖区二模）“双减”政策受到各地教育部门的积极响应，某校为增加学生的课外活动实践，现决定增购两种体育器材：跳绳和毽子．已知跳绳的单价比毽子的单价多 3 元，用 800 元购买的跳绳数量和用 500 元购买的毽子数量相同.

（1）求跳绳和毽子的单价分别是多少元？

（2）学校计划购买跳绳和毽子两种器材共 600 个，且要求跳绳的数量不少于毽子数量的 3 倍，跳绳的数量不多于 452 根，请问有几种购买方案并指出哪种方案学校花钱最少.

【分析】（1）根据题意列出分式方程进行计算即可；

（2）设购买跳绳 a 个，则购买毽子（$600-a$）个，根据题意列出不等式组进行求解，设学校购买跳绳和毽子两种器材共花 w 元，求出一次函数解析式，根据一次函数的性质，求最小值即可．

【解答】解：（1）设毽子的单价为 x 元，则跳绳的单价为（$x+3$）元，

依题意，得：$\frac{800}{x+3}=\frac{500}{x}$，解得：$x=5$，

经检验，$x=5$ 是原方程的解，且符合题意，

∴$x+3=8$．

答：跳绳的单价为 8 元，毽子的单价为 5 元．

（2）设购买跳绳 a 个，则购买毽子（$600-a$）个．

依题意，得：$\begin{cases}a\geq 3(600-a)\\ a\leq 452\end{cases}$，

解得：$450\leqslant a\leqslant 452$，

∵a 为整数，

∴$a=450$，$a=451$，$a=452$，共三种方案；

设学校购买跳绳和毽子两种器材共花 w 元，

则 $w=8a+5$（$600-a$）$=3a+3000$，

∵$k=3>0$，

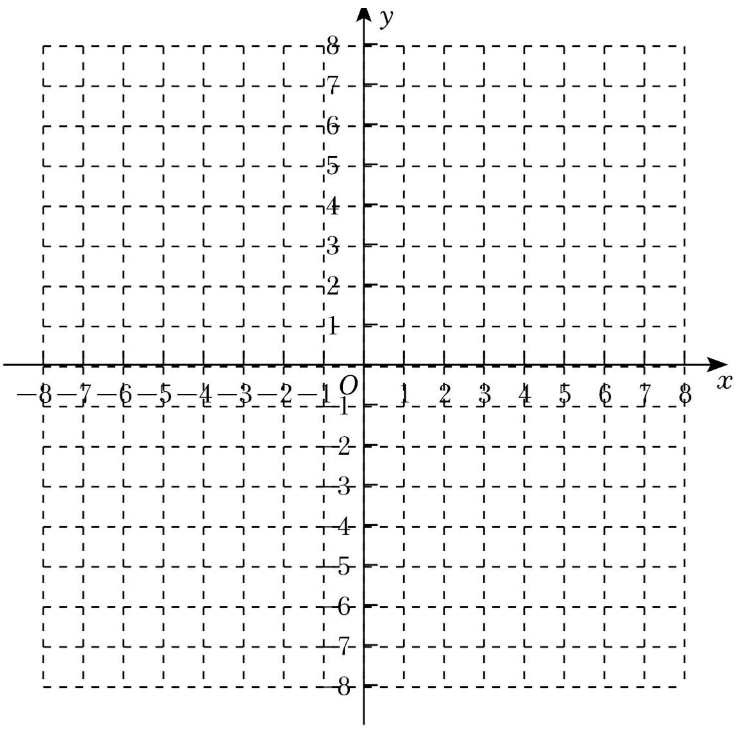
∴w 随 a 的增大而增大，

∴当 $a=450$ 时，w 取得最小值，则 $600-450=150$，

答：共有 3 种方案，当学校购买 450 个跳绳，150 个毽子时，总费用最少．

【点评】本题考查分式方程的应用，一元一次不等式组的应用，以及利用函数思想解决最值问题．根据题意，准确的列出分式方程和一元一次不等式组是解题的关键．

20．（8 分）（2023•罗湖区二模）在初中函数学习中，我们经历了列表、描点、连线画函数图象，结合图象研究函数性质并对其性质进行应用的过程．小丽同学学习二次函数后，对函数 $y=x^2-2|x|$（自变量 x 可以是任意实数）图象与性质进行了探究．请同学们阅读探究过程并解答：



