2023年浙江省杭州市中考数学试卷

一、选择题：本大题有10个小题，每小题3分，共30分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（3分）（2023•杭州）杭州奥体中心体育场又称"大莲花"，里面有80800个座位．数据80800用科学记数法表示为（　　）

A．8.8×10^4　　B．8.08×10^4　　C．8.8×10^5　　D．8.08×10^5

2．（3分）（2023•杭州）$(-2)^2+2^2=$（　　）

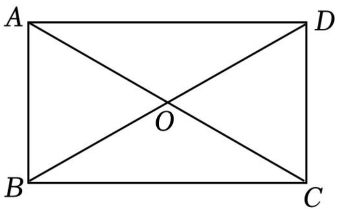
A．0　　B．2　　C．4　　D．8

3．（3分）（2023•杭州）分解因式：$4a^2-1=$（　　）

A．$(2a-1)(2a+1)$　　B．$(a-2)(a+2)$

C．$(a-4)(a+1)$　　D．$(4a-1)(a+1)$

4．（3分）（2023•杭州）如图，矩形$ABCD$的对角线AC，BD相交于点O．若$\angle AOB=60°$，则$\frac{AB}{BC}=$（　　）

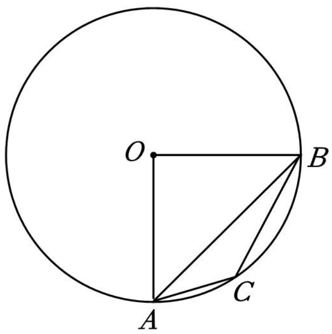


A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5．（3分）（2023•杭州）在直角坐标系中，把点$A(m，2)$先向右平移1个单位，再向上平移3个单位得到点B．若点B的横坐标和纵坐标相等，则$m=$（　　）

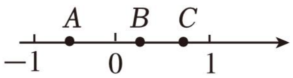
A．2　　B．3　　C．4　　D．5

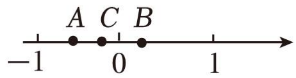
6．（3分）（2023•杭州）如图，在⊙O中，半径OA，OB互相垂直，点C在劣弧AB上．若$\angle ABC=19°$，则$\angle BAC=$（　　）

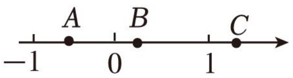


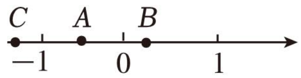
A．23° B．24° C．25° D．26°

7．（3 分）（2023•杭州）已知数轴上的点 A，B 分别表示数 a，b，其中﹣$1<a<0$，$0<b<1$．若 $a\times b=c$，数 c 在数轴上用点 C 表示，则点 A，B，C 在数轴上的位置可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

8．（3 分）（2023•杭州）设二次函数 $y=a(x-m)(x-m-k)$（$a>0$，m，k 是实数），则（　　）

A．当 $k=2$ 时，函数 y 的最小值为﹣a

B．当 $k=2$ 时，函数 y 的最小值为﹣$2a$

C．当 $k=4$ 时，函数 y 的最小值为﹣a

D．当 $k=4$ 时，函数 y 的最小值为﹣$2a$

9．（3 分）（2023•杭州）一枚质地均匀的正方体骰子（六个面分别标有数字 1，2，3，4，5，6），投掷 5 次，分别记录每次骰子向上的一面出现的数字．根据下面的统计结果，能判断记录的这 5 个数字中一定没有出现数字 6 的是（　　）

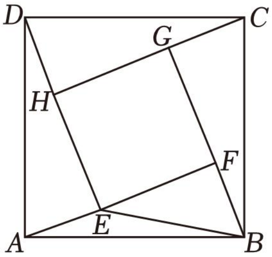
A．中位数是 3，众数是 2

B．平均数是 3，中位数是 2

C．平均数是 3，方差是 2

D．平均数是 3，众数是 2

10．（3 分）（2023•杭州）第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”．如图，在由四个全等的直角三角形（△DAE，△ABF，△BCG，△CDH）和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABF>\angle BAF$，连接 BE．设 $\angle BAF=\alpha$，$\angle BEF=\beta$，若正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $1:n$，$\tan\alpha=\tan^2\beta$，则 $n=$（　　）

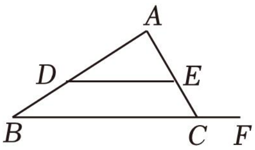


A．5　　　　B．4　　　　C．3　　　　D．2

二、填空题：本大题有 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分.

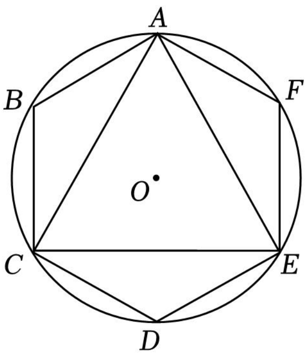
11.（4 分）（2023•杭州）计算：$\sqrt{2}-\sqrt{8}=$__________.

12.（4 分）（2023•杭州）如图，点 D，E 分别在△ABC 的边 AB，AC 上，且 $DE\parallel BC$，点 F 在线段 BC 的延长线上．若∠ADE＝28°，∠ACF＝118°，则∠A＝________.

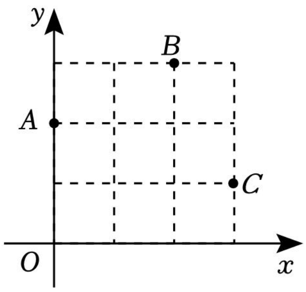


13.（4 分）（2023•杭州）一个仅装有球的不透明布袋里只有 6 个红球和 n 个白球（仅有颜色不同）．若从中任意摸出一个球是红球的概率为$\frac{2}{5}$，则 n＝_______.

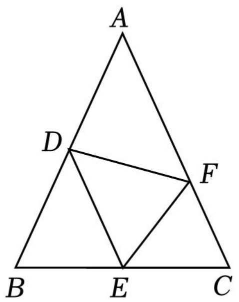
14.（4 分）（2023•杭州）如图，六边形 $ABCDEF$ 是⊙O 的内接正六边形，设正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 S_1，△ACE 的面积为 S_2，则$\frac{S_1}{S_2}=$_______.



15.（4 分）（2023•杭州）在“探索一次函数 $y=kx+b$ 的系数 k，b 与图象的关系”活动中，老师给出了直角坐标系中的三个点：A（0，2），B（2，3），C（3，1）．同学们画出了经过这三个点中每两个点的一次函数的图象，并得到对应的函数表达式 $y_1=k_1x+b_1$，$y_2=k_2x+b_2$，$y_3=k_3x+b_3$．分别计算 k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3 的值，其中最大的值等于 _______.