（1）作图探究：

①如表是 y 与 x 的几组对应值：

X	…	﹣4	﹣3	﹣2	﹣1	0	1	2	3	4	…
y	…	8	3	0	m	0	﹣1	0	n	8	…

m＝__﹣1__，n＝__3__；

②在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组对应值为坐标的点，并根据描出的点，画出该函数的图象：

（2）深入思考：

根据所作图象，回答下列问题：

①方程 $x^2-2|x|=0$ 的解是 __$x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=2$__；

②如果 $y=x^2-2|x|$的图象与直线 $y=k$ 有 4 个交点，则 k 的取值范围是 __$-1<k<0$__；

（3）延伸思考：

将函数 $y=x^2-2|x|$的图象经过怎样的平移可得到 $y_1=(x+1)^2-2|x+1|-2$ 的图象？请写出平移过程.

【分析】（1）①将 $x=-1$ 和 $x=3$ 代入解析式求解；

②根据函数解析式及表格作图；

（2）①根据图象与 x 轴的交点求解；

②根据图象求解；

（3）由 $y_1=(x+1)^2-2|x+1|-2$ 可得新函数图象是由函数 $y=x^2-2|x|$ 的图象向左平移 1 个单位，向下平移 2 个单位所得．

【解答】解：（1）①将 $x=-1$ 代入 $y=x^2-2|x|$ 得 $y=1-2=-1$，

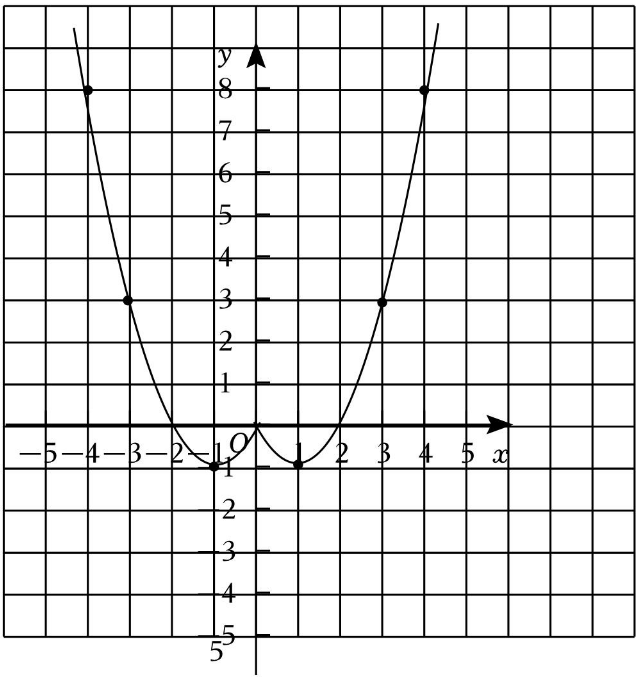
∴$m=-1$，

将 $x=3$ 代入 $y=x^2-2|x|$ 得 $y=9-6=3$，

∴$n=3$，

故答案为：-1，3；

②如图，



（2）①根据表格及图象可得 $x=-2$ 或 $x=2$ 时，$y=0$，

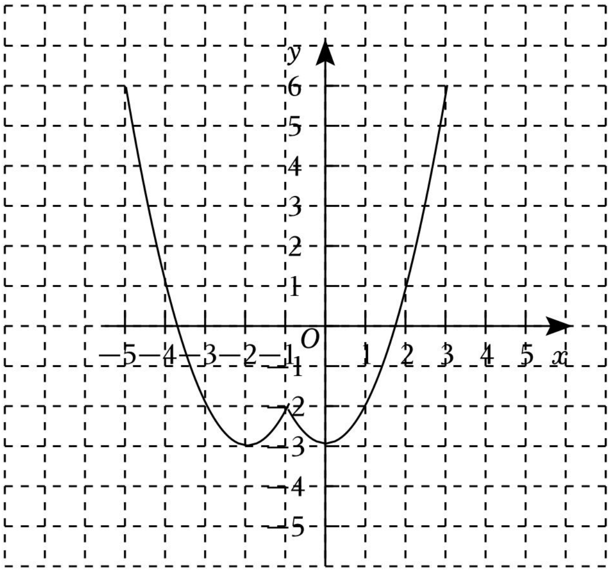
故答案为：$x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=2$；

②由图象可得当直线 $y=k$ 在 x 轴下方，直线 $y=-1$ 上方时，直线与函数图象有 4 个交点，

故答案为：$-1<k<0$；

（3）函数 $y=x^2-2|x|$ 的图象向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位得到 $y_1=(x+1)^2-2|x+1|-2$ 的图象，

如图，



【点评】本题考查二次函数的综合应用，掌握二次函数的性质，二次函数图象与几何变换，通过数形结合求解是解题的关键．

21．（9分）（2023•罗湖区二模）如图1，已知：△ABC内接于圆O，AB＝AC，连接AO并延长，交BC于点D．

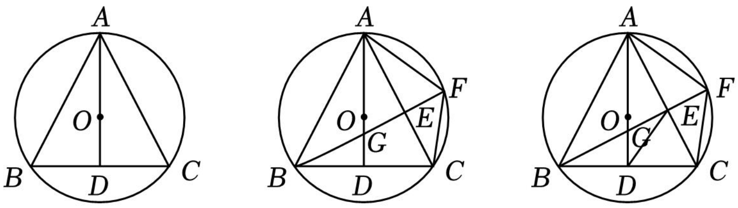


图1　　图2　　图3

（1）求证：$AD\perp BC$；

（2）如图2，过点B作$BE\perp AC$于点E，交圆O于点F，交AD于点G，连接AF、CF，求证：AG＝AF；

（3）如图3，在（2）的条件下，连接DE，CF＝5，$AF=3\sqrt{5}$，求DE的长．

【分析】（1）连接OB、OC，证明AO是线段BC的垂直平分线，问题得证；

（2）先证明∠FAC＝∠FBC，进而证明∠AFG＝∠AGF，即可证明AG＝AF；

（3）连接CG，先求出BG＝CG＝FC＝5，$AG=AF=3\sqrt{5}$，再证明△BGD∽△AGE，得到$\frac{DG}{EG}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，设$GE$＝$3m$，则$DG=\sqrt{5}m$，分别得到$BE$＝$BG$+$GE$＝5+$3m$，$BD=\sqrt{25-5m^2}$，$BC=2\sqrt{25-5m^2}$，证明△$BDG$∽△$BEC$，得到$\frac{\sqrt{25-m^2}}{5+3m}=\frac{5}{2\sqrt{25-m^2}}$，求出$m$＝1，从而得到$BC=2\sqrt{25-5m^2}=4\sqrt{5}$，根据∠$BEC$＝90°，$BD$＝$CD$，即可求出$DE=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{5}$．