16．（4分）如图，在△ABC中，AB＝AC，∠A＜90°，点D，E，F分别在边AB，BC，CA上，连接DE，EF，FD，已知点B和点F关于直线DE对称．设$\frac{BC}{AB}=k$，若AD＝DF，则$\frac{CF}{FA}=$____________（结果用含k的代数式表示）．



三、解答题：本大题有7个小题，共66分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（6分）（2023•杭州）设一元二次方程$x^2+bx+c=0$．在下面的四组条件中选择其中一组b，c的值，使这个方程有两个不相等的实数根，并解这个方程．

①b＝2，c＝1；

②b＝3，c＝1；

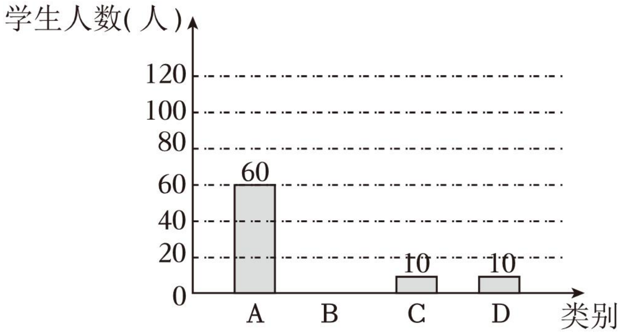
③b＝3，c＝﹣1；

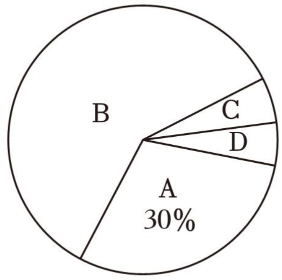
④b＝2，c＝2．

注：如果选择多组条件分别作答，按第一个解答计分．

18．（8分）（2023•杭州）某校为了了解家长和学生观看安全教育视频的情况，随机抽取本校部分学生调查，把收集的数据按照A，B，C，D四类（A表示仅学生参与；B表示家长和学生一起参与；C表示仅家长参与；D表示其他）进行统计，得到每一类的学生人数，并把统计结果绘制成如图所示的未完成的条形统计图和扇形统计图．

观看安全教育视频情况条形统计图　　观看安全教育视频情况扇形统计图





（1）在这次抽样调查中，共调查了多少名学生？

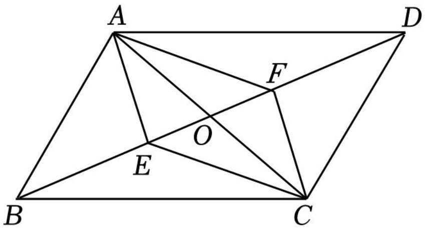
（2）补全条形统计图.

（3）已知该校共有 1000 名学生，估计 B 类的学生人数.

19.（8 分）（2023•杭州）如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在对角线 BD 上，且 $BE=EF=FD$，连接 AE，EC，CF，FA.

（1）求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

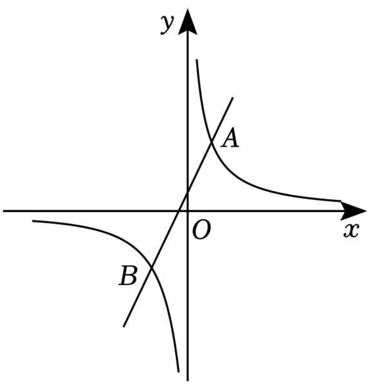
（2）若△ABE 的面积等于 2，求△CFO 的面积.



20.（10 分）（2023•杭州）在直角坐标系中，已知 $k_1k_2\neq 0$，设函数 $y_1=\frac{k_1}{x}$与函数 $y_2=k_2(x-2)+5$ 的图象交于点 A 和点 B．已知点 A 的横坐标是 2，点 B 的纵坐标是－4.

（1）求 k_1，k_2 的值.

（2）过点 A 作 y 轴的垂线，过点 B 作 x 轴的垂线，在第二象限交于点 C；过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，在第四象限交于点 D．求证：直线 CD 经过原点.



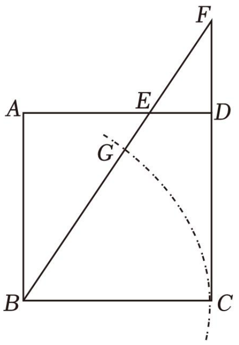
21.（10 分）（2023•杭州）在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上（不与点 A，D

重合），射线 BE 与射线 CD 交于点 F．

（1）若 $ED=\frac{1}{3}$，求 DF 的长．

（2）求证：$AE\bullet CF=1$．

（3）以点 B 为圆心，BC 长为半径画弧，交线段 BE 于点 G．若 $EG=ED$，求 ED 的长．



22．（12 分）（2023•杭州）设二次函数 $y=ax^2+bx+1$（$a\neq0$，b 是实数）．已知函数值 y 和自变量 x 的部分对应取值如下表所示：

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	m	1	n	1	p	…

（1）若 $m=4$，

①求二次函数的表达式；

②写出一个符合条件的 x 的取值范围，使得 y 随 x 的增大而减小．

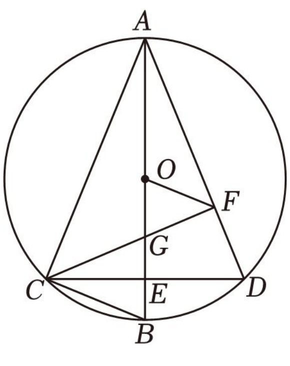
（2）若在 m，n，p 这三个实数中，只有一个是正数，求 a 的取值范围．

23．（12 分）（2023•杭州）如图，在⊙O 中，直径 AB 垂直弦 CD 于点 E，连接 AC，AD，BC，作 $CF\perp AD$ 于点 F，交线段 OB 于点 G（不与点 O，B 重合），连接 OF．

（1）若 $BE=1$，求 GE 的长．

（2）求证：$BC^2=BG\bullet BO$．

（3）若 $FO=FG$，猜想∠CAD 的度数，并证明你的结论．



2023年浙江省杭州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题有10个小题，每小题3分，共30分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（3分）（2023•杭州）杭州奥体中心体育场又称“大莲花”，里面有80800个座位．数据80800用科学记数法表示为（　　）

A．8.8×10^4　　B．8.08×10^4　　C．8.8×10^5　　D．8.08×10^5

【分析】科学记数法的表示形式为$a\times10^n$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant10$时，n是正整数；当原数的绝对值<1时，n是负整数．

【解答】解：$80800=8.08\times10^4$，

故选：B．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times10^n$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数，表示时关键要正确确定a的值以及n的值．

2．（3分）（2023•杭州）$(-2)^2+2^2=$（　　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．8

【分析】根据有理数的混合运算顺序，先计算乘方，再计算加法即可．

【解答】解：$(-2)^2+2^2=4+4=8$．

故选：D．

【点评】本题考查了有理数的混合运算，掌握有理数的乘方的定义是解答本题的关键．

3．（3分）（2023•杭州）分解因式：$4a^2-1=$（　　）

A．$(2a-1)(2a+1)$　　B．$(a-2)(a+2)$

C．$(a-4)(a+1)$　　D．$(4a-1)(a+1)$

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出答案．

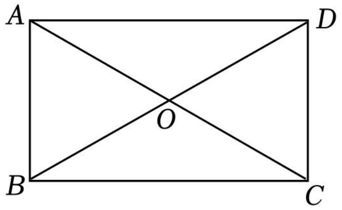
【解答】解：$4a^2-1=(2a)^2-1^2$

=（$2a-1$）（$2a+1$）.

故选：A.

【点评】此题主要考查了公式法分解因式，正确运用平方差公式分解因式是解题关键.

4.（3 分）（2023•杭州）如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O．若 $\angle AOB=60°$，则$\frac{AB}{BC}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】先证△ABO 是等边三角形，可得$\angle BAO=60°$，由直角三角形的性质可求解.

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AO=BO=CO=DO$，

∵$\angle AOB=60°$，

∴△ABO 是等边三角形，

∴$\angle BAO=60°$，

∴$\angle ACB=30°$，

∴$BC=\sqrt{3}AB$，

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：D.

【点评】本题考查了矩形的性质，等边三角形的判定和性质，直角三角形的性质，掌握矩形的性质是解题的关键.

5.（3 分）（2023•杭州）在直角坐标系中，把点 A（m，2）先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到点 B．若点 B 的横坐标和纵坐标相等，则 $m=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【分析】根据点的平移规律可得先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到点 B($m+1$，2+3)，再根据点 B 的横坐标和纵坐标相等即可求出答案.

【解答】解：∵把点 A（m，2）先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到点 B.

∴点 B（$m+1$，2+3），

∵点 B 的横坐标和纵坐标相等，

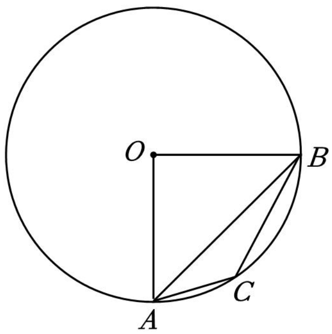
∴$m+1=5$，

∴$m=4$．

故选：C．

【点评】此题主要考查了坐标与图形变化－平移，关键是横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减．

6．（3 分）（2023•杭州）如图，在⊙O 中，半径 OA，OB 互相垂直，点 C 在劣弧 AB 上．若 $\angle ABC=19°$，则 $\angle BAC=$（　　）



A．23°　　　　B．24°　　　　C．25°　　　　D．26°

【分析】连接 OC，根据圆周角定理可求解 $\angle AOC$ 的度数，结合垂直的定义可求解 $\angle BOC$ 的度数，再利用圆周角定理可求解．

【解答】解：连接 OC，

∵$\angle ABC=19°$，

∴$\angle AOC=2\angle ABC=38°$，

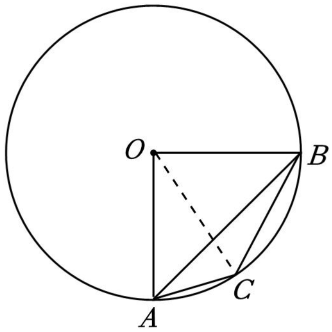
∵半径 OA，OB 互相垂直，

∴$\angle AOB=90°$，

∴$\angle BOC=90°-38°=52°$，

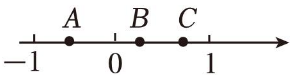
∴$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=26°$，

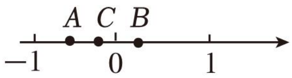
故选：D．

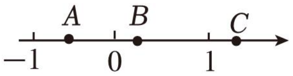


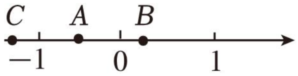
【点评】本题主要考查圆周角定理，掌握圆周角定理是解题的关键．

7．（3 分）（2023•杭州）已知数轴上的点 A，B 分别表示数 a，b，其中 $-1<a<0$，$0<b<1$．若 $a\times b=c$，数 c 在数轴上用点 C 表示，则点 A，B，C 在数轴上的位置可能是（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【分析】根据 a，b 的范围，可得 $a\times b$ 的范围，从而可得点 C 在数轴上的位置，从而得出答案．

【解答】解：$\because -1<a<0$，$0<b<1$，

$\therefore -1<a\times b<0$，

即 $-1<c<0$，

那么点 C 应在 -1 和 0 之间，

则 A，C，D 不符合题意，B 符合题意，

故选：B．

【点评】本题主要考查实数与数轴的关系，结合已知条件求得 $-1<a\times b<0$ 是解题的关键．

8．（3 分）（2023•杭州）设二次函数 $y=a(x-m)(x-m-k)$（$a>0$，m，k 是实数），则（　　）

A．当 $k=2$ 时，函数 y 的最小值为 $-a$

B．当 $k=2$ 时，函数 y 的最小值为 $-2a$

C．当 $k=4$ 时，函数 y 的最小值为 $-a$

D．当 $k=4$ 时，函数 y 的最小值为 $-2a$

【分析】令 $y=0$，求出二次函数与 x 轴的交点坐标，继而求出二次函数的对称轴，再代入二次函数解析式即可求出顶点的纵坐标，最后代入 k 的值进行判断即可．

【解答】解：令 $y=0$，则（$x-m$）（$x-m-k$）$=0$，

$\therefore x_1=m$，$x_2=m+k$，

∴二次函数 $y=a(x-m)(x-m-k)$ 与 x 轴的交点坐标是（m，0），（$m+k$，0），

∴二次函数的对称轴是：直线$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m+m+k}{2}=\frac{2m+k}{2}$，

∵$a>0$，

∴y 有最小值，

当$x=\frac{2m+k}{2}$时，y 最小，

即$y=a(\frac{2m+k}{2}-m)(\frac{2m+k}{2}-m-k)=-\frac{k^2}{4}a$，

当 $k=2$ 时，函数 y 的最小值为$y=-\frac{2^2}{4}a=-a$；

当 $k=4$ 时，函数 y 的最小值为$y=-\frac{4^2}{4}a=-4a$，

故选：A．

【点评】本题考查了二次函数的最值问题，熟练掌握求二次函数的顶点坐标是解题的关键．

9．（3 分）（2023•杭州）一枚质地均匀的正方体骰子（六个面分别标有数字 1，2，3，4，5，6），投掷 5 次，分别记录每次骰子向上的一面出现的数字．根据下面的统计结果，能判断记录的这 5 个数字中一定没有出现数字 6 的是（　　）

A．中位数是 3，众数是 2

B．平均数是 3，中位数是 2

C．平均数是 3，方差是 2

D．平均数是 3，众数是 2

【分析】根据中位数、众数、平均数、方差的定义，结合选项中设定情况，逐项判断即可．

【解答】解：当中位数是 3，众数是 2 时，记录的 5 个数字可能为：2，2，3，4，5 或 2，2，3，4，6 或 2，2，3，5，6，故 A 选项不合题意；

当平均数是 3，中位数是 2 时，5 个数之和为 15，记录的 5 个数字可能为 1，1，2，5，6 或 1，2，2，5，5，故 B 选项不合题意；

当平均数是 3，方差是 2 时，5 个数之和为 15，假设 6 出现了 1 次，方差最小的情况下另外 4 个数为：2，2，2，3，此时方差 $s^2=\frac{1}{5}\times[3\times(2-3)^2+(3-3)^2+(6-3)^2]=2.4>2$，因此假设不成立，即一定没有出现数字 6，故 C 选项符合题意；

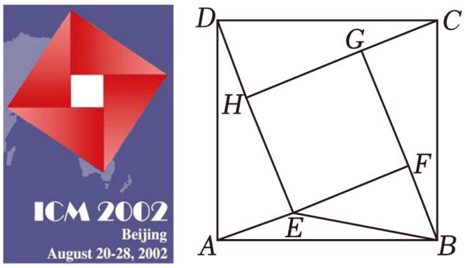
当平均数是 3，众数是 2 时，5 个数之和为 15，2 至少出现两次，记录的 5 个数字可能为

1，2，2，4，6，故 D 选项不合题意；

故选：C.