【解答】（1）证明：如图，连接 OB、OC，

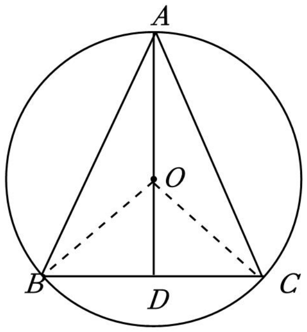


图1

∵$AB=AC$，$OB=OC$，

∴点 A、O 都在线段 BC 的垂直平分线上，

∴AO 是线段 BC 的垂直平分线，

∴$AD\perp BC$；

（2）证明：∵$\widehat{FC}=\widehat{FC}$，

∴$\angle FAC=\angle FBC$，

∵$AD\perp BC$，

∴$\angle GBD+\angle BGD=90^{\circ}$，

∵$BE\perp AC$，

∴$\angle AFE+\angle FAE=90^{\circ}$，

∴$\angle BGD=\angle AFG$，

∵$\angle BGD=\angle AGF$，

∴$\angle AFG=\angle AGF$，

∴$AG=AF$；

（3）解：如图，连接 CG，

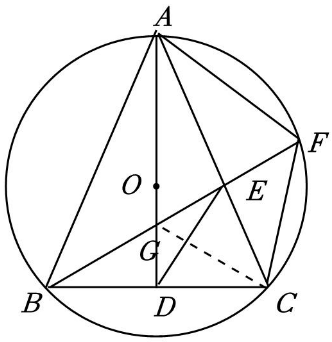


图3

∵$AG=AF$，$GF\perp AC$，

∴AC 是线段 GF 的垂直平分线，

∴$GC=FC=5$，

∵AG 是线段 BC 的垂直平分线，

∴$BG=CG=FC=5$.

∵$AG=AF$，

∴$AG=AF=3\sqrt{5}$.

∵$AD\perp BC$，$GF\perp AC$，

∴$\angle BDG=\angle AEG=90°$，

∵$\angle BGD=\angle AGE$，

∴$\triangle BGD\backsim\triangle AGE$，

∴$\dfrac{DG}{EG}=\dfrac{BG}{AG}=\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

设 $GE=3m$，则$DG=\sqrt{5}m$，

∴$BE=BG+GE=5+3m$，

在 Rt$\triangle GBD$ 中，$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{25-5m^2}$，

∵$AB=AC$，$AD\perp BC$，

∴$BC=2BD=2CD=2\sqrt{25-5m^2}$.

∵$\angle BDG=\angle BEC=90°$，$\angle GBD=\angle CBE$，

∴$\triangle BDG\backsim\triangle BEC$，

∴$\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BG}{BC}$，即$\dfrac{\sqrt{25-m^2}}{5+3m}=\dfrac{5}{2\sqrt{25-m^2}}$，

∴$2(25-5m^2)=25+15m$，

整理得 $2m^2+3m-5=0$，

解得$m_1=1$，$m_2=-\frac{5}{2}$（不合题意，舍去），

∴$BC=2\sqrt{25-5m^2}=4\sqrt{5}$，

∵∠*BEC*＝90°，*BD*＝*CD*，

∴$DE=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{5}$.

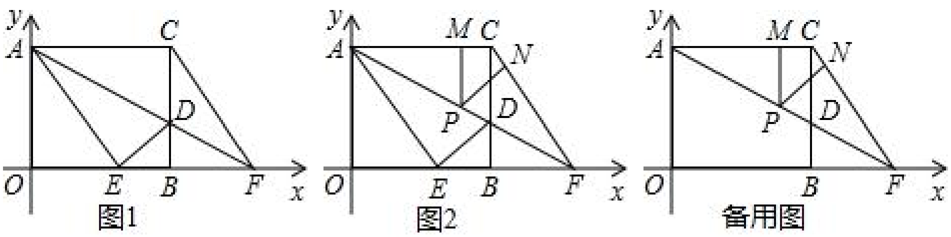
【点评】本题为圆的综合题，考查了线段的垂直平分线的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，勾股定理，相似三角形的性质与判定，一元二次方程的应用，直角三角形的性质等知识，综合性强，第（3）问难度较大，熟知相关性质，并根据题目中已知条件灵活应用是解题关键.

22.（10分）（2023•罗湖区二模）如图，矩形*AOBC*的顶点*B*，*A*分别在*x*轴，*y*轴上，点*C*坐标是（5，4），*D*为*BC*边上一点，将矩形沿*AD*折叠，点*C*落在*x*轴上的点*E*处，*AD*的延长线与*x*轴相交于点*F*.

（1）如图1，求点*D*的坐标；

（2）如图2，若*P*是*AF*上一动点，*PM*⊥*AC*交*AC*于*M*，*PN*⊥*CF*交*CF*于*N*，设*AP*＝*t*，*FN*＝*s*，求*s*与*t*之间的函数关系式；

（3）在（2）的条件下，是否存在点*P*，使△*PMN*为等腰三角形？若存在，请直接写出点*P*的坐标；若不存在，请说明理由.