【点评】本题主要考查平均数、众数和中位数及方差，解题的关键是掌握平均数、众数和中位数及方差的定义.

10.（3 分）（2023•杭州）第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”．如图，在由四个全等的直角三角形（$\triangle DAE$，$\triangle ABF$，$\triangle BCG$，$\triangle CDH$）和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABF>\angle BAF$，连接 BE．设 $\angle BAF=\alpha$，$\angle BEF=\beta$，若正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 1：n，$\tan\alpha=\tan^2\beta$，则 n=（　　）



A．5　　　　B．4　　　　C．3　　　　D．2

【分析】设 $AE=a$，$DE=b$，则 $BF=a$，$AF=b$，解直角三角形可得$\frac{a}{b}=(\frac{a}{b-a})^2$，化简可得 $(b-a)^2=ab$，$a^2+b^2=3ab$，结合勾股定理及正方形的面积公式可求得 $S_{\text{正方形}EFGH}$：$S_{\text{正方形}ABCD}=1$：3，进而可求解 n 的值.

【解答】解：设 $AE=a$，$DE=b$，则 $BF=a$，$AF=b$，

$\because \tan\alpha=\frac{a}{b}$，$\tan\beta=\frac{a}{b-a}$，$\tan\alpha=\tan^2\beta$，

$\therefore \frac{a}{b}=(\frac{a}{b-a})^2$，

$\therefore (b-a)^2=ab$，

$\therefore a^2+b^2=3ab$，

$\because a^2+b^2=AD^2=S_{\text{正方形}ABCD}$，$(b-a)^2=S_{\text{正方形}EFGH}$，

$\therefore S_{\text{正方形}EFGH}$：$S_{\text{正方形}ABCD}=ab$：$3ab=1$：3，

$\because S_{\text{正方形}EFGH}$：$S_{\text{正方形}ABCD}=1$：$n$，

$\therefore n=3$.

故选：C.

【点评】本题主要考查勾股定理的证明，解直角三角形的应用，利用解直角三角形求得

（$b-a$）$^2=ab$，$a^2+b^2=3ab$ 是解题的关键．

二、填空题：本大题有 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分．

11．（4 分）（2023•杭州）计算：$\sqrt{2}-\sqrt{8}=$__$-\sqrt{2}$__．

【分析】直接化简二次根式，再利用二次根式的加减运算法则计算得出答案．

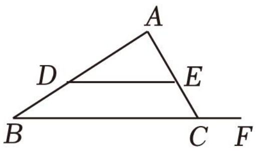
【解答】解：原式$=\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=-\sqrt{2}$．

故答案为：$-\sqrt{2}$．

【点评】此题主要考查了二次根式的加减，正确掌握相关运算法则是解题关键．

12．（4 分）（2023•杭州）如图，点 D，E 分别在△ABC 的边 AB，AC 上，且 $DE\parallel BC$，点 F 在线段 BC 的延长线上．若∠$ADE=28°$，∠$ACF=118°$，则∠$A=$__$90°$____．



【分析】由平行线的性质得到∠$B=$∠$ADE=28°$，由三角形外角的性质得到∠$A=$∠$ACF-$∠$B=118°-28°=90°$．

【解答】解：∵$DE\parallel BC$，

∴∠$B=$∠$ADE=28°$，

∵∠$ACF=$∠$A+$∠B，

∴∠$A=$∠$ACF-$∠$B=118°-28°=90°$．

故答案为：$90°$．

【点评】本题考查平行线的性质，三角形外角的性质，关键是由平行线的性质求出∠B 的度数，由三角形外角的性质即可求出∠A 的度数．

13．（4 分）（2023•杭州）一个仅装有球的不透明布袋里只有 6 个红球和 n 个白球（仅有颜色不同）．若从中任意摸出一个球是红球的概率为$\frac{2}{5}$，则 $n=$__9__．

【分析】根据红球的概率公式，列出方程求解即可．

【解答】解：根据题意，$\frac{6}{6+n}=\frac{2}{5}$，

解得 $n=9$，

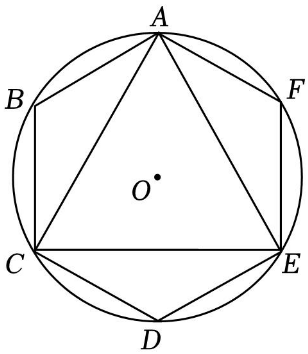
经检验 $n=9$ 是方程的解．

∴$n=9$．

故答案为：9．

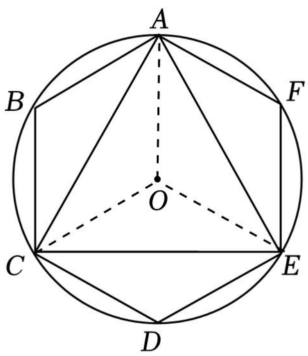
【点评】本题考查概率公式，根据公式列出方程求解则可．用到的知识点为：概率＝所求情况数与总情况数之比．

14．（4分）（2023•杭州）如图，六边形 $ABCDEF$ 是⊙O 的内接正六边形，设正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 S_1，△ACE 的面积为 S_2，则$\frac{S_1}{S_2}$＝__2__．



【分析】连接 OA，OC，OE，首先证明出△ACE 是⊙O 的内接正三角形，然后证明出△BAC≌△OAC（ASA），得到 $S_{\triangle ABC}$＝$S_{\triangle AEE}$＝$S_{\triangle CDE}$ $S_{\triangle AOC}$＝$S_{\triangle OAE}$＝$S_{\triangle OCE}$，进而求解即可．

【解答】解：如图所示，连接 OA，OC，OE．



∵六边形 $ABCDEF$ 是⊙O 的内接正六边形，

∴AC＝AE＝CE，

∴△ACE 是⊙O 的内接正三角形，

∵∠B＝120°，AB＝BC，

∴∠BAC＝∠BCA＝$\frac{1}{2}$（180°－∠B）＝30°，

∵∠CAE＝60°，

∴∠OAC＝∠OAE＝30°，

∴$\angle BAC=\angle OAC=30^\circ$，

同理可得，$\angle BCA=\angle OCA=30^\circ$，

又∵$AC=AC$，

∴$\triangle BAC\cong\triangle OAC$（$ASA$），

∴$S_{\triangle BAC}=S_{\triangle AOC}$，

圆和正六边形的性质可得，$S_{\triangle BAC}=S_{\triangle AFE}=S_{\triangle CDE}$，

由圆和正三角形的性质可得，$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OAE}=S_{\triangle OCE}$，

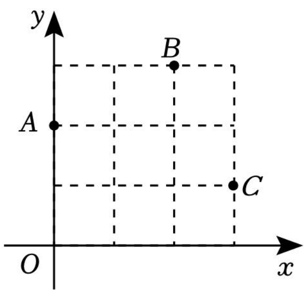
∵$S_1=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle AEF}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OCE}=2$（$S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OCE}$）$=2S_2$，

∴$\frac{S_1}{S_2}=2$，

故答案为：2

【点评】此题考查了圆内接正多边形的性质，正六边形和正三角形的性质，全等三角形的性质和判定等知 识，解题的关键是熟练掌握以上知识点．

15．（4分）（2023•杭州）在“探索一次函数$y=kx+b$的系数k，b与图象的关系”活动中，老师给出了直角坐标系中的三个点：A（0，2），B（2，3），C（3，1）．同学们画出了经过这三个点中每两个点的一次函数的图象，并得到对应的函数表达式$y_1=k_1x+b_1$，$y_2=k_2x+b_2$，$y_3=k_3x+b_3$．分别计算k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3的值，其中最大的值等于 __5__．



【分析】解法一：利用待定系数法求出分别求出k_1，b_1，k_2，b_2，k_3，b_3的值，再计算k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3的值，最后比较大小即可得到答案．

解法二：作直线AB、AC、BC，作直线$x=1$，由图象可知，直线$x=1$与直线BC的交点最高，利用待定系数法求出直线BC解析式中k，b的值即可得到答案．

【解答】解：解法一：设直线AB的解析式为$y_1=k_1x+b_1$，

将点A（0，2），B（2，3）代入得，$\begin{cases}b_1=2\\2k_1+b_1=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k_1=\frac{1}{2}\\b_1=2\end{cases}$，

$\therefore k_1+b_1=\frac{5}{2}$,

设直线 AC 的解析式为 $y_2=k_2x+b_2$,

将点 A（0，2），C（3，1）代入得，$\begin{cases}b_2=2\\3k_2+b_2=1\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}k_2=-\frac{1}{3}\\b_2=2\end{cases}$,

$\therefore k_2+b_2=\frac{5}{3}$,

设直线 BC 的解析式为 $y_3=k_3x+b_3$,

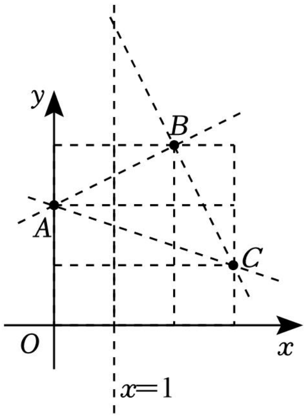
将点 B（2，3），C（3，1）代入得，$\begin{cases}2k_3+b_3=3\\3k_3+b_3=1\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}k_3=-2\\b_3=7\end{cases}$,

$\therefore k_3+b_3=5$,

$\therefore k_1+b_1=\frac{5}{2}$，$k_2+b_2=\frac{5}{3}$，$k_3+b_3=5$，其中最大的值为 5．

解法二：如图，作直线 AB、AC、BC，作直线 $x=1$，



设直线 AB 的解析式为 $y_1=k_1x+b_1$，直线 AC 的解析式为 $y_2=k_2x+b_2$，直线 BC 的解析式为 $y_3=k_3x+b_3$,

由图象可知，直线 $x=1$ 与直线 BC 的交点最高,

即当 $x=1$ 时，k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3 其中最大的值为 k_3+b_3,

将点 B（2，3），C（3，1）代入得，$\begin{cases}2k_3+b_3=3\\3k_3+b_3=1\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}k_3=-2\\b_3=7\end{cases}$,

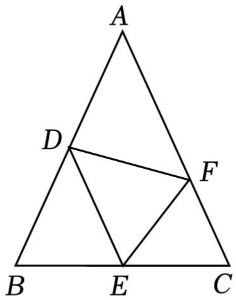
$\therefore k_3+b_3=5$,

k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3 其中最大的值为 $k_3+b_3=5$．

故答案为：5．

【点评】本题主要考查用待定系数法求一次函数解析式，应用待定系数进行正确的计算是解题关键．

16．（4分）如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle A<90°$，点D，E，F分别在边AB，BC，CA上，连接DE，EF，FD，已知点B和点F关于直线DE对称．设$\frac{BC}{AB}=k$，若$AD=DF$，则$\frac{CF}{FA}=$__$\frac{k^2}{2-k^2}$__（结果用含k的代数式表示）．



【分析】方法一：先根据轴对称的性质和已知条件证明$DE\parallel AC$，再证△BDE∽△BAC，推出$EC=\frac{1}{2}k\cdot AB$，通过证明△ABC∽△ECF，推出$CF=\frac{1}{2}k^2\cdot AB$，即可求出$\frac{CF}{FA}$的值．方法二：证明$AD=DF=BD$，可得$BF\perp AC$，设$AB=AC=1$，$BC=k$，$CF=x$，则$AF=1-x$，利用勾股定理列方程求出$x$的值，进而可以解决问题．

【解答】解：方法一：∵点B和点F关于直线DE对称，

∴$DB=DF$，

∵$AD=DF$，

∴$AD=DB$，

∵$AD=DF$，

∴$\angle A=\angle DFA$，

∵点B和点F关于直线DE对称，

∴$\angle BDE=\angle FDE$，

∵$\angle BDE+\angle FDE=\angle BDF=\angle A+\angle DFA$，

∴$\angle FDE=\angle DFA$，

∴$DE\parallel AC$，

∴$\angle C=\angle DEB$，$\angle DEF=\angle EFC$，

∵点B和点F关于直线DE对称，

$\therefore \angle DEB = \angle DEF$，

$\therefore \angle C = \angle EFC$，

$\because AB = AC$，

$\therefore \angle C = \angle B$，

$\because \angle ACB = \angle EFC$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ECF$，

$\therefore \dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BC}{CF}$,

$\because DE \parallel AC$，

$\therefore \angle BDE = \angle A$，$\angle BED = \angle C$，

$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle BAC$，

$\therefore \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore EC = \dfrac{1}{2}BC$，

$\because \dfrac{BC}{AB} = k$，

$\therefore BC = k \cdot AB$，

$\therefore EC = \dfrac{1}{2}k \cdot AB$，

$\therefore \dfrac{AB}{\frac{1}{2}k \cdot AB} = \dfrac{k \cdot AB}{CF}$,

$\therefore CF = \dfrac{1}{2}k^2 \cdot AB$，

$\therefore \dfrac{CF}{FA} = \dfrac{CF}{AC-CF} = \dfrac{CF}{AB-CF} = \dfrac{\frac{1}{2}k^2 \cdot AB}{AB-\frac{1}{2}k^2 \cdot AB} = \dfrac{k^2}{2-k^2}$.