【分析】（1）先设*D*（5，*a*），根据勾股定理求出*OE*，从而得*BE*，最后根据勾股定理列方程，即可得出结论；

（2）如图2，作辅助线，构建相似三角形，先证明△*ADC*∽△*FDB*，得$\frac{AC}{BF}=\frac{CD}{BD}$，可得*BF*＝3，*OF*＝8，利用勾股定理计算*AF*和*CF*的长，根据角平分线的性质和等腰三角形的性质得*PM*+*PN*＝*PM*+*PN*'＝*MN*'＝4，证明△*PFN*∽△*DAC*，得$\frac{FN}{AC}=\frac{PN}{CD}$，从而得*FN*＝2*PN*，再证明△*APM*∽△*FPN*'，列比例式可得结论；

（3）分三种情况：①*PM*＝*PN*；②*PM*＝*MN*；③*MN*＝*NP*；分别证明三角形相似列比例式可得结论.

【解答】解：（1）∵矩形 $AOBC$，且 C（5，4），

∴$AC=5$，$OA=BC=4$，

设 D（5，a），则 $BD=a$，$CD=ED=4-a$，

∵$AE=AC=5$，

在 Rt△AOE 中，$OE=\sqrt{AE^2-OA^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴$BE=OB-OE=5-3=2$，

在 Rt△BDE 中，由勾股定理得：$DE^2=BD^2+BE^2$，

∴$(4-a)^2=2^2+a^2$，

∴$a>0$，

∴$a=\frac{3}{2}$，

∴D（5，$\frac{3}{2}$）；

（2）如图 2，延长 MP 交 OF 于 N'，则 $PN'\perp OF$，

∵$AC\parallel BF$，

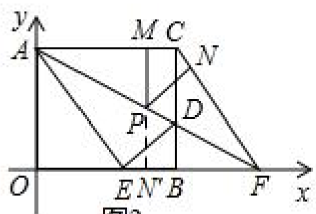


图2

∴$\angle PAM=\angle DFB$，

∵$\angle ACD=\angle FBD=90°$，

∴△ADC∽△FDB，

∴$\frac{AC}{BF}=\frac{CD}{BD}$，

由（1）知：$BD=\frac{3}{2}$，

∴$CD=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，

又 $AC=5$，

∴$\frac{5}{BF}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}$，

∴$BF=3$，$OF=8$，

∴$AF=\sqrt{AO^2+OF^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，

在 Rt△BCF 中，由勾股定理得：$CF=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵$AC=5$，

∴$AC=CF$，

∴$\angle CAF=\angle AFC$，

∵$AC\parallel EF$，

∴$\angle CAF=\angle EFA=\angle AFC$，

∴FA 平分$\angle CFO$，

∵$PN\perp CF$，$PN'\perp OF$，

∴$PN=PN'$，

∴$PM+PN=PM+PN'=MN'=4$，

∵$\angle CAF=\angle CFA$，$\angle ACD=\angle PNF=90°$，

∴△PFN∽△DAC，

∴$\frac{FN}{AC}=\frac{PN}{CD}$,

∴$\frac{PN}{NF}=\frac{CD}{AC}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{1}{2}$,

又 $NF=s$，

∴$PN=\frac{1}{2}s$，$PM=4-\frac{1}{2}s$，

∵$PA=t$，$PF=4\sqrt{5}-t$，

∵$\angle PAM=\angle PFN'$，$\angle APM=\angle FPN'$，

∴△APM∽△FPN'，

∴$\frac{PM}{PN'}=\frac{AP}{PF}$，即$\frac{4-\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}s}=\frac{t}{4\sqrt{5}-t}$,