方法二：如图，连接 BF，

$\because$点 B 和点 F 关于直线 DE 对称，

$\therefore DB = DF$，

$\because AD = DF$，

$\therefore AD = DB = DF$，

$\therefore BF \perp AC$，

设 $AB = AC = 1$，

则 $BC = k$，

设 $CF=x$，

则 $AF=1-x$，

由勾股定理得，$AB^2-AF^2=BC^2-CF^2$，

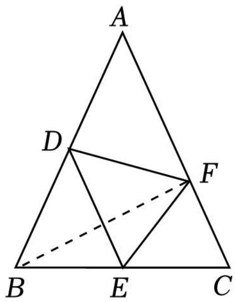
$\therefore 1^2-(1-x)^2=k^2-x^2$，

$\therefore x=\frac{k^2}{2}$，

$\therefore AF=1-x=\frac{2-k^2}{2}$，

$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{k^2}{2-k^2}$.

故答案为：$\frac{k^2}{2-k^2}$.



【点评】本题考查相似三角形的判定与性质，轴对称的性质，平行线的判定与性质，等腰三角形的性质，三角形外角的定义和性质等，有一定难度，解题的关键是证明$\triangle ABC \backsim \triangle ECF$.

三、解答题：本大题有 7 个小题，共 66 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（6 分）（2023•杭州）设一元二次方程 $x^2+bx+c=0$．在下面的四组条件中选择其中一组 b，c 的值，使这个方程有两个不相等的实数根，并解这个方程．

①$b=2$，$c=1$；

②$b=3$，$c=1$；

③$b=3$，$c=-1$；

④$b=2$，$c=2$．

注：如果选择多组条件分别作答，按第一个解答计分．

【分析】先根据这个方程有两个不相等的实数根，得 $b^2>4c$，由此可知 b、c 的值可在①②③中选取，然后求解方程即可．

【解答】解：∵使这个方程有两个不相等的实数根，

$\therefore b^2-4ac>0$，即 $b^2>4c$，

∴②③均可，

选②解方程，则这个方程为：$x^2+3x+1=0$，

∴$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，

∴$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$；

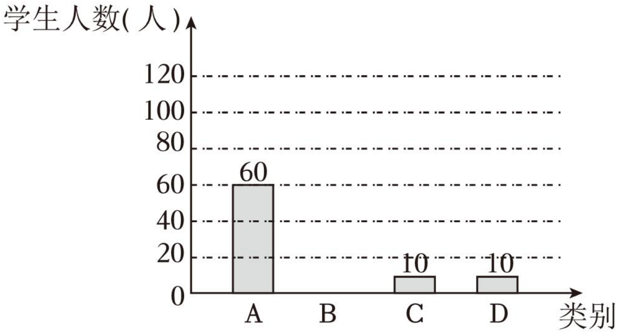
选③解方程，则这个方程为：$x^2+3x-1=0$，

∴$x_1=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

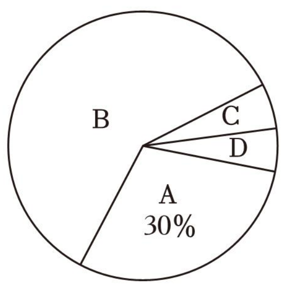
【点评】本题主要考查的是根据一元二次方程根的判别式以及解一元二次方程，一元二次方程中根的判别式大于 0，方程有两个不相等的实数根；根的判别式等于 0，方程有两个相等的实数根；根的判别式小于 0，方程无解.

18.（8 分）（2023•杭州）某校为了了解家长和学生观看安全教育视频的情况，随机抽取本校部分学生调查，把收集的数据按照 A，B，C，D 四类（A 表示仅学生参与；B 表示家长和学生一起参与；C 表示仅家长参与；D 表示其他）进行统计，得到每一类的学生人数，并把统计结果绘制成如图所示的未完成的条形统计图和扇形统计图.

观看安全教育视频情况条形统计图



观看安全教育视频情况扇形统计图



（1）在这次抽样调查中，共调查了多少名学生？

（2）补全条形统计图.

（3）已知该校共有 1000 名学生，估计 B 类的学生人数.

【分析】（1）由 A 类别人数及其所占百分比可得总人数；

（2）结合（1）的结论求出 B 类的人数，进而补全条形统计图；

（3）总人数乘以样本中 B 类别人数所占比例.

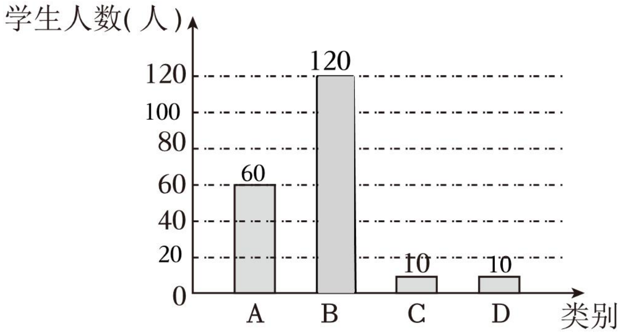
【解答】解：（1）$60\div30\%=200$（名），

答：在这次抽样调查中，共调查了 200 名学生；

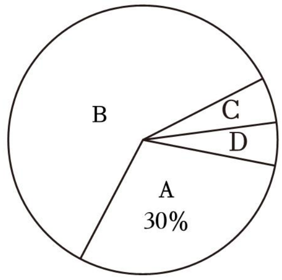
（2）样本中 B 类的人数为：$200-60-10-10=120$（名），

补全条形统计图如下：

观看安全教育视频情况条形统计图



观看安全教育视频情况扇形统计图



（3）$1000\times\frac{120}{200}=600$（名），

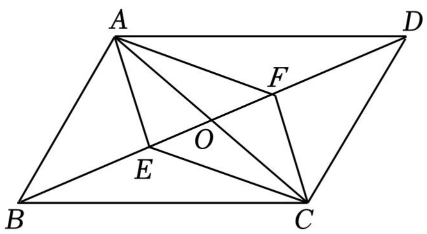
答：估计 B 类的学生人数约 600 名.

【点评】本题考查条形统计图、扇形统计图、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

19.（8 分）（2023•杭州）如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在对角线 BD 上，且 $BE=EF=FD$，连接 AE，EC，CF，FA.

（1）求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

（2）若△ABE 的面积等于 2，求△CFO 的面积.



【分析】（1）由平行四边形的性质得 $AO=CO$，$BO=DO$，再证 $OE=OF$，即可得出结论；

（2）由平行四边形的性质可求解.

【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AO=CO$，$BO=DO$，

∵$BE=DF$，

∴$EO=FO$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形；

（2）解：∵$BE=EF$，

∴$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=2$，

∵四边形 $AECF$ 是平行四边形，

∴$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle CEF}=2$，$EO=FO$，

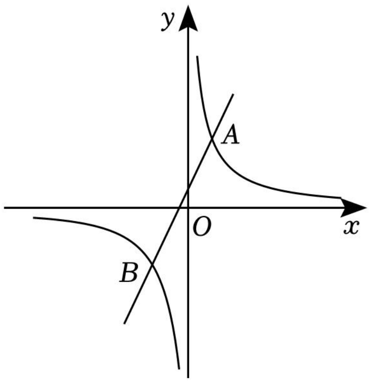
∴△CFO 的面积＝1．

【点评】本题考查了平行四边形的判定和性质，三角形的面积公式，掌握平行四边形的性质是解题的关键．

20．（10分）（2023•杭州）在直角坐标系中，已知 $k_1k_2\neq0$，设函数 $y_1=\frac{k_1}{x}$与函数 $y_2=k_2$（$x-2$）+5 的图象交于点 A 和点 B．已知点 A 的横坐标是 2，点 B 的纵坐标是－4．

（1）求 k_1，k_2 的值．

（2）过点 A 作 y 轴的垂线，过点 B 作 x 轴的垂线，在第二象限交于点 C；过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，在第四象限交于点 D．求证：直线 CD 经过原点．



【分析】(1)首先将点 A 的横坐标代入 $y_2=k_2(x-2)+5$ 求出点 A 的坐标，然后代入$y_1=\frac{k_1}{x_1}$求出 $k_1=10$ 然后将点 B 的纵坐标代入$y_1=\frac{1}{x}$ 求出$B(-\frac{5}{2}，-4)$，然后代入 $y_2=k_2$（$x-2$）+5，即可求出 $k_2=2$；

（2）首先根据题意画出图形，然后求出点 C 和点 D 的坐标，然后利用待定系数法求出 CD 所在直线的表达式，进而求解即可．

【解答】（1）解：∵点 A 的横坐标是 2，

∴将 $x=2$ 代入 $y_2=k_2$（$x-2$）+5＝5，

∴A（2，5），

∴将 A（2，5）代入$y_1=\frac{k_1}{x}$ 得：$k_1=10$，

∴$y_1=\frac{10}{x}$，

∵点 B 的纵坐标是－4，

∴将 $y=-4$ 代入$y_1=\frac{10}{x}$ 得，$x=-\frac{5}{2}$，

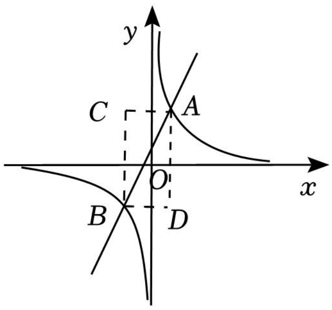
∴B（$-\frac{5}{2}$，－4）．

∴将 B（$-\frac{5}{2}$，﹣4）代入 $y_2=k_2$（x﹣2）+5 得：$-4=k_2(-\frac{5}{2}-2)+5$，

解得：$k_2=2$．

∴$y_2=2$（x﹣2）+5＝$2x+1$．

（2）证明：如图所示，



由题意可得：C（$-\frac{5}{2}$，5），D（2，﹣4），

设 CD 所在直线的表达式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}-\frac{5}{2}k+b=5\\2k+b=-4\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-2\\b=0\end{cases}$，

∴CD 所在直线的表达式为 $y=-2x$，

∴当 $x=0$ 时，$y=0$，

∴直线 CD 经过原点．

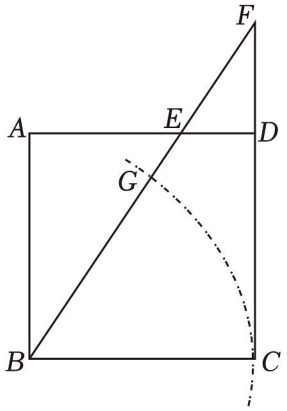
【点评】本题主要考查了一次函数与反比例函数的综合，待定系数法，一次函数图象上点的坐标的特征，反比例函数图象上点的坐标的特点，熟练掌握一次函数与反比例函数的性质是解题的关键．

21．（10分）（2023•杭州）在边长为1的正方形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上（不与点 A，D 重合），射线 BE 与射线 CD 交于点 F．

（1）若 $ED=\frac{1}{3}$，求 DF 的长．

（2）求证：$AE\cdot CF=1$．

（3）以点 B 为圆心，BC 长为半径画弧，交线段 BE 于点 G．若 $EG=ED$，求 ED 的长．



【分析】（1）通过证明△DEF∽△CBF，由相似三角形的性质可求解；

（2）通过证明△ABE∽△CFB，可得$\frac{AB}{CF}=\frac{AE}{BC}$，可得结论；

（3）设 $EG=ED=x$，则 $AE=1-x$，$BE=1+x$，由勾股定理可求解．

【解答】（1）解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD\parallel BC$，$AB=AD=BC=CD=1$，

∴△DEF∽△CBF，

∴$\frac{DE}{BC}=\frac{DF}{CF}$，

∴$\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{DF}{DF+1}$，

∴$DF=\frac{1}{2}$；

（2）证明：∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle ABE=\angle F$，

又∵$\angle A=\angle BCD=90°$，

∴△ABE∽△CFB，

∴$\frac{AB}{CF}=\frac{AE}{BC}$，

∴$AE\cdot CF=AB\cdot BC=1$；

（3）解：设 $EG=ED=x$，则 $AE=AD-DE=1-x$，$BE=BG+GE=BC+GE=1+x$，

在 Rt△ABE 中，$AB^2+AE^2=BE^2$，

∴$1+(1-x)^2=(1+x)^2$，

∴$x=\frac{1}{4}$，

∴$DE=\frac{1}{4}$．

【点评】本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，灵活运用这

些性质解决问题是解题的关键．

22．（12 分）（2023•杭州）设二次函数 $y=ax^2+bx+1$（$a\neq 0$，b 是实数）．已知函数值 y 和自变量 x 的部分对应取值如下表所示：

x	…	﹣1	0	1	2	3	…
y	…	m	1	n	1	p	…

（1）若 $m=4$，

①求二次函数的表达式；

②写出一个符合条件的 x 的取值范围，使得 y 随 x 的增大而减小．

（2）若在 m，n，p 这三个实数中，只有一个是正数，求 a 的取值范围．

【分析】（1）①利用待定系数法即可求得；

②利用二次函数的性质得出结论；

（2）根据题意 $m\leqslant 0$，由$-\frac{b}{2a}=1$，得出 $b=-2a$，则二次函数为 $y=ax^2-2ax+1$，得出 $m=a+2a+1\leqslant 0$，解得 $a\leq -\frac{1}{3}$．

【解答】解：（1）①由题意得$\begin{cases}a-b+1=4\\4a+2b+1=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$，

∴二次函数的表达式是 $y=x^2-2x+1$；

②∵$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，

∴抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$，

∴当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小；

（2）∵$x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值都是 1，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，

∴（1，n）是顶点，（﹣1，m）和（3，p）关于对称轴对称，

若在 m，n，p 这三个实数中，只有一个是正数，则抛物线必须开口向下，且 $m\leqslant 0$，

∵$-\frac{b}{2a}=1$，

∴$b=-2a$，

∴二次函数为 $y=ax^2-2ax+1$，

∴$m=a+2a+1\leqslant 0$，

$\therefore a\le -\frac{1}{3}$.