∴$s=-\frac{2\sqrt{5}}{5}t+8$；

（3）分三种情况：

①当 $PM=PN$ 时，如图 3，

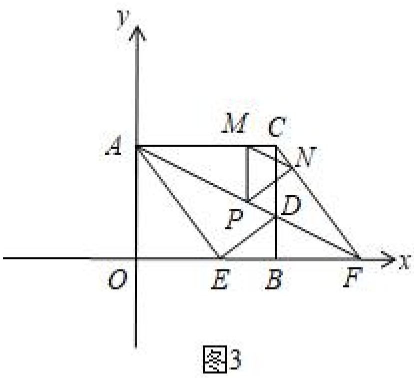


图3

∵∠PAM=∠PFN，∠AMP=∠PNF=90°，

∴△PAM∽△PFN，

∴$\frac{PA}{PF}=\frac{PM}{PN}$=1，

∴PA=PF，即 $t=4\sqrt{5}-t$，

解得：$t=2\sqrt{5}$，

∴PM=2，$AM=\sqrt{PA^2-PM^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$=4，

∴P（4，2）；

②当 PM=MN 时，如图 4，过 M 作 $MH\perp PN$ 于 H，PN 与 MC 的延长线交于点 G，

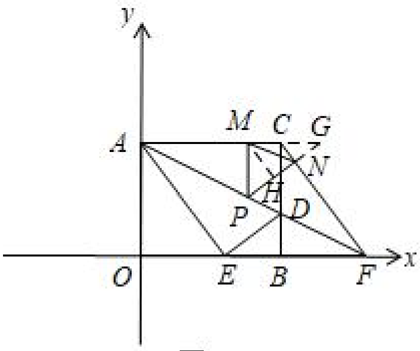


图4

有 $PH=NH=\frac{1}{2}PN=\frac{1}{4}s$，

∵$PM+PN$=4，

∴$PM=4-\frac{1}{2}s$，

∵∠GCN=∠MPN=∠BFC，

即∠MPN=∠BFC，

∵∠MHP=∠CBF=90°，

∴△PMH∽△FCB，

$\therefore \frac{PM}{PH}=\frac{FC}{FB}=\frac{5}{3}$，即$\frac{4-\frac{1}{2}s}{\frac{1}{4}s}=\frac{5}{3}$，

解得：$s=\frac{48}{11}$，

代入 $s=-\frac{2\sqrt{5}}{5}t+8$ 得：$t=\frac{20\sqrt{5}}{11}$，

$\therefore P$（$\frac{40}{11}$，$\frac{24}{11}$）；

③当 $MN=NP$ 时，如图 5，

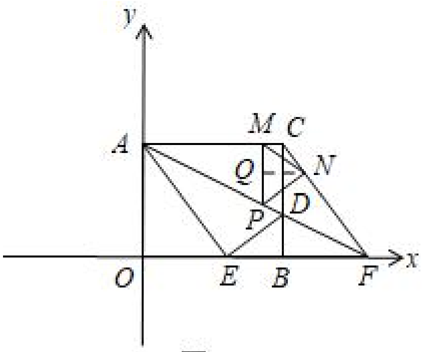


图5

过点 N 作 $NQ\perp PM$ 于 Q，

$\therefore \angle NPQ=\angle BFC$，

$\because \angle NQP=\angle CBF=90°$，

$\therefore \triangle NQP\backsim\triangle CBF$，

$\therefore \frac{PN}{PQ}=\frac{CF}{BF}$，

又 $PN=\frac{1}{2}s$，

$\because PQ=\frac{1}{2}PM=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{2}s)=2-\frac{1}{4}s$，$CF=5$，

$\therefore \frac{\frac{1}{2}s}{2-\frac{1}{4}s}=\frac{5}{3}$，

$\therefore s=\frac{40}{11}$，

代入 $s=-\frac{2\sqrt{5}}{5}t+8$ 得：$t=\frac{24\sqrt{5}}{11}$，

$\therefore P$（$\frac{48}{11}$，$\frac{20}{11}$）；

综上，点 P 的坐标是（4，2）或（$\frac{40}{11}$，$\frac{24}{11}$）或（$\frac{48}{11}$，$\frac{20}{11}$）.

【点评】此题是四边形综合题，主要考查了折叠的性质，相似三角形的性质和判定，勾

股定理，一次函数，等腰三角形的性质和判定等知识，用分类讨论的数学思想和方程思想解决问题是解本题的关键．