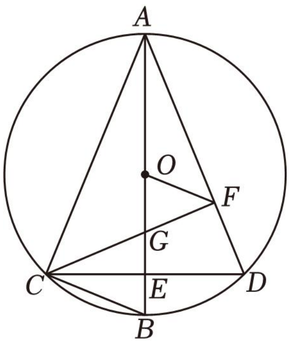
【点评】本题考查了二次函数的图象与系数的关系，待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，能够明确题意得出 $m=a+2a+1<0$ 是解题的关键．

23．（12 分）（2023•杭州）如图，在⊙O 中，直径 AB 垂直弦 CD 于点 E，连接 AC，AD，BC，作 $CF\perp AD$ 于点 F，交线段 OB 于点 G（不与点 O，B 重合），连接 OF．

（1）若 $BE=1$，求 GE 的长．

（2）求证：$BC^2=BG\cdot BO$．

（3）若 $FO=FG$，猜想$\angle CAD$ 的度数，并证明你的结论．



【分析】（1）由垂径定理可得$\angle AED=90°$，结合 $CF\perp AD$ 可得$\angle DAE=\angle FCD$，根据圆周角定理可得$\angle DAE=\angle BCD$，进而可得$\angle BCD=\angle FCD$，通过证明$\triangle BCE\cong\triangle GCE$，可得 $GE=BE=1$；

（2）证明$\triangle ACB\backsim\triangle CEB$，根据对应边成比例可得 $BC^2=BA\cdot BE$，再根据 $AB=2BO$，$BE=\frac{1}{2}BG$，可证 $BC^2=BG\cdot BO$；

（3）方法一：设$\angle DAE=\angle CAE=\alpha$，$\angle FOG=\angle FGO=\beta$，可证 $a=90°-\beta$，$\angle OCF=90-3\alpha$，通过 SAS 证明$\triangle COF\cong\triangle AOF$，进而可得$\angle OCF=\angle OAF$，即 $90°-3a=a$，则$\angle CAD=2a=45°$．方法二：延长 FO 交 AC 于点 H，连接 OC，证明$\triangle AFC$ 是等腰直角三角形，即可解决问题．

【解答】（1）解：直径 AB 垂直弦 CD，

$\therefore\angle AED=90°$，

$\therefore\angle DAE+\angle D=90°$，

$\because CF\perp AD$，

$\therefore\angle FCD+\angle D=90°$，

∴$\angle DAE=\angle FCD$，

由圆周角定理得$\angle DAE=\angle BCD$，

∴$\angle BCD=\angle FCD$，

在△BCE和△GCE中，

$$\begin{cases}\angle BCE=\angle GCE\\CE=CE\\\angle BEC=\angle GEC\end{cases},$$

∴△BCE≌△GCE（ASA），

∴$GE=BE=1$；

（2）证明：∵AB是⊙O的直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ACB=\angle CEB=90°$，

∵$\angle ABC=\angle CBE$，

∴△ACB∽△CEB，

∴$\frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BC}$,

∴$BC^2=BA\cdot BE$，

由（1）知$GE=BE$，

∴$BE=\frac{1}{2}BG$，

∵$AB=2BO$，

∴$BC^2=BA\cdot BE=2BO\cdot\frac{1}{2}BG=BG\cdot BO$；

（3）解：$\angle CAD=45°$，证明如下：

解法一：如图，连接OC，

∵$FO=FG$，

∴$\angle FOG=\angle FGO$，

∵直径AB垂直弦CD，

∴$CE=DE$，$\angle AED=\angle AEC=90°$，

∵$AE=AE$，

∴△ACE≌△ADE（SAS），

∴$\angle DAE=\angle CAE$，

设$\angle DAE=\angle CAE=\alpha$，$\angle FOG=\angle FGO=\beta$，

则$\angle FCD=\angle BCD=\angle DAE=\alpha$，

∵$OA=OC$，

∴$\angle OCA=\angle OAC=\alpha$，

∵$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle OCF=\angle ACB-\angle OCA-\angle FCD-\angle BCD=90^\circ-3\alpha$，

∵$\angle CGE=\angle OGF=\beta$，$\angle GCE=\alpha$，$\angle CGE+\angle GCE=90^\circ$，

∴$\beta+\alpha=90^\circ$，

∴$\alpha=90^\circ-\beta$，

∵$\angle COG=\angle OAC+\angle OCA=\alpha+\alpha=2\alpha$，

∴$\angle COF=\angle COG+\angle GOF=2\alpha+\beta=2(90^\circ-\beta)+\beta=180^\circ-\beta$，

∴$\angle COF=\angle AOF$，

在△COF和△AOF中，

$$\begin{cases}CO=AO\\ \angle COF=\angle AOF,\\ OF=OF\end{cases}$$

∴$\triangle COF\cong\triangle AOF$（$SAS$），

∴$\angle OCF=\angle OAF$，

即$90^\circ-3\alpha=\alpha$，

∴$\alpha=22.5^\circ$，

∴$\angle CAD=2a=45^\circ$．

解法二：

如图，延长FO交AC于点H，连接OC，

∵$FO=FG$，

∴$\angle FOG=\angle FGO$，

∴$\angle FOG=\angle FGO=\angle CGB=\angle B$，

∴$BC\parallel FH$，

∵AB是⊙O的直径，

∴$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle ACB=\angle AHO=90^\circ$，

∵$OA=OC$，

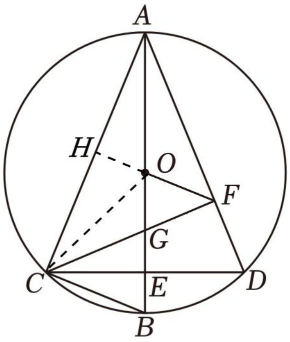
∴$AH=CH$，

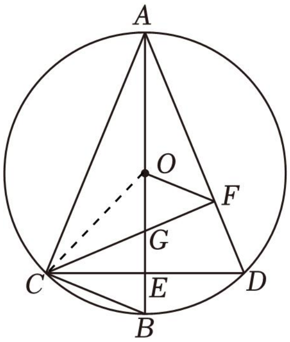
∴$AF=CF$，

∵$CF\perp AD$，

∴$\triangle AFC$是等腰直角三角形，

∴$\angle CAD=45°$．





【点评】本题是圆的综合题，考查垂径定理，圆周角定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质等，难度较大，解题的关键是综合应用上述知识点，特别是第3问，需要大胆猜想，再逐步论证．